MATH. SCAND. 1 (1953)

ÜBER EINE VERALLGEMEINERUNG DES GRUPPENBEGRIFFS

HELGE TVERMOES

In einer Arbeit aus dem Jahre 1929 hat W. Dörnte [1] die folgende Verallgemeinerung des Gruppenbegriffs eingeführt. In einem Elementbereich sei für eine feste natürliche Zahl n jedem geordneten System von $n+1$ Elementen ein Element des Bereichs, ihr Produkt, zugeordnet. Es wird eine passende Form des Assoziativgesetzes sowie die Möglichkeit der Division in dem Sinne postuliert, dass es zu gegebenen n ersten (letzten) Faktoren und gegebenem Produkt stets einen letzten (ersten) Faktor gibt. (Die von Dörnte ausserdem vorausgesetzte Eindeutigkeit der Division erweist sich als Folge der übrigen Annahmen.) Solche Bereiche nennt Dörnte $(n+1)$-Gruppen. Aus formalen Gründen wird hier die Bezeichnung n-Gruppen vorgezogen. Eine gewöhnliche Gruppe ist eine 1-Gruppe in diesem Sinne.

Das Hauptresultat der vorliegenden Arbeit ist, dass jede n-Gruppe N so in eine gewöhnliche Gruppe eingebettet werden kann, dass die Komposition der n-Gruppe mit der auf je $n+1$ Elemente von N angewandten Komposition dieser Gruppe übereinstimmt. Es zeigt sich, dass es genau eine solche Gruppe, die N umschriebene Gruppe, mit der weiteren Eigenschaft gibt, dass N primitive Nebenklasse eines Normalteilers mit zyklischer Faktorgruppe der Ordnung n ist. Umgekehrt bildet jede primitive Nebenklasse eines solchen Normalteilers einer Gruppe eine n-Gruppe. Der Begriff der n-Gruppe lässt sich somit vollständig in die Gruppentheorie einordnen. Hiervon wird bei der Ableitung einiger Eigenschaften der n-Gruppen Gebrauch gemacht.

Aus einer r-Gruppe kann man für jedes natürliche Multiplum n von r eine n-Gruppe ableiten, indem man nur Produkte von je $n+1$ Faktoren der r-Gruppe in Betracht zieht. Im letzten Teil dieser Arbeit werden gruppentheoretische Kriterien dafür aufgestellt, dass eine n-Gruppe »echt« ist, d. h. nicht in der angegebenen Weise aus r-Gruppen mit $r < n$ ableitbar ist.

Eingegangen am 19. Januar 1953.

Weitere Untersuchungen über n-Gruppen finden sich in der Abhandlung [2] des Verfassers.

1. Definitionen und Grundeigenschaften. Es sei M eine beliebige (nicht-leere) Menge. Unter einer t-Komposition in M soll eine Abbildung der Menge aller geordneten Systeme von je t Elementen aus M in M verstanden werden. Das dem System der Elemente $a_1, \ldots, a_t$ zugeordnete Element wird ihr Produkt genannt und mit $a_1 \ldots a_t$ bezeichnet.

DEFINITION 1. *Unter einer n-Halbgruppe N wird eine Menge mit Elementen $a_1, a_2, \ldots$ verstanden, in der eine $(n+1)$-Komposition definiert ist, für welche das assoziative Gesetz*

$$(1.1)\quad (a_1 \ldots a_{n+1})a_{n+2} \ldots a_{2n+1} = a_1 \ldots a_i(a_{i+1} \ldots a_{i+n+1})a_{i+n+2} \ldots a_{2n+1}$$

für $i = 1, \ldots, n$ gilt. Die Anzahl der Elemente von N, die endlich oder unendlich sein kann, heisst die Ordnung von N.

Für $n = 1$ wird N eine Halbgruppe im gewöhnlichen Sinne.

Dem Produkt $a_1 \ldots a_t$ von Elementen einer n-Halbgruppe wird durch

$$(1.2)\qquad a_1 \ldots a_t = (\ldots((a_1 \ldots a_{n+1}) \ldots a_{2n+1}) \ldots a_{t-n}) \ldots a_t$$

ein Sinn beigelegt, wenn t die Form $kn+1$ hat, wo k eine nicht-negative ganze Zahl ist. Man zeigt dann leicht, dass man in (1.2) auf der linken Seite Klammern um irgend welche $k'n+1$ auf einander folgende Faktoren setzen darf ($0 \leqq k' \leqq k$).

Eine n-Halbgruppe heisst *abelsch*, wenn jedes Produkt von $n+1$ Faktoren bei beliebigen Permutationen der Faktoren ungeändert bleibt. Es ist dann leicht zu sehen, dass auch in Produkten von $kn+1$ Faktoren ($k > 0$, ganz) die Faktoren beliebig vertauscht werden dürfen.

DEFINITION 2. *Unter einer n-Gruppe wird eine n-Halbgruppe verstanden, in der die beiden Gleichungen*

$$(1.3)\qquad a_1 \ldots a_n x = a, \qquad y a_2 \ldots a_{n+1} = a$$

bei beliebig gegebenen Elementen $a_1, \ldots, a_{n+1}, a$ Lösungen x und y besitzen.

Eine 1-Gruppe ist eine gewöhnliche Gruppe.

In einer n-Gruppe sind offenbar auch die (1.3) entsprechenden Gleichungen mit kn gegebenen ersten oder letzten Faktoren lösbar.

Aus einer beliebigen (Halb)gruppe im gewöhnlichen Sinne kann für jedes gegebene n eine n-(Halb)gruppe dadurch gebildet werden, dass man nur Produkte von $n+1$ Faktoren der gegebenen (Halb)gruppe betrachtet. Allgemeiner erhält man für jedes natürliche Multiplum n von r aus einer r-(Halb)gruppe R eine n-(Halb)gruppe N, indem man ausschliesslich Produkte von $n+1$ Faktoren aus R betrachtet. Dieses aus denselben Elementen wie R bestehende N heisse *die aus R abgeleitete n-(Halb)gruppe.* Lässt sich eine n-(Halb)gruppe für irgend ein $r < n$ in dieser Weise aus einer r-Halbgruppe ableiten, so soll sie kurz als *ableitbar*, anderenfalls als *echt* bezeichnet werden.

Eine n-Halbgruppe, die aus einer r-Gruppe abgeleitet ist, ist natürlich eine n-Gruppe. Es gilt aber auch das Umgekehrte: *Ist die n-Gruppe N aus der r-Halbgruppe R abgeleitet, so ist R eine r-Gruppe.* Nach Definition 2 ist zu zeigen, dass die Gleichungen

$$a_1 \ldots a_r x = a, \quad y a_2 \ldots a_{r+1} = a$$

in R lösbar sind. Nun hat die in N sinnvolle Gleichung

$$a_1 \ldots a_r a^{n-r} z = a$$

eine Lösung z, da N eine n-Gruppe ist. Das Produkt $x = a^{n-r}z$ ist in R definiert und eine Lösung der ersten Gleichung. Analog verfährt man mit der zweiten Gleichung.

Hat eine Teilmenge einer n-Halbgruppe N die Eigenschaft, dass alle Produkte von $n+1$ Elementen der Teilmenge ebenfalls der Teilmenge angehören, so ist diese eine n-Halbgruppe, die als *n-Unterhalbgruppe* oder, falls sie eine n-Gruppe ist, als *n-Untergruppe* von N bezeichnet wird.

DEFINITION 3. *Für $r|n$ heisst eine Teilmenge einer r-Halbgruppe R n-Unter(halb)gruppe von R, wenn sie n-Unter(halb)gruppe der aus R abgeleiteten n-Halbgruppe ist.*

Es kann demnach speziell von n-Untergruppen von gewöhnlichen Gruppen gesprochen werden.

Die Begriffe der homomorphen und isomorphen Abbildung werden im folgenden in evidenter Weise auf n-(Halb)gruppen angewendet. Wie üblich wird von einer Abbildung einer Menge M *auf* eine Menge M' oder *in* diese gesprochen, je nachdem ob bekannt ist, dass jedes Element von M' Bild ist oder nicht.

2. Charakterisierung der n-Untergruppen von Gruppen. Es sei eine Gruppe $\mathfrak{G}$ vorgelegt. Mit Teilkomplexen von $\mathfrak{G}$ wird in der üblichen Weise gerechnet. Die von den Elementen eines Teilkomplexes M von $\mathfrak{G}$ erzeugte Untergruppe wird mit $\{M\}$ bezeichnet.

Ist N eine n-Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so gehören nach Definition 2 die Lösungen der beiden Divisionsgleichungen (1.3) zu N. Es gilt aber auch umgekehrt

Satz 1. *Hat ein Teilkomplex N einer Gruppe $\mathfrak{G}$ die Eigenschaft, dass die Lösungen x und y der Gleichungen*

$$a_1 \ldots a_n x = a, \quad y a_2 \ldots a_{n+1} = a \tag{2.1}$$

bei jeder Wahl der Elemente $a_1, \ldots, a_{n+1}$, a aus N zu N gehören, so ist N eine n-Untergruppe von $\mathfrak{G}$.

Ferner ist dann N^n Normalteiler der Untergruppe $\{N\}$ von $\mathfrak{G}$, die Faktorgruppe $\{N\}/N^n$ ist zyklisch von einer Ordnung $r|n$, und N ist eine Nebenklasse von N^n, die als Element dieser Faktorgruppe primitiv ist.

Beweis. Wir betrachten die Menge N^n aller Elemente von $\mathfrak{G}$, die sich als Produkte von n Elementen aus N schreiben lassen. Wegen der vorausgesetzten Lösbarkeit der Gleichungen (2.1) in N lässt sich jedes Element A von N^n sowohl in der Form ax^{-1} als auch in der Form $y^{-1}a$ darstellen, wo x und y zu N gehören und $a \in N$ willkürlich gewählt werden kann. Umgekehrt gehören alle Elemente $a_1^{-1}a$ und aa_{n+1}^{-1} mit willkürlichen a_1, a_{n+1}, a aus N zu N^n. Hieraus ergibt sich, dass N^n Untergruppe von $\{N\}$ ist. Bringt man nämlich zwei beliebige Elemente A_1 und A_2 von N^n auf die Formen $A_1 = y_1^{-1}a$ und $A_2 = y_2^{-1}a$, so folgt $A_1A_2^{-1} = y_1^{-1}y_2 \in N^n$.

Es sei $z = b_1 \ldots b_n b_{n+1}$ ein Produkt von $n+1$ Elementen aus N. Da wegen der Gruppeneigenschaft von N^n mit $b_1 \ldots b_n$ auch $(b_1 \ldots b_n)^{-1}$ zu N^n gehört, kann $(b_1 \ldots b_n)^{-1}$ als Produkt $a_1 \ldots a_n$ von Elementen aus N geschrieben werden. Daher genügt z der Gleichung $a_1 \ldots a_n z = b_{n+1}$, woraus $z \in N$ folgt. Da das Produkt von $n+1$ beliebigen Elementen aus N somit zu N gehört und das Assoziativgesetz in $\mathfrak{G}$ die Gleichung (1.1) zur Folge hat, ist N eine n-Gruppe.

Ist a ein beliebiges Element von N, so sind die Elemente der Nebenklassen aN^n und N^na Produkte von $n+1$ Elementen aus N und gehören daher zu N. Andererseits kann jedes Element von N wegen der Lösbarkeit der Gleichungen (2.1) in N als Produkt von $n+1$ Elementen aus N mit a als erstem bzw. letztem Faktor geschrieben werden. Es gilt daher

$$N^{n+1} = aN^n = N^na = N, \tag{2.2}$$

also insbesondere

$$aN^na^{-1} = a^{-1}N^na = N^n$$

für jedes $a \in N$. Da nun alle Elemente von $\{N\}$ Produkte von Faktoren sind, von denen jeder ein Element von N oder das reziproke eines solchen ist, folgt hieraus, dass N^n Normalteiler von $\{N\}$ ist.

Wählt man in der zweiten Gleichung (2.1) $a = a_{n+1}$, so erhält man eine Darstellung des reziproken a_n^{-1} des willkürlichen Elements $a_n \in N$ als

Produkt von $n-1$ Elementen von N. Folglich kann jedes Element von $\{N\}$ als Produkt solcher Elemente geschrieben werden. Dies zusammen mit (2.2) zeigt, dass $\{N\}$ die Vereinigung der Nebenklassen $N, N^2, \ldots, N^n$ ist. Die Faktorgruppe $\{N\}/N^n$ ist daher zyklisch mit einer Ordnung r die in n aufgeht, und N ist primitives Element dieser Faktorgruppe.

SATZ 2. *Ist der Teilkomplex N einer Gruppe $\mathfrak{G}$ Nebenklasse eines Normalteilers $\mathfrak{N}$ von $\{N\}$ mit einem Index $r|n$, so ist N eine n-Untergruppe von $\mathfrak{G}$.*

BEWEIS. Da der Index von $\mathfrak{N}$ in $\{N\}$ Teiler von n ist, hat man $N^n = \mathfrak{N}$, also $N^{n+1} = N$, was besagt, dass die Produkte von je $n+1$ Elementen von N zu N gehören. Da das Assoziativgesetz der Definition 1 eine Folge des in $\{N\}$ gültigen gewöhnlichen ist, ist N eine n-Halbgruppe. Die Gleichungen (2.1) besagen hier, dass die mit gewissen Elementen von $N^n = \mathfrak{N}$ multiplizierten Lösungen x und y zur Nebenklasse N gehören. Folglich gehören sie selbst zu N, und damit ist gezeigt, dass N eine n-Gruppe ist.

3. Die einer n-Gruppe umschriebene Gruppe. Auf Grund des im vorigen Abschnitt bewiesenen Satzes 1 lässt sich nun die folgende Definition aufstellen:

DEFINITION 4. *Unter einer der n-Gruppe N umschriebenen Gruppe wird eine Gruppe $\mathfrak{G}$ verstanden, die folgende Eigenschaften hat:*

I. *N ist n-Untergruppe von $\mathfrak{G}$.*
II. *Es gilt $\{N\} = \mathfrak{G}$.*
III. *Der Normalteiler N^n von $\mathfrak{G}$ hat den Index n.*

Die n-Gruppe N heisst dann auch der Gruppe $\mathfrak{G}$ *eingeschrieben*.

Wenn die Forderungen der Definition 4 erfüllt sind, ist die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/N^n$ nach Satz 1 zyklisch, und wegen II ist N als Element dieser Faktorgruppe primitiv. Die Nebenklassen N^t, $1 \leqq t \leqq n$, erschöpfen also die Gruppe $\mathfrak{G}$, sodass jedes Element von $\mathfrak{G}$ als Produkt von Elementen aus N geschrieben werden kann. Die Nebenklasse N^t besteht aus allen solchen Produkten $a_1 \ldots a_s$, für welche $s \equiv t \pmod{n}$ ist.

Umgekehrt ist jede primitive Nebenklasse N eines Normalteilers $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ mit zyklischer Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ der Ordnung n eine der Gruppe $\mathfrak{G}$ eingeschriebene n-Gruppe. Denn aus Satz 2 folgt, dass N eine n-Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist, und da N primitives Element von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ist und $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ die Ordnung n hat, hat man $\{N\} = \mathfrak{G}$ und $N^n = \mathfrak{N}$.

Wir formulieren diese Resultate als

SATZ 3. *Ein Teilkomplex N einer Gruppe $\mathfrak{G}$ ist dann und nur dann eine $\mathfrak{G}$ eingeschriebene n-Gruppe, wenn er primitive Nebenklasse eines Normalteilers von $\mathfrak{G}$ mit zyklischer Faktorgruppe der Ordnung n ist.*

Jedes Element von $\mathfrak{G}$ lässt sich dann als Produkt von Elementen aus N schreiben, und ein solches Produkt $a_1 \ldots a_s$ gehört dann und nur dann zur Nebenklasse N^t, wenn $s \equiv t \pmod n$ ist.

Das Ziel dieses Abschnitts ist zu zeigen, dass jede n-Gruppe eine und (natürlich bis auf Isomorphie) nur eine umschriebene Gruppe besitzt. Wir beweisen zunächst die Existenz, d. h.

SATZ 4. *Zu jeder n-Gruppe N gibt es eine Gruppe $\mathfrak{G}'$, die einer zu N isomorphen n-Gruppe N' umschrieben ist.*

BEWEIS. Wir betrachten die Menge S aller endlichen geordneten Systeme $(a_1, \ldots, a_s)$ von Elementen der gegebenen n-Gruppe N. In S soll eine Äquivalenzrelation definiert werden. Hierzu führen wir die beiden folgenden, zueinander inversen »elementaren Umformungen« ein: Gilt in N eine Relation

$$a_{i+1} \ldots a_{i+n+1} = a\ ,$$

so kann das System

$$(a_1, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+n+1}, a_{i+n+2}, \ldots, a_s)$$

durch

$$(a_1, \ldots, a_i, a, a_{i+n+2}, \ldots, a_s)$$

ersetzt werden, oder umgekehrt. Zwei Systeme in S werden nun als äquivalent bezeichnet, wenn das eine durch endlich viele elementare Umformungen in das andere übergeführt werden kann. Dass hierdurch wirklich eine Äquivalenzrelation definiert ist, ist einleuchtend. Die das System $(a_1, \ldots, a_s)$ enthaltende Äquivalenzklasse wird mit $[a_1, \ldots, a_s]$ bezeichnet. Für spätere Zwecke sei bemerkt, dass die Restklasse modulo n der Anzahl der Elemente eines Systems bei den obigen Umformungen ungeändert bleibt und daher für alle Systeme einer Klasse dieselbe ist.

Wir wollen zeigen, dass durch

$$[a_1, \ldots, a_s][b_1, \ldots, b_t] = [a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_t] \tag{3.1}$$

eine 2-Komposition definiert ist, die die Menge der Äquivalenzklassen zu einer Gruppe $\mathfrak{G}'$ macht. Zunächst ist einleuchtend, dass die Klasse der rechten Seite von (3.1) von der Wahl der Repräsentanten $(a_1, \ldots, a_s)$ und $(b_1, \ldots, b_t)$ unabhängig ist, sodass (3.1) tatsächlich eine Komposition definiert. Die Gültigkeit des assoziativen Gesetzes ist ebenfalls evident. Die Möglichkeit der Division erkennt man so: Seien die Klassen $[a_1, \ldots, a_s]$ und $[b_1, \ldots, b_t]$ gegeben. Man wähle beliebige Elemente $c_1, \ldots, c_u$ aus N in einer solchen Anzahl u, dass $s+u \equiv 0 \pmod n$ ist, und bestimme x in N so, dass $a_1 \ldots a_s c_1 \ldots c_u x = b_1$ gilt. Dann hat man

$$[a_1, \ldots, a_s][c_1, \ldots, c_u, x, b_2, \ldots, b_t] = [b_1, \ldots, b_t]\ .$$

Analog sieht man, dass linksseitige Division möglich ist.

Um zu zeigen, dass die so entstandene Gruppe $\mathfrak{G}'$ eine zu N isomorphe n-Untergruppe besitzt, betrachten wir die Menge der Klassen $[a]$. Das Rechnen in $\mathfrak{G}'$ ergibt in dieser Menge eine $(n+1)$-Komposition, die sie zu einer n-Halbgruppe N' macht. Durch $a \to [a]$ ist eine eindeutige Abbildung von N auf N' definiert, die homomorph ist, da aus $a_1 \ldots a_{n+1} = a$ offensichtlich

$$[a_1] \ldots [a_{n+1}] = [a_1, \ldots, a_{n+1}] = [a]$$

folgt. Sie ist aber auch eindeutig umkehrbar und daher isomorph. Denn $[a_1] = [a_2]$ bedeutet, dass a_1 durch Rechnen in N in a_2 übergeführt werden kann, was nur für $a_1 = a_2$ möglich ist. Damit ist gezeigt, dass N' eine n-Untergruppe von $\mathfrak{G}'$ ist.

Es ist nun noch nachzuweisen, dass die Forderungen II und III der Definition 4 erfüllt sind. Dass $\{N'\} = \mathfrak{G}'$ gilt, folgt daraus, dass jedes Element $[a_1, \ldots, a_s]$ von $\mathfrak{G}'$ in der Form $[a_1] \ldots [a_s]$ geschrieben werden kann. Nach Satz 1 ist ferner N'^n Normalteiler von $\mathfrak{G}' = \{N'\}$ mit einem Index $r|n$. Dass $r = n$ sein muss, ergibt sich so: Gehört ein Element $[a_1, \ldots, a_s]$ zu N', so ist nach einer oben gemachten Bemerkung $s \equiv 1 \pmod{n}$, gehört es zu N'^r, so ist folglich $s \equiv r \pmod{n}$, und gehört es zu N'^n, so ist $s \equiv 0 \pmod{n}$. Aus $N'^r = N'^n$ folgt daher $r \equiv 0 \pmod{n}$. Damit ist Satz 3 bewiesen.

Wir gehen nun zum Beweis der Eindeutigkeit der umschriebenen Gruppe über. Der diesbezügliche Satz lautet in genauer Formulierung:

Satz 5. *Die n-Gruppen N_1 und N_2 seien den Gruppen $\mathfrak{G}_1$ bzw. $\mathfrak{G}_2$ eingeschrieben. Es sei ferner φ eine isomorphe Abbildung von N_1 auf N_2. Dann lässt sich φ auf genau eine Weise zu einer isomorphen Abbildung von $\mathfrak{G}_1$ auf $\mathfrak{G}_2$ erweitern.*

Beweis. Da nach Satz 3 jedes Element A von $\mathfrak{G}_1$ als Produkt $a_1 \ldots a_s$ von Elementen aus N_1 geschrieben werden kann, muss für jede isomorphe Abbildung Φ von $\mathfrak{G}_1$ auf $\mathfrak{G}_2$, die eine Erweiterung von φ ist,

$$\Phi(A) = \Phi(a_1) \ldots \Phi(a_s) = \varphi(a_1) \ldots \varphi(a_s) \tag{3.2}$$

gelten. Hieraus geht hervor, dass φ höchstens eine solche Erweiterung zulässt. Andererseits ist durch (3.2) tatsächlich eine Abbildung der verlangten Art gegeben. Ist nämlich $b_1 \ldots b_t$ eine zweite Produktdarstellung von A, also

$$A = a_1 \ldots a_s = b_1 \ldots b_t ,$$

so gilt $s \equiv t \pmod{n}$ nach Satz 3. Es gibt daher ein nicht-negatives ganzes u derart, dass $s+u \equiv t+u \equiv 1 \pmod{n}$. Wählt man nun beliebige Elemente $c_1, \ldots, c_u$ aus N_1, so hat die in $\mathfrak{G}_1$ gültige Gleichung

$$a_1 \dots a_s c_1 \dots c_u = b_1 \dots b_t c_1 \dots c_u$$

einen Sinn in N_1. Folglich gilt in N_2

$$\varphi(a_1) \dots \varphi(a_s) \varphi(c_1) \dots \varphi(c_u) = \varphi(b_1) \dots \varphi(b_t) \varphi(c_1) \dots \varphi(c_u)$$

und daher in $\mathfrak{G}_2$

$$\varphi(a_1) \dots \varphi(a_s) = \varphi(b_1) \dots \varphi(b_t) ,$$

sodass die rechte Seite von (3.2) von der Darstellung von A unabhängig ist. Durch Vertauschung der Rollen von $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ ergibt sich, dass (3.2) eine eineindeutige Abbildung von $\mathfrak{G}_1$ auf $\mathfrak{G}_2$ definiert. Dass sie ein Erweiterungsisomorphismus von φ ist, ist klar.

Der einfacheren Ausdrucksweise halber kann man sich die beiden n-Gruppen in Satz 3 identifiziert denken, und die obigen Resultate können kurz so zusammengefasst werden:

Jede n-Gruppe N besitzt eine und nur eine umschriebene Gruppe, die in folgender Weise erhalten werden kann: Man bilde die Halbgruppe, die aus allen »Worten«, d. h. formalen Produkten von je endlich vielen Elementen, aus N besteht und benutze als Relationen alle die Gleichungen, die der $(n+1)$-Komposition in N gemäss zwischen den Elementen von N bestehen.

Die der n-Gruppe N umschriebene Gruppe wird im folgenden mit $\mathfrak{U}(N)$ bezeichnet. Der Normalteiler N^n von $\mathfrak{U}(N)$ soll die *Hauptgruppe* von N heissen und mit $\mathfrak{H}(N)$ bezeichnet werden. Für $n = 1$, wenn also N eine gewöhnliche Gruppe ist, gilt $N = \mathfrak{H}(N) = \mathfrak{U}(N)$.

4. Einige Sätze über n-Gruppen und ihre umschriebenen Gruppen. Mit Hilfe der umschriebenen Gruppe lassen sich leicht Eigenschaften der n-Gruppen herleiten. Als Beispiel werde die schon in der Einleitung behauptete Eindeutigkeit der Division bewiesen (die allerdings auch mühelos direkt aus der Definition der n-Gruppe gefolgert werden könnte). Es gilt

Satz 6. *Für beliebige Elemente $a_1, \dots, a_{n+1}, a$ einer n-Gruppe N und jedes $i = 1, \dots, n+1$ hat die Gleichung*

$$a_1 \dots a_{i-1} x a_{i+1} \dots a_{n+1} = a \tag{4.1}$$

eine und nur eine Lösung x in N.

Beweis. In $\mathfrak{U}(N)$ hat die Gleichung jedenfalls genau eine Lösung x. Gehört diese zur Nebenklasse N^t von N^n, so folgt aus (4.1) und Satz 3, dass $n+t \equiv 1 \pmod{n}$ sein muss, und daher ist $N^t = N$.

Die beiden folgenden Sätze betreffen n-Untergruppen von n-Gruppen.

Satz 7. *Eine Teilmenge N_1 einer n-Gruppe N ist dann (und natürlich nur dann) n-Untergruppe von N, wenn die Gleichungen*

$$a_1 \ldots a_n x = a, \quad y a_2 \ldots a_n = a$$

für beliebige Elemente $a_1, \ldots, a_{n+1}$, a aus N_1 in N_1 lösbar sind.

Beweis. N_1 ist ein Teilkomplex der Gruppe $\mathfrak{U}(N)$, der die Voraussetzung von Satz 1 erfüllt. Er ist daher nach diesem Satz n-Untergruppe von $\mathfrak{U}(N)$, also wegen $N_1 \subseteqq N$ von N.

Satz 8. *Ist N_1 eine (eigentliche) n-Untergruppe der n-Gruppe N, so lassen sich die Gruppen $\mathfrak{U}(N_1)$ und $\mathfrak{H}(N_1)$ als (eigentliche) Untergruppen von $\mathfrak{U}(N)$ bzw. $\mathfrak{H}(N)$ darstellen.*

Beweis. Wir beweisen, dass N_1 der Untergruppe $\{N_1\}$ von $\mathfrak{U}(N)$ eingeschrieben ist. N_1 ist jedenfalls n-Untergruppe von $\{N_1\}$. Nach Definition 3 bleibt zu zeigen, dass ${N_1}^n$ den Index n in $\{N_1\}$ hat. Sei $r|n$ dieser Index. Dann ist ${N_1}^n \subseteqq N^n$ und ${N_1}^r \subseteqq N^r$, folglich $N^r = N^n$, da die Nebenklasse N^r wegen ${N_1}^r = {N_1}^n$ einen nicht-leeren Durchschnitt mit der Untergruppe N^n hat. Nun hat N^n den Index n in $\mathfrak{U}(N)$. Es muss also $n|r$ und daher $r = n$ gelten. Damit ist gezeigt, dass $\mathfrak{U}(N_1) = \{N_1\}$ ist, und es folgt unmittelbar $\mathfrak{H}(N_1) = {N_1}^n \subseteqq N^n = \mathfrak{H}(N)$.

Ist N_1 eigentliche Teilmenge von N, so gilt wie leicht zu sehen dasselbe von $\mathfrak{H}(N_1) = {N_1}^n$ und $\mathfrak{H}(N) = N^n$ sowie von $\mathfrak{U}(N_1) = \{N_1\}$ und $\mathfrak{U}(N) = \{N\}$.

Als unmittelbare Folge dieses Satzes ergibt sich: *Hat die n-Gruppe N endliche Ordnung h, so ist die Ordnung jeder n-Untergruppe N_1 von N ein Teiler von h.* Die Ordnungen der beiden n-Gruppen stimmen nämlich mit denen ihrer Hauptgruppen überein.

Ist die umschriebene Gruppe $\mathfrak{U}(N)$ einer n-Gruppe abelsch, so ist sie selbst natürlich auch abelsch. Es gilt aber auch:

Satz 9. *Ist die n-Gruppe N abelsch, so gilt dasselbe für ihre umschriebene Gruppe $\mathfrak{U}(N)$.*

Beweis. Für je zwei Elemente a und b von N gilt in N mit beliebigem $c \in N$

$$abc^{n-1} = bac^{n-1},$$

also $ab = ba$ in $\mathfrak{U}(N)$, woraus wegen $\mathfrak{U}(N) = \{N\}$ die Behauptung folgt.

5. Ableitbarkeit und Echtheit von n-Gruppen. Es sei N eine n-Gruppe, die aus der r-Gruppe R abgeleitet ist. Für die Komposition in $\mathfrak{U}(N)$ (und damit in N) wird die übliche Bezeichnungsweise beibehalten, während für die Komposition in $\mathfrak{U}(R)$ (und R) im Folgenden das Zeichen $\circ$ verwendet und Exponenten eingeklammert werden.

Dem Produkt $a_1 \ldots a_s$ von Elementen aus N werde das entsprechende Produkt $a_1 \circ \ldots \circ a_s$ derselben Elemente aus R zugeordnet. Hierdurch ist eine eindeutige Abbildung Ψ von $\mathfrak{U}(N)$ auf $\mathfrak{U}(R)$ definiert. Denn erstens lässt sich jedes Element von $\mathfrak{U}(N)$ bzw. von $\mathfrak{U}(R)$ als ein solches Produkt darstellen, und zweitens folgt aus $a_1 \ldots a_s = b_1 \ldots b_t$ stets $a_1 \circ \ldots \circ a_s = b_1 \circ \ldots \circ b_t$, da jede Relation zwischen den Elementen von N auch in R gültig ist. Die Abbildung Ψ ist offensichtlich homomorph.

Es sei a ein festes Element von N. Jedes Element der Nebenklasse N^s von N in $\mathfrak{U}(N)$ kann dann auf eine und nur eine Weise in der Form $a^{s-1}x$ mit $x \in N$ geschrieben werden. Dem Element $a^{s-1}x$ entspricht bei Ψ das Element $a^{(s-1)} \circ x$ von $\mathfrak{U}(R)$. Durchläuft nun x die n-Gruppe N, so durchläuft x auch die r-Gruppe R und folglich $a^{(s-1)} \circ x$ die Nebenklasse $R^{(s)}$ von $R^{(r)}$ in $\mathfrak{U}(R)$ genau einmal. Durch Ψ wird also N^s eineindeutig auf $R^{(s)}$ abgebildet. Wegen $R^{(n)} = R^{(r)}$ ergibt sich also für $s = n$ insbesondere, dass die Hauptgruppen $\mathfrak{H}(N)$ und $\mathfrak{H}(R)$ isomorph sind. Ferner sieht man, dass N^s dann und nur dann auf $R^{(r)}$ abgebildet wird, wenn $s \equiv 0 \pmod r$ ist. Da es im Intervall $1 \leqq s \leqq n$ genau $k = n/r$ solche Werte s gibt, muss der Kern des Homomorphismus Ψ die Ordnung k haben. In N^r gibt es genau ein Element C, das bei Ψ in die Einheit von $\mathfrak{H}(R)$ übergeht. Die von C erzeugte zyklische Gruppe $\{C\}$ gehört zum Kern. Nun kann die Ordnung des Elements C nicht kleiner als die Ordnung k seiner Nebenklasse N^r sein. Folglich ist seine Ordnung gleich k, und $\{C\}$ ist der Kern von Ψ.

Es sei a ein beliebiges Element von N. Dann gehört mit C auch aCa^{-1} zu N^r. Andererseits gilt $aCa^{-1} \in \{C\}$, da $\{C\}$ als Kern ein Normalteiler von $\mathfrak{U}(N)$ ist. Nun enthält N^r kein von C verschiedenes Element von $\{C\}$. Wir haben also $aCa^{-1} = C$, das heisst, C ist mit allen Elementen von N und daher auch mit denen von $\mathfrak{U}(N)$ vertauschbar. Das den Kern erzeugende Element C ist somit ein Zentrumselement, das in N^r enthalten ist und die Ordnung k hat.

Die Untergruppe $\{N^r\}$ von $\mathfrak{U}(N)$ besteht aus den Nebenklassen $N^{ru} = C^u N^n$, $1 \leqq u \leqq k$, von $\mathfrak{H}(N)$. Da die Gruppen $\{C\}$ und $\mathfrak{H}(N)$ nur die Einheit gemeinsam haben, ist $\{N^r\}$ das direkte Produkt von $\{C\}$ und $\mathfrak{H}(N)$.

Zusammenfassend können wir also den folgenden Satz formulieren:

Satz 10. *Ist die n-Gruppe N aus der r-Gruppe R abgeleitet, so sind die Hauptgruppen $\mathfrak{H}(N)$ und $\mathfrak{H}(R)$ isomorph, und die umschriebene Gruppe $\mathfrak{U}(R)$ ist homomorphes Bild von $\mathfrak{U}(N)$.*

Dieser Homomorphismus kann so gewählt werden, dass N identisch auf R abgebildet wird, und dann ist der Kern eine zyklische Gruppe $\{C\}$, die von *einem in N^r enthaltenen (eindeutig bestimmten) Zentrumselement C der Ordnung $k = n/r$ erzeugt wird. Die Untergruppe $\{N^r\}$ von $\mathfrak{U}(N)$ ist direktes Produkt von $\{C\}$ und der Hauptgruppe $\mathfrak{H}(N)$. Die Komposition in R ist aus der in N durch $a_1\circ\ldots\circ a_{r+1} = a_1\ldots a_{r+1}C^{k-1}$ bestimmt.*

Als Spezialfall sei erwähnt: Ist die n-Gruppe N aus einer 1-Gruppe R abgeleitet, so ist diese der Hauptgruppe $\mathfrak{H}(N)$ isomorph, und $\mathfrak{U}(N)$ ist das direkte Produkt von $\mathfrak{H}(N)$ mit einer zyklischen Gruppe der Ordnung n.

Es werde nun umgekehrt von der n-Gruppe N vorausgesetzt, dass N^r für ein $r|n$ ein Zentrumselement C der Ordnung $k = n/r$ von $\mathfrak{U}(N)$ enthält. Es soll gezeigt werden, dass N aus einer r-Gruppe abgeleitet werden kann. Sind $a_1, a_2, \ldots$ beliebige Elemente von N, so wird durch

$$a_1\circ\ldots\circ a_{r+1} = a_1\ldots a_{r+1}C^{k-1}$$

eine $(r+1)$-Komposition in N definiert. Das assoziative Gesetz

$$(a_1\circ\ldots\circ a_{r+1})\circ a_{r+2}\circ\ldots\circ a_{2r+1} = a_1\circ\ldots\circ a_i\circ(a_{i+1}\circ\ldots\circ a_{i+r+1})\circ a_{i+r+2}\circ\ldots\circ a_{2r+1}$$

ist offensichtlich gültig, da beide Seiten gleich $a_1\ldots a_{2r+1}C^{2k-2}$ sind. Mit dieser Komposition bilden also die Elemente von N eine r-Halbgruppe R. Aus dieser ist N ableitbar; denn da C die Ordnung k hat, ist

$$a_1\circ\ldots\circ a_{n+1} = a_1\ldots a_{n+1}C^{k(k-1)} = a_1\ldots a_{n+1}\,.$$

Nach einer in Abschnitt 1 gemachten Bemerkung ist R als r-Halbgruppe, aus der eine n-Gruppe ableitbar ist, eine r-Gruppe. Der nach Satz 10 durch N und R bestimmte Homomorphismus, bei welchem jedes Element von N sich selbst entspricht, hat offenbar den Kern $\{C\}$.

Zusammen mit Satz 10 ergibt dies:

SATZ 11. *Eine n-Gruppe N ist dann und nur dann aus einer r-Gruppe ableitbar, wenn N^r ein Zentrumselement der Ordnung n/r von $\mathfrak{U}(N)$ enthält.*

Es besteht eine eineindeutige Beziehung zwischen den r-Gruppen, aus denen N abgeleitet werden kann, und den in N^r enthaltenen Zentrumselementen der Ordnung n/r von $\mathfrak{U}(N)$.

Hieraus ergibt sich unmittelbar als Kriterium für die Echtheit einer n-Gruppe:

Eine n-Gruppe N ist dann und nur dann echt, wenn kein von der Einheit verschiedenes Zentrumselement von $\mathfrak{U}(N)$ die Ordnung seiner Nebenklasse bezüglich $\mathfrak{H}(N)$ besitzt.

Dass diese Bedingung hinreicht, ist klar. Die Notwendigkeit folgt so: Ist $C \in N^s$ ein von der Einheit verschiedenes Zentrumselement, das dieselbe Ordnung wie N^s hat, so hat $C^t \in N^{st}$ für jedes ganze t dieselbe Ordnung wie N^{st}. Bezeichnet man den grössten gemeinsamen Teiler von s

und n mit r und bestimmt t so, dass $st \equiv r \pmod{n}$ gilt, so genügt $C^t \in N^r$ den Voraussetzungen von Satz 11.

Äquivalent mit der soeben begründeten ist die Forderung, dass $\mathfrak{H}(N)$ *alle Elemente von Primzahlordnung des Zentrums von* $\mathfrak{U}(N)$ *enthält.* Denn ist ein Zentrumselement C der Primzahlordnung p in einer Nebenklasse N^t enthalten, so muss die Ordnung dieser Nebenklasse als Teiler von p entweder gleich 1 sein, und dann ist $N^t = \mathfrak{H}(N)$, oder sie muss gleich p und damit gleich der Ordnung von C sein. Ist umgekehrt ein Zentrumselement C in N^r, $1 \leqq r < n$, $r|n$, enthalten und hat die Ordnung $k = n/r > 1$, so hat für eine Primzahl $p|k$ das Element $C^{k/p}$ die Ordnung p seiner Nebenklasse.

Eine n-Gruppe kann aus mehreren, nicht-isomorphen r-Gruppen ableitbar sein. Dies zeigt folgendes Beispiel. In der abelschen Gruppe der Ordnung 8, die von den Elementen a und b mit den Relationen $a^4 = 1$, $b^2 = 1$ und $ab = ba$ erzeugt wird, bilden $1, b$ einen Normalteiler mit zyklischer Faktorgruppe der Ordnung 4. Die Nebenklasse a, ab, die mit N bezeichnet werde, ist folglich eine 4-Gruppe. Die Nebenklasse N^2 besteht aus den Elementen a^2 und a^2b, die beide die Ordnung 2 haben und daher als Elemente C im Sinne des Satzes 10 in Betracht kommen. Folglich kann N aus zwei 2-Gruppen abgeleitet werden. Die $C = a^2$ entsprechende hat die Vierergruppe als umschriebene Gruppe und ist aus der Gruppe der Ordnung 2 ableitbar, während die $C = a^2b$ entsprechende der zyklischen Gruppe der Ordnung 4 eingeschrieben und echt ist.

Für abelsche Gruppen lassen sich die obigen Resultate zum Teil in naheliegender Weise etwas vereinfachen oder verschärfen.

Ferner werde bemerkt, dass eine aus einer abelschen r-Gruppe abgeleitete n-Gruppe natürlich abelsch ist. Ist umgekehrt eine n-Gruppe N abelsch, so ist jede r-Gruppe R, aus der sie abgeleitet werden kann, ebenfalls abelsch. Denn nach Satz 9 ist die Gruppe $\mathfrak{U}(N)$ abelsch, und dasselbe gilt dann auch für ihr homomorphes Bild $\mathfrak{U}(R)$ und damit für R.

Eine ableitbare n-Gruppe kann echte n-Untergruppen enthalten. Andererseits kann eine echte n-Gruppe N auch eine ableitbare n-Untergruppe N_1 besitzen; denn ein Zentrumselement von $\mathfrak{U}(N_1)$ braucht nicht Zentrumselement der nach Satz 8 umfassenderen Gruppe $\mathfrak{U}(N)$ zu sein. Dies sieht man bereits am Beispiel der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_3$. Die drei Elemente der Ordnung 2 bilden zusammen eine echte 2-Gruppe, während jedes dieser Elemente für sich eine ableitbare 2-Gruppe bildet. Für abelsche n-Gruppen gilt jedoch:

Ist die abelsche n-Gruppe N echt, so ist jede n-Untergruppe N_1 von N echt.

Nach Satz 8 hat man nämlich $N_1{}^r \subseteqq N^r$, $1 \leqq r \leqq n$, wenn man in $\mathfrak{U}(N)$

rechnet, und enthält N^r kein Element der Ordnung n/r, so gilt dasselbe für N_1^r.

LITERATUR

1. W. Dörnte, *Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff,* Math. Z. 29 (1929), 1–19.
2. H. Tvermoes, *Om en Generalisation af Gruppebegrebet,* København, 1952.

ORDRUP GYMNASIUM, CHARLOTTENLUND, DÄNEMARK