MATH. SCAND. 1 (1953)

EINE BEMERKUNG ÜBER DIE ANWENDUNG HYPERBOLISCHER MASSBESTIMMUNGEN IN DER WERTVERTEILUNGSLEHRE DER MEROMORPHEN FUNKTIONEN

K. I. VIRTANEN

Die neuere Theorie der meromorphen Funktionen, die sich auf die beiden Hauptsätze von R. Nevanlinna gründet, hat nun einen Standpunkt erreicht, der es ermöglicht, die erzielten Resultate einheitlich zusammenzufassen. Es dürfte von Interesse sein, den wesentlichen Inhalt dieser Theorie auch dem Anfänger leicht zugänglich zu machen.

In Gesprächen mit Herrn R. Nevanlinna wurden gewisse die Beweisanordnung des zweiten Hauptsatzes betreffende Gesichtspunkte berührt, die in der zweiten Auflage seiner Monographie [2] Berücksichtigung finden sollen. Es erscheint zweckmässig, einige Bemerkungen hierüber, die mit der schönen Beweismethode von F. Nevanlinna [1] in engstem Zusammenhang stehen, zu veröffentlichen. Das genannte Buch [2] enthält ein vollständiges Literaturverzeichnis, wo u. a. Untersuchungen von Ahlfors, Frostman und Lehto, die ich hier benutzt habe, genannt sind.

1. Die Dichte derjenigen Stellen $z_\varkappa$, in denen eine im Kreise $|z| < R$ meromorphe Funktion $w(z)$ einen gegebenen Wert a annimmt, wird in der Nevanlinnaschen Theorie mit Hilfe der sogenannten Anzahlfunktion $N(r, a)$ gemessen. Um diese Funktion zu definieren, betrachten wir die Riemannsche Fläche F_r, auf welche die Kreisfläche $|z| < r$ $(< R)$ durch die Funktion $w(z)$ abgebildet wird. Auf der Fläche F_r ist $\log(r/|z(w)|)$ eine Greensche Funktion mit dem Pol in $w = w(0)$, $z = 0$. Wir addieren die Werte $\log(r/|z_\varkappa(a)|)$, welche diese Funktion in den über $w = a$ gelegenen Punkten der Fläche F_r annimmt (wobei ein Windungspunkt n-ter Ordnung $n+1$ mal mitgezählt wird) und setzen

$$N(r, a) = \sum \log \frac{r}{|z_\varkappa(a)|}.$$

Aus der Definition geht unmittelbar hervor, dass $N(r, a)$ eine stetige

Eingegangen am 2. Mai 1953.

subharmonische Funktion von a ist, der Punkt $a = w(0)$, wo sie wie $-\log |a-w(0)|$ unendlich wird, ausgenommen.

Um die Dichte der a-Stellen von $w(z)$ zu messen, gilt es, das Anwachsen der für $r \to R$ monoton zunehmenden Funktion $N(r, a)$ zu untersuchen. Hierzu wird zunächst eine von a unabhängige Vergleichsfunktion (charakteristische Funktion), nämlich der Mittelwert

$$T_\mu(r) = \int_{(a)} N(r, a) d\mu(a) \tag{1}$$

gebildet, wo μ eine geeignete, über die a-Ebene verteilte Einheitsmasse ist. Aus dem subharmonischen Charakter von $N(r, a)$ folgt, dass das Anwachsen von $T_\mu(r)$ nur wenig davon abhängt, wie man die Belegung μ wählt, falls diese nur gewissen Stetigkeitsbedingungen genügt. Um bekannte Formeln benutzen zu können, setzen wir

$$d\mu = d\mu_0 = \frac{dudv}{\pi(1+|a|^2)^2} \qquad (a = u+iv) .$$

Die rechte Seite der Gleichung (1) lässt sich dann partiell integrieren, und man erhält so den *ersten Hauptsatz* in der Form

$$T(r) = N(r, a) + \frac{1}{2\pi} \int_C \log \frac{(1+|w|^2)^{1/2}(1+|a|^2)^{1/2}}{|w-a|} d\varphi(w) - \log \frac{(1+|w(0)|^2)^{1/2}(1+|a|^2)^{1/2}}{|w(0)-a|} \tag{2}$$

wo $T(r) = T_{\mu_0}(r)$ ist, C die Projektion des Randes der Fläche F_r auf die w-Ebene bezeichnet und φ eine Massenbelegung auf C vom Gesamtbetrag 2π ist (nämlich diejenige, für welche $d\varphi$ bei der Abbildung von F_r auf die Kreisfläche $|z| < r$ in $d \arg z$ übergeht).

2. Wir nehmen nun an, dass die charakteristische Funktion $T(r)$ für $r \to R$ gegen unendlich strebt. Man könnte allein aus der Tatsache, dass die Anzahlfunktion subharmonisch ist, darauf schliessen, dass $N(r, a)$ dann für die meisten Werte von a mit annähernd derselben Geschwindigkeit wie $T(r)$ wächst. Die harmonischen Nullmengen würden aber eine Ausnahme bilden; aus dem Verhalten von $N(r, a)$ in einer solchen Menge kann man nämlich keine Schlüsse über den durch $T(r)$ bestimmten Mittelwert von $N(r, a)$ ziehen, wenn man nur die Subharmonizität von $N(r, a)$ heranzieht. Es ist aber möglich, viel schärfere Aussagen über das asymptotische Verhalten von $N(r, a)$ zu gewinnen. Eine solche ist der *zweite Hauptsatz*, der besagt, dass das Anwachsen von $T(r)$ schon von dem von $N(r, a)$

für endlich viele (mindestens drei) Werte $a_1, \ldots, a_q$ $(\neq w(0))$ abhängig ist. Dies kann auch so gedeutet werden: Das Integral auf der rechten Seite von (1) unterscheidet sich unter gewissen Voraussetzungen nicht sehr viel von $T(r)$, wenn $\mu(a)$ eine in den Punkten $a_1, \ldots, a_q$ konzentrierte Einheitsmasse ist.

Im Hinblick auf die obigen Bemerkungen liegt es nun nahe, die Belegung μ in (1) so zu wählen, dass ihre Dichte in der Nähe der Punkte $a_1, \ldots, a_q$ gross wird, sonst aber so regulär ist, dass $T_\mu(r)$ für $r \to R$ ebenso schnell wächst wie die mittels der Belegung μ_0 definierte charakteristische Funktion $T(r)$. Dies wird erreicht, wenn wir, dem Gedankengang von F. Nevanlinna folgend, in der in den Punkten $a_1, \ldots, a_q$ punktierten Ebene G_q eine Poincarésche hyperbolische Metrik einführen. Wir setzen also

$$d\mu = d\sigma(a) = \frac{|X'(a)|^2}{(1-|X(a)|^2)^2} dudv, \tag{3}$$

wo $X(a)$ diejenige linear polymorphe Funktion ist, welche die universelle Überlagerunsfläche von G_q konform auf die Kreisfläche $|X| < 1$ abbildet. Für die Gesamtmasse der Belegung σ findet man mit Hilfe des bekannten Satzes über den Flächeninhalt eines Polygons in der hyperbolischen Geometrie den Wert

$$\int_{(a)} d\sigma(a) = \frac{\pi}{2}(q-2). \tag{4}$$

3. Nach dem oben über die Abhängigkeit des Integrals (1) von der Belegung μ Bemerkten ist zu erwarten, dass der mittels der Belegung σ definierte Mittelwert $T_\sigma(r)$ für $r \to R$ ebenso schnell wie $T(r)(q-2)\pi/2$ wächst. Andererseits findet man für $T_\sigma(r)$ eine Abschätzung nach oben, wenn man aus dem Kreis $|z| < R$ diejenigen Punkte $z_\varkappa^{(1)}, \ldots, z_\varkappa^{(q)}$ entfernt, in denen $w(z)$ einen der Werte $a_1, \ldots, a_q$ annimmt, und in der so punktierten Kreisfläche K_q die Poincarésche Metrik einführt. Das Flächenelement dieser Metrik werde mit $d\sigma(z) = \varrho^2(z)dxdy$ bezeichnet $(z = x+iy)$. Da nun die Werte, welche die Funktion $w(z)$ in K_q annimmt, innerhalb G_q liegen, besagt das Prinzip des hyperbolischen Masses, dass die Ungleichung

$$d\sigma(a) \leqq d\sigma(z)$$

für jedes Punktepaar z, $a = w(z)$ gilt. Multipliziert man diese Ungleichung beiderseits mit $\log(r/|z|)$ und integriert die rechte Seite über die Kreisfläche $|z| < r$, die linke Seite über die Bildfläche F_r, so ergibt sich unter Beachtung der Definition von $N(r, a)$ die Ungleichung

$$T_\sigma(r) = \int\limits_{(a)} N(r, a)d\sigma(a) \leqq \int\limits_{|z|<r} \log \frac{r}{|z|} d\sigma(z) \,. \tag{5}$$

Zunächst soll die rechte Seite dieser Ungleichung näher analysiert werden. Zu diesem Zweck bemerke man, dass die Dichte der nicht-euklidischen Belegung σ der Differentialgleichung

$$\varDelta \log \varrho = 4\varrho^2$$

genügt, von den Punkten $z = z_\varkappa^{(\nu)}$, wo $\varrho(z)$ unendlich wird, abgesehen. Um eine Aussage über das Verhalten von $\varrho(z)$ in der Umgebung einer singulären Stelle $z_\varkappa^{(\nu)}$ zu erhalten, braucht man nur zwei extreme Fälle zu betrachten, nämlich erstens den Fall, wo K_q ein in einem einzigen Punkt punktierter Kreis ist, und zweitens den Fall, wo K_q die ganze z-Ebene mit Ausnahme von drei Punkten ist. In beiden Fällen erhält man für $\log \varrho(z)$ die in der Nähe der singulären Stelle $z_k^{(\nu)}$ gültige Entwicklung

$$\log \varrho(z) = \log \frac{1}{|z-z_\varkappa^{(\nu)}|} - \log \log \frac{1}{|z-z_\varkappa^{(\nu)}|} + p(z) \,,$$

wo $p(z)$ in $z = z_\varkappa^{(\nu)}$ beschränkt ist. Aus der Tatsache, dass $\varrho(z)$ bei einer Erweiterung des Gebiets K_q abnimmt, schliesst man auf die allgemeine Gültigkeit der gefundenen Entwicklung.

Wir führen nun die Bezeichnung

$$U(z) = \log \varrho(z) - \sum_{|z_\varkappa^{(\nu)}|<r} \log \frac{|r^2 - \bar{z}_\varkappa^{(\nu)} z|}{r|z-z_\varkappa^{(\nu)}|} \tag{6}$$

ein und erhalten mit Hilfe der Greenschen Formel

$$\int\limits_{|z|<r} \log \frac{r}{|z|} d\sigma(z) = \tfrac{1}{4} \int\limits_0^r \int\limits_0^{2\pi} \log \frac{r}{|z|} \varDelta U(z) |z| d|z| d\varphi = \tfrac{1}{4} \int\limits_{|z|=r} U(z) d\varphi - \frac{\pi}{2} U(0) \,, \tag{7}$$

wo $z = |z|e^{i\varphi}$. Auf $|z| = r$ ist $U(z) = \log \varrho(z)$, und für $U\ (0)$ findet man aus (6) den Wert

$$U(0) = \log \varrho(0) - \sum_{|z_\varkappa^{(\nu)}|<r} \log \frac{r}{|z_\varkappa^{(\nu)}|} . \tag{8}$$

Hier ist

$$\sum_{|z_\varkappa^{(\nu)}|<r} \log \frac{r}{|z_\varkappa^{(\nu)}|} = \sum_{\nu=1}^{q} \overline{N}(r, a_\nu)$$

eine Grösse, die sich von der Summe $\Sigma_{\nu=1}^q N(r, a_\nu)$ nur darin unterscheidet, dass jeder Punkt $z_\varkappa^{(\nu)}$ in $\overline{N}(r, a_\nu)$ nur einmal vorkommt. Mit dieser Bezeichnung erhält man aus (7) und (8)

$$(9)\qquad \int\limits_{|z|<r} \log\frac{r}{|z|}\,d\sigma(z) = \frac{\pi}{2}\sum_{\nu=1}^{q}\overline{N}(r,\ a_\nu)+\tfrac{1}{4}\int\limits_{|z|=r}\log\varrho(z)d\varphi-\frac{\pi}{2}\log\varrho(0)\,.$$

4. Aus (5) und (9) ergibt sich für die Funktion $T_\sigma(r)$ eine Abschätzung nach oben. Es bleibt noch die schon vermutete Tatsache, dass $T_\sigma(r)$ von derselben Grössenordnung wie $T(r)$ ist, streng zu beweisen.

Zu diesem Zweck wähle man zunächst eine beliebige Massenbelegung μ mit der Gesamtmasse M, multipliziere die Gleichung (2) beiderseits mit $d\mu(a)$ und integriere über die a-Ebene. Da das zweite Glied der rechten Seite in (2) nichtnegativ ist, ergibt sich die Ungleichung

$$(10)\qquad T_\mu(r) = \int\limits_{(a)} N(r,\ a)d\mu(a) \leqq MT(r)+P_0(\mu)\ ,$$

wo

$$P_0(\mu) = \int\limits_{(a)} \log\frac{(1+|w(0)|^2)^{1/2}(1+|a|^2)^{1/2}}{|w(0)-a|}\,d\mu(a)$$

von r unabhängig ist.

Setzt man hier zunächst $d\mu(a) = d\sigma(a)$, so ergibt sich für $T_\sigma(r)$ die obere Abschätzung

$$(11)\qquad T_\sigma(r) \leqq \frac{\pi}{2}(q-2)T(r)+P_0(\sigma)\,.$$

Um eine Abschätzung nach unten zu finden, definieren wir mit Hilfe des in Abschnitt 1 eingeführten sphärischen Flächenelements $d\mu_0$ für jedes $k>0$ eine Massenbelegung μ durch die Vorschrift

$$d\mu = kd\mu_0-d\sigma \text{ in der Menge } D_k \text{ der Punkte, wo } kd\mu_0/d\sigma \geqq 1\ ,$$
$$d\mu = kd\mu_0 \text{ in der Komplementärmenge } \overline{D}_k \text{ von } D_k\,.$$

Die Ungleichung (10) ergibt jetzt

$$kT(r)-\int\limits_{D_k} N(r,\ a)d\sigma(a) \leqq T(r)\Big(k-\int\limits_{D_k} d\sigma(a)\Big)+kP_0(\mu_0)\,.$$

Diese Beziehung lässt sich wegen

$$\int\limits_{D_k} N(r,\ a)d\sigma(a) \leqq T_\sigma(r)$$

und

$$\int\limits_{D_k} d\sigma(a) = \frac{\pi}{2}(q-2)-\int\limits_{\overline{D}_k} d\sigma(a)$$

in der Form

$$\frac{T_\sigma(r)}{T(r)} \geqq \frac{\pi}{2}(q-2) - \left\{ k\frac{P_0(\mu_0)}{T(r)} + \int\limits_{\bar{D}_k} d\sigma(a) \right\} \tag{12}$$

schreiben. Diese Ungleichung besteht für alle Werte r und $k > 0$. Setzt man z. B. $k = T(r)^{1/2}$ und lässt dann r gegen R streben, so erhält man

$$\lim_{r\to R} \left\{ k\frac{P_0(\mu_0)}{T(r)} + \int\limits_{\bar{D}_k} d\sigma(a) \right\} = 0\,,$$

und aus (11) und (12) ergibt sich die asymptotische Gleichung

$$\lim_{r\to R} \frac{T_\sigma(r)}{T(r)} = \frac{\pi}{2}(q-2)\,. \tag{13}$$

Aus (5), (9) und (13) entnimmt man das folgende Resultat:

Wenn die Charakteristik $T(r)$ der meromorphen Funktion nicht beschränkt ist, so gilt

$$\varliminf_{r\to R} \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{q} \bar{N}(r, a_\nu) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=r} \log \varrho(z) d\varphi}{T(r)} \geqq q-2\,. \tag{14}$$

Um ein im wesentlichen mit dem zweiten Hauptsatz übereinstimmendes Resultat zu erhalten, wäre hier noch eine Abschätzung des Mittelwertes

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=r} \log \varrho(z) d\varphi$$

erforderlich, die man bekanntlich mit Hilfe des Satzes über das arithmetische und geometrische Mittel gewinnt. Man kann jedoch schon aus (14) gewisse Schlüsse ziehen. Dies ist z. B. der Fall, wenn die Summe $\sum N(r, a_\nu)$ beschränkt ist. Dann ist

$$\log \varrho(z) = \log \frac{R}{R^2 - |z|^2} + V(z)\,,$$

wo $V(z)$ für $|z| \to R$ beschränkt bleibt, und $T(r)$ kann wegen (14) höchstens von der Grössenordnung $(q-2)^{-1} \log \left(R/(R^2-r^2)\right)$ sein.

LITERATUR

1. F. Nevanlinna, *Über die Anwendung einer Klasse uniformisierender Tranzendenten zur Untersuchung der Wertverteilung analytischer Funktionen*, Acta Math. 50 (1927), 159–188.
2. R. Nevanlinna, *Eindeutige analytische Funktionen*. Zweite Auflage, Berlin, 1953.

UNIVERSITÄT HELSINKI, FINNLAND.