MATH. SCAND. 2 (1954), 83–90

L'APPROXIMATION POLYNOMIALE SUR UN ENSEMBLE NON COMPACT

J. HORVÁTH

1. Je me propose de donner dans ce travail une démonstration très simple d'un théorème de S. Mandelbrojt concernant l'approximation uniforme des fonctions continues sur un ensemble fermé de la droite réelle par des combinaisons linéaires de $x^n/F(x)$. Le théorème en question [7, p. 60, Theorem 5] peut être énoncé de la manière suivante:

Théorème I. *Soit* $F(x)$, $-\infty < x < \infty$, *une fonction positive, paire, continue et telle que* $\log F(x)$ *soit une fonction convexe de* $\log x$.

Soit E *un ensemble fermé de la droite réelle et pour* $h > 0$ *posons*

$$E_h = \bigcup_{x \in E} [x-h, x+h] ,$$

où $[a, b]$ *désigne l'intervalle fermé* $a \leqq x \leqq b$. $\complement E_h$ *étant le complémentaire de* E_h *par rapport à la droite réelle, soit* $\varphi(x)$ *la fonction caractéristique de* $\complement E_h$.

Supposons qu'il existe une fonction continue et à variation bornée $u(x)$, $-\infty < x < \infty$, *ayant une borne inférieure positive, telle que*

$$u(x) \leqq \tfrac{1}{2} + \varphi(x) + B\varphi(x)\varphi(-x) ,$$

où $B > 0$, *moyennant laquelle la relation*

$$\int^{\infty} \log F(e^{\sigma}) \exp\left[-\int^{\sigma} \big(u(e^{\tau})+u(-e^{\tau})\big)^{-1} d\tau\right] d\sigma = \infty \tag{1.1}$$

soit vérifiée.

Alors, quelle que soit la fonction $f(x)$ *continue sur* E *et telle que* $\lim f(x) = 0$ *lorsque* $x \to \pm\infty$, $x \in E$, *et quel soit* $\varepsilon > 0$, *il existe un polynome* $P(x)$ *vérifiant*

$$|f(x) - P(x)/F(x)| < \varepsilon$$

pour tout $x \in E$.

Mandelbrojt déduit le Théorème I d'un théorème difficile et profond [7, p. 50, Theorem IV], dont la démonstration est basée d'une part sur les résultats de Carleman concernant la transformée de Fourier et d'autre part sur le lemme suivant [7, p. 34, Lemma M_3]:

Received February 11, 1954.

LEMME 1. *Soit E un ensemble fermé, non vide, de la droite réelle. Pour $h > 0$, posons*

$$E_h = \bigcup_{x \in E} [x-h, x+h]$$

et soit $\varphi(x)$ la fonction caractéristique de $\complement E_h$.

Soit $u(x)$, $-\infty < x < \infty$, une fonction continue, à variation bornée, ayant une borne inférieure positive et telle que

$$u(x) \leqq \tfrac{1}{2} + \varphi(x) + B\varphi(x)\varphi(-x) ,$$

où $B > 0$. Soit $T(r)$, $r > 0$, une fonction positive non décroissante.

Appelons Δ_E la partie du plan complexe qu'on obtient en enlevant E au plan entier. Soit $\Psi(\zeta)$, $\zeta = \xi+i\eta$, une fonction univalente et holomorphe dans Δ_E qui vérifie l'inégalité

$$|\Psi(\zeta)| \leqq |\eta|^{-1}[T(|\zeta|)]^{-1}.$$

Si l'on a

$$\int^{\infty} \log T(e^{\sigma}) \exp\left[-\int^{\sigma} \left(u(e^{\tau})+u(e^{\tau})\right)^{-1} d\tau\right] d\sigma = \infty , \tag{1.2}$$

alors $\Psi(\zeta) \equiv 0$.

Je vais montrer que le Théorème I est presqu'une conséquence immédiate de Lemme 1. La méthode suivie sera semblable à celle que j'ai déjà utilisée pour démontrer et généraliser un résultat voisin de Mandelbrojt concernant l'approximation sur toute la droite réelle, ou sur la demi-droite, par des combinaisons linéaires de $x^{\lambda_n}/F(x)$ [5].

Je donnerai la démonstration proprement dite du Théorème I dans le numéro 4. Dans les deux numéros suivants je résumerai, pour la commodité du lecteur, quelques faits assez bien connus, mais pour lesquels je ne pourrais pas donner une référence précise.

2. Soit $\mu(x)$ une mesure réelle et bornée sur la droite réelle. Sa transformée de Stieltjes est définie par

$$\Phi(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} (\zeta-x)^{-1} d\mu(x) , \qquad \zeta = \xi+i\eta . \tag{2.1}$$

En réalité la formule précédente définit deux fonctions analytiques, une dans le demi-plan supérieur $\eta > 0$, que nous appellerons $\Phi_+(\zeta)$, et une autre dans le demi-plan inférieur $\eta < 0$, que nous appellerons $\Phi_-(\zeta)$. D'après la formule d'inversion complexe, due à Stieltjes [11, p. 339], les fonctions $\Phi_+(\zeta)$ et $\Phi_-(\zeta)$ déterminent $\mu(x)$. Nous n'aurons besoin que du fait plus particulier que si $\Phi_+(\zeta)$ et $\Phi_-(\zeta)$ sont nulles, la mesure $\mu(x)$ est nulle.

Soit maintenant E un ensemble fermé de la droite réelle et supposons que le support de $\mu(x)$ soit contenu dans E. En appelant, comme plus haut, Δ_E le complémentaire de E par rapport au plan complexe, on voit immédiatement que $\Phi(\zeta)$, défini par (2.1), est une fonction univalente et holomorphe dans Δ_E. Donc dans ce cas $\Phi_+(\zeta)$ et $\Phi_-(\zeta)$ sont des prolongements analytiques l'un de l'autre à travers les intervalles ouverts qui forment $\complement E$.

3. Soit $F(r)$, $1 \leqq r < \infty$, une fonction positive, croissante et telle que $\log F(r)$ soit une fonction convexe de $\log r$. Supposons en plus que pour tout ϱ positif

$$\lim_{r\to\infty} \left(r^{\varrho}/F(r)\right) = 0 \,. \tag{3.1}$$

Définissons la fonction $G(\varrho)$ en posant pour $1 \leqq \varrho < \infty$

$$\log G(\varrho) = \max_{r \geqq 1} \left(\varrho \log r - \log F(r)\right),$$

où le maximum existe en vertu de (3.1). Nous démontrons que

$$\log F(r) = \max_{\varrho \geqq 1} \left(\varrho \log r - \log G(\varrho)\right) \tag{3.2}$$

[2; 6, p. 651]. En effet d'une part

$$\begin{aligned} \max_{\varrho \geqq 1} \left\{\varrho \log r - \log G(\varrho)\right\} &= \max_{\varrho \geqq 1} \left\{\varrho \log r - \max_{s \geqq 1}\left(\varrho \log s - \log F(s)\right)\right\} \\ &\leqq \max_{\varrho \geqq 1} \left\{\varrho \log r - \varrho \log r + \log F(r)\right\} = \log F(r) \,. \end{aligned}$$

D'autre part soit τ_0 la dérivée à droite de $\log F(r)$ par rapport à $\log r$ au point $r = r_0$. Alors, en vertu de la convexité,

$$\frac{\log F(r) - \log F(r_0)}{\log r - \log r_0} \begin{cases} \geqq \tau_0, & \text{si } r > r_0 \,, \\ \leqq \tau_0, & \text{si } r < r_0 \,; \end{cases}$$

donc

$$\log F(r) - \log F(r_0) \geqq \tau_0 (\log r - \log r_0)$$

et

$$\tau_0 \log r_0 - \log F(r_0) \geqq \tau_0 \log r - \log F(r) \,,$$

quelle que soit la valeur $r \geqq 1$. Par conséquent

$$\log G(\tau_0) = \tau_0 \log r_0 - \log F(r_0)$$

et

$$\max_{\varrho \geqq 1} \left(\varrho \log r_0 - \log G(\varrho)\right) \geqq \tau_0 \log r_0 - \log G(\tau_0) = \log F(r_0) \,.$$

Puisque le point r_0 a été choisi d'une façon arbitraire, (3.2) est démontré.

Définissons la suite M_n en posant $M_n = G(n)$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots,$ c'est-à-dire en posant

$$(3.3) \qquad M_n = \max_{r \geqq 1} r^n / F(r) .$$

Démontrons que

$$(3.4) \qquad \lim_{n \to \infty} M_n{}^{1/n} = \infty .$$

Soit $r(n)$ la valeur de r pour laquelle le maximum qui figure dans (3.3) est atteint. S'il y a plusieurs de ces valeurs de r, on choisit la plus grande. Il est très facile de voir [8, p. 4] qu'en vertu de (3.1) la fonction $r(n)$ est croissante et tend vers $+\infty$ lorsque $n \to \infty$. Soit K un nombre positif donné d'avance et soit n_0 tel que $\log r(n_0) \geqq 2K$. Alors

$$\log M_n \geqq n \log r(n_0) - \log F(r(n_0))$$

chaque fois que $n \geqq n_0$. Par conséquent $n^{-1} \log M_n > K$ pour n assez grand.

On peut maintenant définir la fonction $T(r)$ en posant

$$(3.5) \qquad \log T(r) = \max_{n \geqq 1} (n \log r - \log M_n) ,$$

car le maximum existe en vertu de (3.4). En comparant (3.2) et (3.5), il est immédiat que $T(r) \leqq F(r)$. D'autre part si le maximum qui figure dans (3.2) est atteint pour $\varrho = \varrho_0$, on a

$$\begin{aligned} \log F(r) - \log T(r) &= \max_{\varrho \geqq 1} \big(\varrho \log r - \log\ G(\varrho)\big) - \max_{n \geqq 1} (n \log r - \log M_n) \\ &\leqq \varrho_0 \log r - \log G(\varrho_0) - [\varrho_0] \log r + \log G([\varrho_0]) \leqq \log r , \end{aligned}$$

puisque, comme on le voit immédiatement, $G(\varrho)$ est une fonction croissante. On a donc pour $1 \leqq r < \infty$

$$(3.6) \qquad \log F(r) \geqq \log T(r) \geqq \log F(r) - \log r .$$

Ces considérations étant faites, supposons que $F(r)$ vérifie les conditions du Théorème I, et en particulier la condition (1.1). Comme $u(x)$ est une fonction à variation bornée, elle est nécessairement bornée; soit $u(x) \leqq C$. Par conséquent

$$\exp\left[-\int^{\sigma} \big(u(e^{\tau}) + u(e^{-\tau})\big)^{-1} d\tau\right] = O(e^{-\sigma/2C}) .$$

Il en résulte d'une part que $F(r)$ vérifie la condition (3.1). D'autre part, en vertu de (3.6), $T(r)$ vérifie la condition (1.2).

En résumé on peut énoncer le lemme suivant.

LEMME 2. *Soit $F(r)$ une fonction qui vérifie les hypothèses du Théorème I. Alors on peut définir une suite M_n et une fonction $T(r)$ par les relations* (3.3) *et* (3.5), *et $T(r)$ vérifie la condition* (1.2) *du Lemme* 1.

4. Démonstration du Théorème I. Désignons par $\mathscr{C}(E)$ l'espace de Banach formé par toutes les fonctions continues sur E et qui s'anullent à l'infini, muni de la norme $\|f\| = \max_{x\in E} |f(x)|$. Toute forme linéaire sur $\mathscr{C}(E)$ s'écrit:

$$L(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,d\mu(x)\,,$$

où $\mu(x)$ est une mesure bornée ayant son support contenu dans E.

D'après le théorème de Hahn-Banach il suffit de démontrer que si $\mu(x)$ a son support contenu dans E et si l'on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n [F(x)]^{-1} d\mu(x) = 0 \tag{4.1}$$

pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, alors $\mu(x) = 0$. Il suffit évidemment de prendre $\mu(x)$ de masse totale $\leqq 1$.

Considérons à cet effet la transformée de Stieltjes

$$\Psi(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} (\zeta - x)^{-1} [F(x)]^{-1} d\mu(x)\,.$$

Comme la mesure $[F(x)]^{-1}d\mu(x)$ a encore son support contenu dans E, d'après le numéro 2 la fonction $\Psi(\zeta)$ est univalente et holomorphe dans Δ_E. En outre il résulte de l'identité

$$(\zeta - x)^{-1} = \zeta^{-1} + x\zeta^{-2} + \ldots + x^{n-1}\zeta^{-n} + x^n\zeta^{-n}(\zeta - x)^{-1}$$

et des relations (4.1) que

$$\Psi(\zeta) = \zeta^{-n} \int_{-\infty}^{\infty} x^n (\zeta - x)^{-1} [F(x)]^{-1} d\mu(x)\,,$$

d'où, avec les notations du numéro 3,

$$|\Psi(\zeta)| \leqq |\eta|^{-1} |\zeta|^{-n} \max_{x} \left(|x|^n [F(x)]^{-1}\right) = |\eta|^{-1} |\zeta|^{-n} M_n\,,$$

puisque $|\zeta - x| \geqq |\eta|$. Comme cette inégalité est valable pour tout $n = 1, 2, 3, \ldots$, il vient

$$|\Psi(\zeta)| \leqq |\eta|^{-1} \min_{n \geqq 1} (|\zeta|^{-n} M_n) = |\eta|^{-1} [T(|\zeta|)]^{-1}\,.$$

Or, d'après le Lemme 2, toutes les hypothèses du Lemme 1 sont vérifiées, par conséquent $\Psi(\zeta) \equiv 0$ et, en vertu de la formule d'inversion complexe, $\mu(x) = 0$. Le Théorème I est donc complètement démontré.

5. Quelques cas particuliers. Lorsque E est toute la droite réelle, la démonstration du Théorème I se simplifie énormément et on obtient le résultat suivant:

THÉORÈME II. *Soit* $F(x)$, $-\infty < x < \infty$, *une fonction positive, paire, continue, telle que* $\log F(x)$ *soit fonction convexe de* $\log x$ *et vérifiant*

$$\int^{\infty} x^{-2} \log F(x)\, dx = \infty .$$

Alors, quelle que soit la fonction continue $f(x)$, $-\infty < x < \infty$, *telle que* $f(x) \to 0$ *lorsque* $x \to \pm\infty$, *et quel que soit* $\varepsilon > 0$, *il existe un polynome* $P(x)$ *vérifiant*

$$|f(x) - P(x)/F(x)| < \varepsilon$$

pour tout x.

J'ai démontré ce théorème en 1948 comme cas particulier, correspondant à $\lambda_n = n$, du théorème déjà cité [4; 7, p. 62, Theorem 5'; 8, p. 182, Théorème 5.7. III]. Depuis ma note, Carleson [1] a retrouvé ce théorème; d'ailleurs Carleson et Pollard [10] ont aussi examiné le cas où $\log F(x)$ n'est pas fonction convexe de $\log x$. On obtient le Théorème II à partir du Théorème I en posant $u(x) \equiv \frac{1}{2}$.

Du Théorème II on déduit le résultat suivant, que j'ai déjà démontré directement [5] en utilisant la méthode dont je me sers dans le présent travail:

THÉORÈME III. *Soit* $H(t)$, $0 \leqq t < \infty$, *une fonction positive, croissante, continue, telle que* $\log H(t)$ *soit une fonction convexe de* $\log t$ *et vérifiant*

$$\int^{\infty} t^{-3/2} \log H(t)\, dt = \infty .$$

Alors, quelle que soit la fonction continue $h(t)$, $0 \leqq t < \infty$, *telle que* $h(t) \to 0$ *lorsque* $t \to \infty$, *et quel que soit* $\varepsilon > 0$, *il existe un polynome* $Q(t)$ *vérifiant*

$$|h(t) - Q(t)/H(t)| < \varepsilon \tag{5.1}$$

pour $0 \leqq t < \infty$.

Posons en effet $F(x) = H(x^2)$; alors $F(x)$ vérifie les hypothèses du Théoréme II. Si $f(x) = h(x^2)$, il existe donc un polynome $P(x)$ tel que

$$|f(x) - P(x)/F(x)| < \varepsilon . \tag{5.2}$$

Comme $f(x)$ et $F(x)$ sont paires, on a aussi

$$(5.3) \qquad |f(x) - P(-x)/F(x)| < \varepsilon .$$

Or $\frac{1}{2}\{P(x) + P(-x)\}$ est un polynome pair, donc de la forme $Q(x^2)$. De (5.2) et (5.3) il résulte que

$$|f(x) - Q(x^2)/F(x)| < \varepsilon ,$$

d'où, en posant $x^2 = t$, la relation cherchée (5.1).

D'autre part le Théorème III est cas particulier du Théorème I, correspondant à $E = [0, \infty)$, car on peut poser $u(x) = \frac{3}{2}$ pour $x \leqq -1$, $u(x) = \frac{1}{2}$ pour $x \geqq 0$ et $u(x)$ linéaire dans $[-1, 0]$.

6. Approximation dans L^p. En utilisant une méthode due à W. H. J. Fuchs [3, p. 92; 4] on peut déduire du Théorème I un résultat concernant l'approximation dans l'espace $L^p(E)$, $1 \leqq p < \infty$, des fonctions de puissance p-ième intégrable sur E.

Théorème IV. *Supposons que les hypothèse du Théorème I soient vérifiées.*

Alors, pour toute fonction $f(x) \in L^p(E)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynome $P(x)$ tel que

$$(6.1) \qquad \int_E |f(x) - P(x)/F(x)|^p dx < \varepsilon .$$

Démonstration. Pour tout $\eta_1 > 0$ il existe une fonction $g(x)$, continue sur E et nulle hors d'un compact, telle que

$$(6.2) \qquad \int_E |f(x) - g(x)|^p dx < \eta_1 .$$

Or $[F(x)]^{1/2}$ satisfait aux mêmes hypothèses que $F(x)$, il existe donc en vertu du Théorème I pour tout $\eta_2 > 0$ un polynome $P(x)$ tel que

$$\left|g(x)\,[F(x)]^{1/2} - P(x)\,[F(x)]^{-1/2}\right| < \eta_2$$

pour $x \in E$. Par conséquent

$$(6.3) \qquad \int_E |g(x) - P(x)/F(x)|^p dx$$

$$= \int_E [F(x)]^{-p/2} |g(x)[F(x)]^{1/2} - P(x)[F(x)]^{-1/2}|^p dx \leqq \eta_2{}^p \int_E [F(x)]^{-p/2} dx .$$

En choisissant η_1 et η_2 suffisamment petits, (6.1) résulte de (6.2) et (6.3).

Remarques finales. Du Théorème I on déduit facilement, comme l'a montré Mandelbrojt, un critère pour que le problème des moments $\int_E x^n d\mu(x) = m_n$ soit déterminé [7, p. 63, Theorem 6]. Nous voyons donc que les résultats principaux du Chapitre IV du livre [7] de Mandelbrojt se déduisent facilement du Lemme 1, sans utiliser les considérations difficiles du Chap. I, § 5, et du Chap. III du livre cité.

Remarquons finalement qu'en combinant la méthode du présent travail avec les techniques que Mandelbrojt a introduites pour démontrer son inégalité fondamentale [8, Chap. III], on établirait sans peine un théorème concernant l'approximation sur E par des combinaisons linéaires de $x^{\lambda_n}/F(x)$, théorème auquel Mandelbrojt a fait allusion dans une publication récente [9].

BIBLIOGRAPHIE

1. L. Carleson, *On Bernstein's approximation problem*, Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951), 953–961.
2. W. Fenchel, *On conjugate convex functions*, Canadian J. Math. 1 (1949), 73–77.
3. W. H. J. Fuchs, *On the closure of* $\{e^{-t}t^{\alpha_\nu}\}$, Proc. Cambridge Philos. Soc. 42 (1946), 91–105.
4. J. Horváth, *Sur un théorème de M. Mandelbrojt concernant l'approximation polynomiale des fonctions sur tout l'axe réel*, C. R. Acad. Sci. Paris 227 (1948), 889–891.
5. J. Horváth, *Sur l'approximation polynomiale des fonctions sur une demi-droite*, C. R. Acad. Sci. Paris 227 (1948), 1074–1076.
6. S. Mandelbrojt, *Quasi-analyticity and properties of flatness of entire functions*, Duke Math. J. 9 (1942), 647–661.
7. S. Mandelbrojt, *General theorems of closure*, Rice Inst. Pamphlet, Special issue, 1951.
8. S. Mandelbrojt, *Séries adhérentes. Régularisation. Applications*, Paris, 1952.
9. S. Mandelbrojt, *Quelques nouveaux théorèmes de fermeture*, Ann. Soc. Polon. Math. 25 (1952), 241–251.
10. H. Pollard, *Solution of Bernstein's approximation problem*, Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1953), 869–875.
11. D. Widder, *The Laplace transform*, Princeton, 1946.

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES, BOGOTÁ, COLOMBIE