MATH. SCAND. 2 (1954), 142–152

ÜBER DIE INTEGRATION DER DIFFERENTIALGLEICHUNG $\Delta u = c(P)\, u$ AUF OFFENEN RIEMANNSCHEN FLÄCHEN

LAURI MYRBERG

1. Es sei F eine beliebige abstrakt definierte, offene Riemannsche Fläche; ferner sei $c(P)$ eine auf F nebst ihren ersten Ableitungen stetige, nichtnegative reelle Funktion, die nicht identisch verschwindet und die sich bei der konformen Abbildung $z_h \to z_k$ ($z_n = x_n + iy_n$ ein lokaler Parameter) gemäss der Formel

$$c(z_h) = c(z_k)\, |\operatorname{grad} x_k(x_h, y_h)|^2$$

transformiert. Es soll in der vorliegenden Arbeit die Existenz einer nichtkonstanten, nichtnegativen, auf F mit ihren ersten und zweiten Ableitungen stetigen Funktion u bewiesen werden, die der bei der konformen Abbildung $z_h \to z_k$ invarianten Gleichung

$$\Delta u = c(P)\, u \tag{1}$$

genügt. Diese Gleichung ist auf offenen Riemannschen Flächen früher unter anderen von Ozawa [4] untersucht worden.

2. Es sei A eine kompakte Teilfläche von F, die von einer endlichen Anzahl stetig gekrümmter Kurven α begrenzt ist, und es seien u, v zwei in A reguläre, d. h. mit ihren ersten und zweiten Ableitungen stetige Lösungen von (1), die noch auf α stetig sind. Wir beweisen folgenden

Hilfssatz 1: *Wenn die Ungleichung $u \geqq v$ auf α gilt, so gilt sie auf der ganzen Teilfläche A.*

Beweis. Wir setzen $u - v = \varphi$; dann ist

$$\Delta \varphi = c(P)\, \varphi \quad \text{in } A, \qquad \varphi \geqq 0 \quad \text{auf } \alpha\,.$$

Um unsere Behauptung indirekt zu beweisen, nehmen wir an, dass die Ungleichung $\varphi \geqq 0$ nicht auf der ganzen Teilfläche A gilt. Es sei β die

Eingegangen am 10. März 1954.

Niveaukurve $\varphi = 0$ und B eine von β begrenzte Teilfläche, wo $\varphi \leqq 0$ ist. In B gilt

$$\Delta\varphi = c(P)\,\varphi \leqq 0;$$

φ ist somit superharmonisch in B. Hieraus folgt in B

$$0 \geqq \varphi \geqq \inf_B \varphi = \inf_\beta \varphi = 0\,,$$

woraus $\varphi \equiv 0$ folgt. Wenn $u \not\equiv v$, so enthält das obige einen Widerspruch, womit der Hilfssatz bewiesen ist. — Ferner gilt folgender

Hilfssatz 2: *Es sei h eine in A harmonische, auf α stetige Funktion und u eine in A reguläre, auf α stetige Lösung von* (1). *Wenn nun auf α*

$$h \geqq u \geqq 0\,,$$

so ist $h \geqq u$ auf der ganzen Teilfläche A.

Beweis. Nach dem Hilfssatz 1 ist $u \geqq 0$ in A. Für $\varphi = h - u$ gilt

$$\Delta\varphi = -\Delta u = -c(P)\,u \leqq 0;$$

φ ist somit superharmonisch in A und nichtnegativ auf α, woraus $\varphi \geqq 0$ und $h \geqq u$ in A folgt. — Aus dem Hilfssatz 1 folgt für $v \equiv 0$ der

Hilfssatz 3: *Wenn eine reguläre Lösung u von* (1) *auf α verschwindet, so verschwindet sie identisch auf A.*

3. Es sei $G_A(P, Q)$ die zur Teilfläche A gehörige Greensche Funktion der Gleichung (1), d. h. diejenige Lösung der Gleichung, die auf α verschwindet und in A regulär ist, abgesehen vom Punkte Q, wo $G_A(P, Q)$ derart unendlich wird, dass

$$G_A(P, Q) + \log PQ\,,$$

wo PQ die Distanz zwischen P und Q bedeutet, in der Umgebung des Punktes Q beschränkt ist. Die Greensche Funktion ist durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt. Sind nämlich $G_A(P, Q)$ und $G_A'(P, Q)$ zwei Funktionen der genannten Art, so ist die Differenz $U = G_A - G_A'$ eine in $A - Q$ reguläre, beschränkte, auf α verschwindende Lösung von (1). Es seien nun K_r ein kleiner Kreis um Q vom Radius r und ω_r das harmonische Mass der Peripherie von K_r in bezug auf die Teilfläche $A - K_r$. Wenn $|U| \leqq M$ in $A - Q$, so folgt aus den Hilfssätzen 1 und 2 mit $A - K_r$ statt A

$$-M\omega_r \leqq U \leqq M\omega_r\,,$$

woraus für $r \to 0$ folgt, dass $U \equiv 0$, $G_A \equiv G_A'$.

4. Wir werden nun die Existenz der Greenschen Funktion $G_A(P, Q)$ für eine beliebige kompakte Teilfläche A mit stetig gekrümmtem Rand α beweisen, wobei folgende Tatsache als bekannt vorausgesetzt wird:

Ist $f(P)$ eine beliebige nichtnegative, im Innern und auf dem Rande des Einheitskreises mit ihren ersten Ableitungen stetige reelle Funktion, so existiert die zum Einheitskreis gehörige Greensche Funktion $G_0(P, Q)$ der Gleichung $\Delta u = f(P)\, u$. (Vgl. Lichtenstein [3, S. 1287].)

Es sei nun $g(P, Q)$ die zu dem Einheitskreis gehörige harmonische Greensche Funktion. Wir behaupten, dass

$$G_0(P, Q) \leqq g(P, Q)\,. \tag{2}$$

Um dies zu beweisen, betrachten wir die Differenz

$$h(P, Q) = G_0(P, Q) - g(P, Q)$$

und bemerken, dass $h = 0$ auf der Peripherie C des Einheitskreises K und dass $\Delta h = f(P)\, G_0(P, Q) \geqq 0$ wegen $G_0 \geqq 0$, was leicht aus dem Hilfssatz 1 folgt. Ferner ist die Funktion h in $K - Q$ mit ihren ersten und zweiten Ableitungen stetig und beschränkt: $|h| \leqq M$.

Es seien nun K_r ein kleiner Kreis vom Radius r um Q und ω_r das harmonische Mass der Peripherie von K_r in bezug auf das Gebiet $K - K_r$. Da h subharmonisch ist, gilt $h \leqq M\omega_r$ in $K - K_r$, woraus für $r \to 0$ folgt, dass $h \leqq 0$ in K und somit (2) gilt.

5. Wir konstruieren nun die universelle Überlagerungsfläche der Teilfläche A und bilden sie konform auf den Einheitskreis $|z| < 1$ ab. Die Funktion $c(P)$ wird dadurch in eine für $|z| < 1$ stetig differenzierbare Funktion $c^*(z)$ transformiert, die in einem zu z_h bezüglich der zugehörigen Fuchsschen Gruppe Γ kongruenten Punkt z_k den Wert

$$c^*(z_k) = c^*(z_h)\, |\mathrm{grad}\, x_h(x_k, y_k)|^2$$

hat, wo $z_h = z_h(z_k)$ diejenige lineare Transformation $S \in \Gamma$ ist, die den Punkt z_k in z_h überführt.

Wir bilden nun eine unendliche Folge von Greenschen Funktionen $G_0(P, Q_k)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, der Gleichung $\Delta u = c^*(P)\, u$, indem wir den Pol Q_k alle zu einem gegebenen Punkte Q_1 kongruenten Punkte durchlaufen lassen. (Da die Funktion $c^*(P)$ im allgemeinen nicht auf $|z| = 1$ stetig ist, bilden wir zuerst die Greensche Funktion in $|z| < r < 1$ und lassen dann r gegen 1 streben.) Dann ist die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} G_0(P, Q_k) \tag{3}$$

konvergent, da sie nach (2) die bekanntlich konvergente Reihe

(4) $$\sum_{k=1}^{\infty} g(P, Q_k)$$

zur Majorante hat. Ferner genügt die Summe (3) der Gleichung $\Delta u = c^*(P)\,u$, und zwar ist sie eine automorphe Funktion der Gruppe Γ. Ist nämlich S_n eine zu Γ gehörige Transformation, so gilt offenbar

(5) $$G_0(S_n P, S_n Q_k) = G_0(P, Q_k),$$

woraus

(6) $$\sum_{k=1}^{\infty} G_0(S_n P, Q_k) = \sum_{k=1}^{\infty} G_0(P, Q_k)$$

folgt, weil auch die Punkte $S_n Q_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, alle zu Q_1 kongruenten Punkte durchlaufen und somit nach (5) die Glieder auf den beiden Seiten von (6) paarweise gleich sind.

Die Funktion (3) ist also, auf die Fläche A übertragen, eine eindeutige Lösung von (1), die im Punkte Q eine logarithmische Singularität besitzt. Weitere Eigenschaften von $G_A(P, Q)$ ergeben sich aus den beiden folgenden Hilfssätzen:

Hilfssatz 4: *Es gilt in A die Ungleichung*

$$G_A(P, Q) \leqq g_A(P, Q),$$

wo $g_A(P, Q)$ die harmonische Greensche Funktion von A ist.

Der Beweis ergibt sich aus der Ungleichung (2), wenn man beachtet, dass die Summe (4) genau die harmonische Greensche Funktion $g_A(P, Q)$ darstellt.

Hilfssatz 5: *Es gilt in A*

$$G_A(P, Q) \geqq 0$$

und auf α

$$\partial G_A(P, Q)/\partial n \geqq 0,$$

wo n die Richtung der inneren Normale von α bezeichnet.

Der Beweis der ersten Behauptung ergibt sich aus dem Hilfssatz 1, wodurch auch der zweite Teil des Hilfssatzes evident wird.

Aus den Hilfssätzen 4 und 5 folgt nun, dass die Funktion $G_A(P, Q)$ auf der Kurve α verschwindet, da dies bekanntlich für die Funktion $g_A(P, Q)$ gilt. Die Funktion $G_A(P, Q)$ ist somit wirklich die auf der Kurve α verschwindende Greensche Funktion der Gleichung (1).

Wir erwähnen noch eine Eigenschaft von $G_A(P, Q)$, die im Folgenden Anwendung findet. Die Ausdrücke

$$\frac{1}{\log PQ}\frac{\partial}{\partial x}(G_A(P, Q)+\log PQ), \qquad \frac{1}{\log PQ}\frac{\partial}{\partial y}(G_A(P, Q)+\log PQ)$$

sind in der Umgebung des Punktes Q beschränkt; dies folgt daraus, dass die Funktion $G_0(P, Q)$ diese Eigenschaft besitzt [2].

6. Die Greensche Funktion gestattet es, für eine Lösung der Gleichung (1) eine Integraldarstellung durch ihre Randwerte anzugeben. Es gilt nämlich der

Hilfssatz 6: *Ist die Funktion u eine reguläre, auf α stetige Lösung der Gleichung* (1) *auf der Teilfläche A und ist $G_A(P, Q)$ die Greensche Funktion der Gleichung* (1), *so gilt*

$$2\pi u(Q) = \int_\alpha u(s)\frac{\partial G_A(s, Q)}{\partial n}\,ds\,.$$

Der Beweis lässt sich leicht mit Hilfe der Greenschen Formel unter Beachtung der Gleichungen $\Delta u = c(P)\,u$ und $\Delta G_A = c(P)\,G_A$ führen.

Andererseits kann die Randwertaufgabe der Gleichung (1) bei beliebigen auf α stetigen Randwerten $f(s)$ gelöst werden. Die Konstruktion der Lösung kann auf eine zur Konstruktion der Greenschen Funktion analoge Weise durchgeführt werden. Wir bilden wieder die universelle Überlagerungsfläche von A auf den Einheitskreis $|z| < 1$ ab, wobei die Funktion $c(P)$ in eine Funktion $c^*(z)$ transformiert wird (vgl. Abschnitt 5). Der Kurve α entspricht eine abzählbare Menge äquivalenter Bogen α_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Wir bilden nun eine unendliche Folge in $|z| < 1$ regulärer Lösungen $u(P, \alpha_k)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, der Gleichung $\Delta u = c^*(P)\,u$ mit den Randwerten

$$u(P, \alpha_k) = \begin{cases} f^*(s) & \text{auf } \alpha_k, \\ 0 & \text{auf dem komplementären Bogen,} \end{cases}$$

wo $f^*(s)$ die auf α_k definierte transformierte Funktion $f(s)$ bezeichnet. Dann ist die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} u(P, \alpha_k) \tag{7}$$

absolut konvergent, weil sie die bekanntlich konvergente Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} h(P, \alpha_k)\,,$$

wo $h(P, \alpha_k)$ die in $|z| < 1$ harmonische Funktion mit den Randwerten

$$h(P, \alpha_k) = \begin{cases} |f^*(s)| & \text{auf } \alpha_k, \\ 0 & \text{auf dem komplementären Bogen} \end{cases}$$

ist, als Majorante hat. Ferner genügt die Summe (7) der Gleichung $\Delta u = c^*(P)\,u$ und ist eine automorphe Funktion der Gruppe Γ; denn für jede Transformation S_n der Gruppe Γ gilt offenbar

$$u(S_n P, S_n \alpha_k) = u(P, \alpha_k), \tag{8}$$

woraus

$$\sum_{k=1}^{\infty} u(S_n P, \alpha_k) = \sum_{k=1}^{\infty} u(P, \alpha_k) \tag{9}$$

folgt, da auch die Bogen $S_n \alpha_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, alle mit α_1 kongruenten Bogen durchlaufen und somit nach (8) die Glieder auf den beiden Seiten von (9) paarweise gleich sind.

Die Funktion (7) ist daher, auf die Fläche A übertragen, eine eindeutige Lösung unserer Randwertaufgabe, und zwar ist sie nach dem Hilfssatz 3 die einzige Lösung des Problems.

7. Wir wollen nun zeigen, dass der sogenannte Harnacksche Satz für die nichtnegativen Lösungen der Gleichung (1) gültig ist. Zuerst beweisen wir folgenden Hilfssatz (vgl. Lichtenstein [2]):

Hilfssatz 7: *Um jeden gegebenen Punkt Q_0 eines Parameterkreises $|z_h| < 1$ können ein Kreis K und ausserhalb von K eine stetig gekrümmte Kurve C so gelegt werden, dass für alle Q im Innern und auf dem Rande von K und für alle P auf C die Normalableitung $\partial G_C(P, Q)/\partial n$ der auf C verschwindenden Greenschen Funktion der Gleichung* (1) *eine positive untere Grenze besitzt.*

Beweis. Es sei $G_0(P, Q_0)$ die auf dem Kreis $|z_h| = 1$ verschwindende Greensche Funktion der Gleichung (1) mit dem Pol Q_0. Die Funktion

$$u_0(P, Q_0) = G_0(P, Q_0) + \log \varrho,$$

wo ϱ die Distanz PQ_0 bedeutet, ist dann beschränkt in Q_0, und dasselbe gilt für

$$\frac{1}{\log \varrho}\,\frac{\partial u_0(P, Q_0)}{\partial x}, \qquad \frac{1}{\log \varrho}\,\frac{\partial u_0(P, Q_0)}{\partial y}.$$

Die Ableitung der Funktion $G_0(P, Q_0)$ in der Richtung von ϱ,

$$\frac{\partial G_0(P, Q_0)}{\partial \varrho} = -\frac{1}{\varrho} + \frac{\partial u_0(P, Q_0)}{\partial x}\,\frac{x - x_0}{\varrho} + \frac{\partial u_0(P, Q_0)}{\partial y}\,\frac{y - y_0}{\varrho},$$

wird im Punkte Q_0 unendlich wie $-\varrho^{-1}$. Es gibt daher ein positives ϱ_0, so dass für alle Punkte P mit $\varrho \leqq \varrho_0$

$$\partial G_0(P, Q)/\partial \varrho < m_1 < 0 . \tag{10}$$

Es seien K_0 der Kreis um Q_0 vom Radius ϱ_0 und M_0 das Maximum von $G_0(P, Q_0)$ auf K_0. Wenn nun $M > M_0$ ist, so ist die Niveaukurve $G_0(P, Q_0) = M$ eine stetig gekrümmte geschlossene Kurve C, die den Punkt Q_0 umschliesst, im Innern von K_0 liegt und ein Gebiet D begrenzt.

Wir bilden nun diejenige in D reguläre Lösung der Gleichung (1), die auf C einen konstanten Randwert M hat. Dann ist die Differenz

$$G_C(P, Q_0) = G_0(P, Q_0) - h(P) \tag{11}$$

die Greensche Funktion der Gleichung (1) in D.

Nach dem Hilfssatz 2 ist $h(P) \leqq M$ in D. Wir behaupten, dass in allen Punkten von C

$$\partial h(P)/\partial \varrho \geqq 0 . \tag{12}$$

Für die normale Ableitung gilt nämlich $\partial h(P)/\partial n \leqq 0$ und ferner ist

$$\frac{\partial h(P)}{\partial \varrho} = \frac{\partial h(P)}{\partial n} \cos \psi ,$$

wo ψ den Winkel zwischen der inneren Normale n und dem Vektor ϱ bezeichnet. Wir behaupten, dass $\frac{1}{2}\pi \leqq \psi \leqq \frac{3}{2}\pi$.

Wir betrachten einen beliebigen Radius ϱ des Kreises K_0. Weil nach (10) auf diesem Radius $\partial G_0/\partial \varrho < 0$, nimmt G_0 monoton von $+\infty$ ab und erreicht den Wert M nur einmal, nämlich auf der Kurve C. Falls nun der Winkel $\psi < \frac{1}{2}\pi$ oder $> \frac{3}{2}\pi$ wäre, so müsste es auf dem Radius ϱ zwischen Q_0 und P wenigstens einen Punkt der Kurve C geben, wo folglich $G_0 = M$ wäre, was unmöglich ist. Es gilt also (12). Hieraus und aus (11) folgt, dass in allen Punkten von C

$$\partial G_C(P, Q_0)/\partial \varrho < m_1 < 0$$

gilt, während die tangentielle Ableitung $\partial G_C(P, Q_0)/\partial s$ verschwindet. Aus

$$\frac{\partial G_C(P, Q_0)}{\partial \varrho} = \frac{\partial G_C(P, Q_0)}{\partial n} \cos \psi - \frac{\partial G_C(P, Q_0)}{\partial s} \sin \psi = \frac{\partial G_C(P, Q_0)}{\partial n} \cos \psi$$

folgt wegen $\cos \psi \leqq 0$ für alle Punkte P auf C

$$\partial G_C(P, Q_0)/\partial n > m_2 > 0 .$$

Nun ist aber $\partial G_C(P, Q)/\partial n$ für alle P auf C und für alle Q in einer Umgebung des Punktes Q_0 stetig. Man kann daher um Q_0 ganz im Innern von D einen Kreis K so legen, dass für alle Q im Innern und auf dem Rande von K und für alle P auf C

$$\partial G_C(P, Q)/\partial n > m_3 > 0$$

gilt. Damit ist unser Hilfssatz bewiesen.

8. Auf Grund des vorigen Hilfssatzes beweisen wir nun den

Hilfssatz 8: *Es sei u eine nichtnegative Lösung der Gleichung* (1) *in einem Parameterkreis* $|z_h| < 1$. *Um jeden Punkt Q_0 des Kreises kann dann ein Kreis K so gelegt werden, dass für alle Punktepaare Q_1, Q_2 im Innern und auf dem Rande von K die Ungleichungen*

$$q^{-1}\, u(Q_1) \leqq u(Q_2) \leqq q\, u(Q_1) \tag{13}$$

gelten, wo q eine positive, von u unabhängige Konstante ist.

Beweis. Es seien K und C ein Kreis bzw. eine Kurve, die die Forderungen des Hilfssatzes 7 erfüllen. Ferner setzen wir

$$q_0 = \inf \partial G_C(P, Q)/\partial n, \qquad q_1 = \sup \partial G_C(P, Q)/\partial n \tag{14}$$

für alle Q im Innern und auf dem Rande von K und für alle P auf C. Nach dem Hilfssatz 7 ist $q_0 > 0$ und nach dem Hilfssatz 4

$$q_1 \leqq \sup \partial g_C(P, Q)/\partial n < \infty\,,$$

wo $g_C(P, Q)$ die auf C verschwindende harmonische Greensche Funktion ist. Nun kann $u(Q_1)$ nach dem Hilfssatz 6 gemäss der Gleichung

$$2\pi\, u(Q_1) = \int_C u(s)\, \frac{\partial G_C(s, Q_1)}{\partial n}\, ds$$

dargestellt werden, woraus wegen (14) und $u \geqq 0$

$$q_0 \int_C u(s)\, ds \leqq 2\pi\, u(Q_1) \leqq q_1 \int_C u(s)\, ds \tag{15}$$

folgt. Für den Punkt Q_2 gilt ebenfalls

$$q_0 \int_C u(s)\, ds \leqq 2\pi\, u(Q_2) \leqq q_1 \int_C u(s)\, ds\,. \tag{16}$$

Aus (15) und (16) folgt

$$q_0 q_1^{-1}\, u(Q_1) \leqq u(Q_2) \leqq q_1 q_0^{-1}\, u(Q_1)$$

und hieraus schliesslich die Behauptung, wenn man $q_1 q_0^{-1} = q$ setzt.

9. Nun können wir den Harnackschen Satz für eine beliebige kompakte Teilfläche beweisen:

HILFSSATZ 9: *Es sei $u(P)$ eine nichtnegative Lösung der Gleichung* (1) *auf einer kompakten Teilfläche F'; ferner sei A eine kompakte Teilfläche, die einschliesslich ihres Randes α ganz innerhalb von F' liegt. Dann gelten für jedes Punktepaar P_1, P_2 in A oder auf α die Ungleichungen*

$$k^{-1}\, u(P_1) \leqq u(P_2) \leqq k\, u(P_1)\,,$$

wo k eine positive, von der Funktion u und von den Punkten P_1, P_2 unabhängige Konstante ist.

BEWEIS. Nach dem Hilfssatz 8 kann um jeden Punkt Q_0 von $A+\alpha$ ein Kreis so gelegt werden, dass die Ungleichungen (13) gültig sind. Der Radius von K und die Konstante q sind selbstverständlich vom Punkte Q_0 abhängig. Nun kann bekanntlich unter den genannten Kreisen eine endliche Anzahl m von Kreisen ausgewählt werden, die schon alle Punkte von $A+\alpha$ überdecken. Es sei q_M das Maximum der Konstanten q für diese Kreise K. Durch wiederholte Anwendung der Ungleichungen (13) findet man, dass für zwei beliebige Punkte P_1 und P_2 von $A+\alpha$ die Ungleichungen

$$q_M^{-m}\, u(P_1) \leqq u(P_2) \leqq q_M^{m}\, u(P_1)$$

gültig sind, woraus mit der Bezeichnung $q_M^m = k$ die Behauptung folgt.

10. Wir betrachten nun die Familie $\mathfrak{B}$ derjenigen Lösungen der Gleichung (1), die auf einer kompakten Teilfläche F' regulär und gleichmässig beschränkt sind:

$$|u(P)| \leqq M\,.$$

Es gilt dann der folgende Hilfssatz (vgl. Bergman-Schiffer [1]):

HILFSSATZ 10: *Die Familie $\mathfrak{B}$ ist auf jeder abgeschlossenen Teilfläche von F' normal.*

BEWEIS. Es soll zuerst bewiesen werden, dass die Funktionen u auf jeder abgeschlossenen Teilfläche $A+\alpha$ gleichgradig stetig sind. Es sei P_0 ein beliebiger, einem Punkt auf $A+\alpha$ entsprechender Punkt eines Parameterkreises $|z_k| < 1$. Ferner sei K_0 ein Kreis um P_0 und $g(P, Q)$ die Greensche Funktion der Laplaceschen Gleichung in K_0. Dann kann jede Funktion u der Familie $\mathfrak{B}$ in der Form

$$u(Q) = h(Q) - (2\pi)^{-1} \iint_{K_0} g(P, Q)\, c(P)\, u(P)\, d\sigma \tag{17}$$

dargestellt werden, wo $h(Q)$ diejenige in K_0 harmonische Funktion bezeichnet, die dieselben Randwerte wie $u(Q)$ hat und daher nach dem Maximumprinzip dem absoluten Betrag nach kleiner oder gleich M ist. Aus (17) folgt nun

$$\frac{\partial u(Q)}{\partial x} = \frac{\partial h(Q)}{\partial x} - \frac{1}{2\pi} \iint_{K_0} \frac{\partial g(P, Q)}{\partial x}\, c(P)\, u(P)\, d\sigma\,.$$

Hier ist $\partial h(Q)/\partial x$ für die ganze Familie $\mathfrak{B}$ im Kreis $K_1 \subset K_0$ gleichmässig beschränkt. Ferner gilt für $Q \in K_1$

$$\left| \iint_{K_0} \frac{\partial g(P, Q)}{\partial x}\, c(P)\, u(P)\, d\sigma \right| \leqq M \max_{K_0} c(P) \iint_{K_0} \left| \frac{\partial g(P, Q)}{\partial x} \right| d\sigma\,.$$

Auch $|\partial u(Q)/\partial y|$ für $Q \in K_1$ hat eine für die ganze Familie $\mathfrak{B}$ gemeinsame obere Grenze. Die Familie $\mathfrak{B}$ ist somit in jedem Punkte von $A + \alpha$ gleichgradig stetig.

Da ferner alle Funktionen von $\mathfrak{B}$ in $A + \alpha$ gleichmässig beschränkt sind, ist die Familie $\mathfrak{B}$ in $A + \alpha$ normal, wie behauptet.

11. Nach allen obigen Hilfsbetrachtungen können wir schliesslich zur Konstruktion einer Lösung der Gleichung (1) auf der ganzen Fläche F übergehen.

Es sei F_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, eine Ausschöpfung der Fläche F, und γ_n bezeichne den analytischen Rand von F_n. Ferner sei $u_n(Q)$ diejenige Lösung der Gleichung (1), die auf γ_n einen konstanten Randwert k_n (> 0) besitzt.

Aus den Hilfssätzen 1 und 2 folgt $0 \leqq u_n(Q) \leqq k_n$; in der Tat ist $u_n(Q) > 0$ in jedem inneren Punkt Q von F_n. Die Konstanten k_n werden gemäss der Bedingung $u_n(Q_0) = 1$ bestimmt, wo Q_0 ein fester Punkt von F_1 ist.

Die Funktionen $u_n(Q)$ sind nach dem Hilfssatz 9 auf jeder kompakten Teilfläche gleichmässig beschränkt und bilden somit nach dem Hilfssatz 10 auf jeder kompakten Teilfläche eine normale Familie. Aus der Funktionenfolge $u_n(Q)$ kann daher eine Teilfolge ausgewählt werden, die auf jeder kompakten Teilfläche von F gleichmässig gegen eine auf der ganzen Fläche F zweimal stetig differenzierbare Grenzfunktion $u(Q)$ konvergiert.

Dass die Funktion $u(Q)$ eine Lösung der Gleichung (1) ist, sieht man folgendermassen ein: Es seien P_0 ein beliebiger Punkt eines Parameterkreises $|z_k| < 1$ und K_0 ein Kreis um P_0. Ferner sei $g(P, Q)$ die harmonische Greensche Funktion in K_0. Dann kann jede Funktion $u_n(Q)$ in der Form

$$u_n(Q) = h_n(Q) - (2\pi)^{-1} \iint_{K_0} g(P, Q)\, c(P)\, u_n(P)\, d\sigma \tag{18}$$

dargestellt werden, wo $h_n(Q)$ harmonisch ist. Wenn nun n (durch eine Teilfolge) gegen ∞ geht, so erhält man aus (18)

$$u(Q) = h(Q) - (2\pi)^{-1} \iint_{K_0} g(P, Q)\, c(P)\, u(P)\, d\sigma ,$$

woraus $\Delta u(Q) = c(Q) u(Q)$ folgt.

Ferner ist $u(P_0) = 1$. Da die Konstante 1 keine Lösung der Gleichung (1) ist, kann die Grenzfunktion keine Konstante sein. Auch sei bemerkt, dass die Funktion $u(Q)$ nichtnegativ ist. — Wir erhalten somit folgenden

SATZ: *Auf einer beliebigen offenen Riemannschen Fläche F sei eine nichtnegative, mit ihren ersten Ableitungen stetige, reelle, nicht identisch verschwindende Funktion $c(P)$ gegeben, die sich bei der konformen Abbildung $z_h \to z_k$ gemäss der Formel*

$$c(z_h) = c(z_k)\, |\mathrm{grad}\, x_k(x_h, y_h)|^2$$

transformiert. Dann existieren auf F immer nichtkonstante, nichtnegative, mit ihren ersten und zweiten Ableitungen stetige Lösungen der Gleichung

$$\Delta u = c(P)\, u\, .$$

LITERATUR

1. S. Bergman and M. Schiffer, *Kernel functions in the theory of partial differential equations of elliptic type*, Duke Math. J. 15 (1948), 535–566.
2. L. Lichtenstein, *Beiträge zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Unendliche Folgen positiver Lösungen*, Rend. Circ. Mat. Palermo 33 (1912), 201–211.
3. L. Lichtenstein, *Neuere Entwicklung der Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus*, Encyklopädie der Math. Wiss. II. 3. 2. (1923–27).
4. M. Ozawa, *Classification of Riemann surfaces*, Kōdai Math. Sem. Rep. (1952), 63–76.

UNIVERSITÄT HELSINKI, FINNLAND