MATH. SCAND. 1 (1953)

KAPAZITÄTSBEZIEHUNGEN BEI KONFORMER ABBILDUNG VON EINSCHNITTGEBIETEN

GUNNAR AF HÄLLSTRÖM

1. Es bezeichne D ein Einschnittgebiet, das aus dem Kreis $E: |w| < 1$ durch eine endliche oder abzählbare Menge radialer, von der Peripherie ins Innere gehender Schnitte hervorgeht und die Bedingungen erfüllt, dass erstens auf den Einschnitten $0 < \inf |w| = W < 1$ gilt und zweitens erreichbare Randpunkte von D überall dicht auf $|w| = 1$ liegen. Durch $w = w(z)$ sei der Kreis $F: |z| < 1$ konform so auf D bezogen, dass $w(0) = 0$ ist.

Über solche Abbildungen bewies Verf. [3], [4]: Die Urbilder auf $|z| = 1$ der Punkte auf $|w| = 1$ (einschliesslich solcher Primenden k'' zweiter Art (vgl. [1]), die einen Peripheriepunkt enthalten) bilden eine reduzierte (d. h. mit ihrem transfiniten Kern identische) Menge $\varkappa$. Je nachdem die den Primenden k'' entsprechende Teilmenge $\varkappa''$ von verschwindender oder positiver Kapazität ist, wird das Einschnittgebiet D als *dünn* oder *dicht* bezeichnet. Die Greensche Funktion $G(z)$ der Menge $\varkappa$ (mit Pol ∞) ist dann *im dünnen Falle*

$$G(z) = \tfrac{1}{2} \ln |z/w| \,, \tag{1}$$

während *im dichten Falle*

$$G(z) = \tfrac{1}{2} \ln |z/w| - \psi(z) \tag{2}$$

gilt, wobei ψ eine überall ausserhalb $\varkappa$ positiv-harmonische Funktion ist, die auf $\varkappa' = \varkappa - \varkappa''$ verschwindet.

Zu einer vorgegebenen abgeschlossenen, reduzierten Menge $\varkappa$ auf $|z| = 1$ kann man immer ein bis auf Drehungen eindeutig bestimmtes zugehöriges dünnes Einschnittgebiet D konstruieren. Unter gewissen Zusatzbedingungen lassen sich zu $\varkappa$ auch dichte Einschnittgebiete konstruieren; hierbei gibt es aber unendlich viele unter einander inkongruente Lösungen.

Eingegangen am 25. Februar 1953.

Es sei γ die *Robinkonstante* von $\varkappa$, also

$$C = e^{-\gamma} \tag{3}$$

die *Kapazität* von $\varkappa$. Zweck der folgenden Zeilen ist es, Beziehungen zwischen den Grössen C, $|w'(0)|$ und W zu ermitteln.

2. Beachtet man die Gleichung (vgl. z. B. [5] S. 117 und 130)

$$G(z) = \gamma + \int_{\varkappa} \ln |z-\zeta| \, d\mu(\zeta) \tag{4}$$

(μ = Gleichgewichtsbelegung der Gesamtgrösse 1), so findet man $G(0) = \gamma$ und wegen (1), (2), (3) und $\psi(0) > 0$

SATZ 1. *Es gilt*

$$\gamma \leqq -\tfrac{1}{2} \ln |w'(0)| \, , \qquad |w'(0)| \leqq C^2$$

mit Gleichheit im dünnen und Ungleichheit im dichten Falle.

3. Unter den betrachteten Funktionen $w(z)$ bezeichnen wir diejenige, $w_1(z)$, als Extremalfunktion, welche F auf den von -1 bis $-W$ aufgeschnittenen Einheitskreis (Extremalgebiet D_1) abbildet. Es gilt, wie leicht zu bestätigen ist,

$$\frac{1-z}{1+z} = \frac{W^{1/2}(1-w_1)}{\big((w_1+W)(1+Ww_1)\big)^{1/2}}, \tag{5}$$

$$w_1'(0) = 4W/(1+W)^2 \, . \tag{6}$$

Ersetzt man in (5) z, w_1, W durch z^n, $w_n^{\,n}$, W^n ($n = 2, 3, 4, \ldots$), so erhält man eine Abbildung jedes Sektors $|z| < 1$, $2\pi(\nu-1)/n < \arg z \leqq 2\pi\nu/n$ auf einen ebensolchen Sektor der w_n-Ebene, jedoch mit einem Einschnitt der Länge $1-W$ beim Mittelargument. Im ganzen wird dann der Kreis F durch die entsprechende, durch

$$\frac{1-z^n}{1+z^n} = \frac{W^{n/2}(1-w_n^{\,n})}{\big((w_n^{\,n}+W^n)(1+W^n w_n^{\,n})\big)^{1/2}}$$

definierte Funktion $w_n(z)$ auf ein Einschnittgebiet D_n mit n Einschnitten der Länge $1-W$ konform abgebildet. Da

$$\lim_{z\to 0}(w_n^{\,n}/z^n) = 4W^n/(1+W^n)^2$$

gemäss (6) gilt, erhält man bei der Normierung $w_n(1) = 1$ die Nullpunktsableitung $w_n'(0) = W\big(4/(1+W^n)^2\big)^{1/n}$. Wesentlich für unsere Zwecke ist die Relation

$$\lim_{n\to\infty} w_n'(0) = W \, . \tag{7}$$

4. Satz 2. *Es ist*

$$W < |w'(0)| \leqq 4W/(1+W)^2 , \tag{8}$$

und die Grenzen sind die bestmöglichen.

Beweis. Wäre die rechts stehende Ungleichung falsch, so hätte man nach (6) $|w'(0)| > |w_1'(0)|$. D. h. für genügend kleines r verliefe das w-Bild $\Gamma(r)$ von $|z| = r$ ausserhalb des w_1-Bildes $\Gamma_1(r)$ von $|z| = r$. Der Rand von D ist eine abgeschlossene Punktmenge und enthält somit einen Punkt $We^{i\varphi}$, wo $|w|$ den Wert $W = \inf |w|$ hat. Die Strecke von $e^{i\varphi}$ bis $We^{i\varphi}$ ist dann ein Einschnitt oder eine Häufungsstrecke von Einschnitten, jedenfalls eine Randkomponente. Durch Drehung kann man also erreichen, dass die Strecke $(-1, -W)$ der Berandung von D angehört. Dann wäre das Ringgebiet g zwischen $\Gamma(r)$ und dem Rand von D echter Teil des Ringgebiets g_1 zwischen $\Gamma_1(r)$ und dem D_1-Rand. Dabei müsste der Modul von g kleiner als der Modul von g_1 sein ([6] S. 8 bzw. 626), was sich nicht damit verträgt, dass g und g_1 beide konforme Bilder von $r < |z| < 1$ sind.

Um die linke Ungleichung (8) zu beweisen, beachten wir, dass D sicher innere Punkte mit $|w| > W$ enthält, so dass $|w| < W$ echtes Teilgebiet von D ist; ebenso ist das z-Bild F_W von $|w| < W$ echtes Teilgebiet von F. Ist $z(w)$ die Umkehrfunktion von $w(z)$, so bildet somit $z(Ww)$ den w-Einheitskreis auf ein echtes Teilgebiet von F konform ab. Nach dem Schwarzschen Lemma [2], [5] ist dann $|Wz'(0)| < 1$, woraus die Behauptung folgt.

Dass in (8) die obere Schranke scharf ist, zeigt $w_1(z)$. In bezug auf die untere Schranke tut $w_n(z)$ wegen (7) denselben Dienst.

Zusatz: Für das Bestehen von Satz 2 wäre natürlich $(|z|< W) \subset D \subseteq D_1$ hinreichend; dass es sich um ein Einschnittgebiet handelt, ist also hier unwesentlich.

Die Kombination der Sätze 1 und 2 ergibt

Satz 3. *Es gilt immer $C > W^{1/2}$ und im Falle eines dünnen Einschnittgebiets überdies $C \leqq 2W^{1/2}/(1+W)$.*

5. Dass die einschränkende Bedingung der letzteren Ungleichung in Satz 3 wesentlich ist, zeigt

Satz 4. *Wie auch W im Intervall $0 < W < 1$ gegeben ist, und wie klein auch $\varepsilon > 0$ gewählt ist, kann man dichte Einschnittgebiete konstruieren, für welche $C > 1-\varepsilon$ gilt.*

Beweis. Auf $|w| = 1$ konstruieren wir eine Cantorsche Menge in folgender Weise. Es sei (p_n) eine Folge von Zahlen > 1 mit endlichem Produkt $\Pi_{n=0}^{\infty} p_n = P$. Die Folge kann natürlich so gewählt werden, dass $P-1 > 0$ beliebig klein ausfällt. Nun sei L_0 ein Bogen der Länge $2\pi/p_0$, allgemein L_n die Restmenge, wenn von jedem L_{n-1} ausmachenden Bogen aus der Mitte ein solches Stück entfernt wird, dass $1/p_n$ von L_{n-1} zurückbleibt. Der Durchschnitt $\bigcap L_n$ ist die gesuchte Cantorsche Menge vom (äusseren) Mass $2\pi/P$. Von jedem Endpunkt jedes Komplementärintervalles aus lege man einen radialen Einschnitt konstanter Länge $L = 1-W$. Von dem so entstandenen Gebiet D bewies Verf. in [3] (Nr. 6c, wo die Annahme $L = W = \frac{1}{2}$ belanglos ist), dass das harmonische Mass von $\varkappa''$ in bezug auf F im Nullpunkt $> 1/P$ ausfällt. Da das harmonische Mass in bezug auf einen Kreis im Mittelpunkt gleich dem durch 2π dividierten Winkelmass der betreffenden Punktmenge auf der Peripherie ist ([2] S. 156, [5]), hat man für $\varkappa''$ und a fortiori für $\varkappa$ ein lineares Mass $> 2\pi/P$.

Für gegebenes W kann also ein (dichtes) D so konstruiert werden, dass das Längenmass von $\varkappa$ sich beliebig wenig von 2π unterscheidet. Der Beweis ist erbracht, falls wir noch zeigen, dass die Robinsche Konstante dadurch auch beliebig nahe an 0 gebracht wird.

Ist m eine beliebige Einheitsbelegung auf $\varkappa$ und $u(z) = -\int_{\varkappa} \ln|z-\zeta|\, dm(\zeta)$ das zugehörige Potential, so ist ([5] S. 125) $\gamma \leqq K = \sup_{z\in\varkappa} u(z)$. Ist nun s das Längenmass von $\varkappa$, so wählen wir m für jede messbare Teilmenge gleich dem durch s dividierten Längenmass dieser Teilmenge. Hierbei wird $u(z)$ nicht kleiner, wenn Teile von $\varkappa$ näher an z rücken. Somit ist K für gegebenes z maximal, gleich $K_0(s)$, wenn z Mittelpunkt eines Bogens der Länge s ist. Offensichtlich ist

$$K_0(s) = -\frac{2}{s}\int_0^{s/2} \ln\left(2\sin\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi$$

eine stetige Funktion von s, die für $s = 2\pi$ das Potential der gleichmässig verteilten Einheitsbelegung auf dem Einheitskreis in einem Punkt desselben angibt. Dieses Potential ist aber 0 (vgl. (4)). Aus $0 < \gamma \leqq K_0(s)$ und $\lim_{s\to 2\pi} K_0(s) = 0$ folgt nun unsere Behauptung.

6. Von gleicher Natur wie Satz 4 ist die folgende Aussage:

Satz 5. *Es sei $\varkappa$ eine solche reduzierte Menge auf $|z| = 1$, welcher auch dichte Einschnittgebiete entsprechen. Die zu diesen gehörigen Zahlen W fallen dann alle ins Intervall $0 < W < W_0$, und umgekehrt kann zu jedem W dieses Intervalles ein zu $\varkappa$ gehöriges dichtes Einschnittgebiet konstruiert werden. Hierbei bedeutet W_0 den W-Wert des $\varkappa$ entsprechenden dünnen Einschnittgebietes.*

Beweis. Es sei $w_0(z)$ die dem dünnen Gebiet entsprechende Abbildungsfunktion, $w^*(z)$ eine zu einem dichten Gebiet gehörige. Gemäss (1) und (2) gilt dann

$$\ln |w_0(z)| = \ln |z| - 2G(z) , \qquad \ln |w^*(z)| = \ln |z| - 2G(z) - 2\psi^*(z) ,$$

wo ψ^* eine geeignete, ausserhalb $\varkappa$ positive, beschränkte harmonische Funktion ist. Nach dem, was in [4] bewiesen wurde, kann man zu beliebigem positivem k ein zu $\varkappa$ gehöriges dichtes Einschnittgebiet finden, dessen Abbildungsfunktion $w(z)$ der Gleichung

$$\ln |w(z)| = \ln |z| - 2G(z) - 2k\psi^*(z)$$

genügt. Für das zugehörige $W = W_k$ gilt definitionsgemäss

$$\ln W_k = -2 \limsup_{|z|\to 1} \big(G(z) + k\psi^*(z)\big) ,$$

und zu dem dünnen Gebiet gehört ebenso $W = W_0$ mit

$$\ln W_0 = -2 \limsup_{|z|\to 1} G(z) .$$

Natürlich nimmt lim sup $(G + k\psi^*)$ nicht ab, wenn k wächst. Für positives Δk ist

$$\limsup \big(G + (k + \Delta k)\psi^*\big) \leqq \limsup (G + k\psi^*) + \limsup(\Delta k\, \psi^*).$$

Wegen $0 < R = \sup \psi^*(z) < \infty$ ist somit der lim sup, und daher W_k, eine stetige Funktion von k. Weil R Grenzwert von ψ^* auf $\varkappa$ ist, gilt $\lim_{k\to\infty} W_k = 0$. Andererseits ist wegen der Stetigkeit $\lim_{k\to 0} W_k = W_0$.

Somit erfüllen die Zahlen W_k das Intervall $(0, W_0)$ lückenlos, und unser Beweis ist erbracht, wenn wir noch zeigen, dass $W_k < W_0$ für $k > 0$.

Setzen wir $\max_{|z|=2} G(z) = H$, $\min_{|z|=2} \psi^*(z) = h > 0$, so gilt

$$\psi^*(z) \geqq \frac{h}{H} G(z) \tag{9}$$

sowohl auf $|z| = 2$ als auf $\varkappa$, höchstens mit Ausnahme der harmonischen Nullmenge der in bezug auf die Greensche Funktion irregulären Punkte von $\varkappa$. Nach dem Maximumprinzip[1] gilt dann (9) im Zwischengebiet, so dass

$$\limsup_{|z|\to 1} (G + k\psi^*) \geqq \limsup_{|z|\to 1} \left(1 + \frac{kh}{H}\right) G$$

ist. Daraus folgt $W_k < W_0$.

[1] Vgl. z. B. R. Nevanlinna [5], S. 134, wo freilich nur eine *abgeschlossene* Ausnahmemenge α der Kapazität 0 betrachtet wird. Diese Einschränkung ist jedoch unwesentlich; denn ist α eine beliebige Nullmenge, und gilt für die harmonische Funktion u in den übrigen Randpunkten $\limsup u(z) \leqq M$, so ist jedenfalls die Teilmenge von α mit $\limsup u(z) \geqq M + \varepsilon$ eine abgeschlossene Nullmenge, und somit $u(z) \leqq M + \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$.

LITERATUR

1. C. Carathéodory, *Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete*, Math. Ann. 73 (1913), 323–370.
2. C. Carathéodory, *Funktionentheorie* I, Basel, 1950.
3. G. af Hällström, *On the conformal mapping of incision domains*, Soc. Sci. Fenn., Comm. phys.-math. XVI: 13 (1952).
4. G. af Hällström, *Eine Bemerkung über Einschnittgebiete*, Acta Acad. Aboensis, math. et phys. XVIII: 6 (1952).
5. R. Nevanlinna, *Eindeutige analytische Funktionen*, Berlin, 1936.
6. O. Teichmüller, *Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildung*, Deutsche Math. 3 (1938), 621—678.

ÅBO AKADEMI, FINNLAND