MATH. SCAND. 2 (1954), 334–344

PERIODIZITÄTSEIGENSCHAFTEN UNITÄRER GRUPPEN IN HILBERTRÄUMEN

WILHELM MAAK

Ist $\mathfrak{G}$ eine Gruppe unitärer Transformationen x eines s-dimensionalen Raumes R, ist ferner f ein Vektor aus R, so ist der Bildvektor xf von f bei Anwendung von $x \in \mathfrak{G}$ eine fastperiodische Funktion von x, oder wie man sagt: Jeder Vektor aus R ist fastperiodisch bzgl. $\mathfrak{G}$. Dieser Satz ist äusserst leicht zu beweisen ([7, § 8]), und er ist grundlegend für die Theorie der fastperiodischen Funktionen. Insbesondere folgt aus ihm, dass für jedes $f \in R$ ein Integralmittelwert $M_x\{xf\}$ existiert.

Ist $\mathfrak{G}$ eine Gruppe unitärer Transformationen x eines Hilbertraumes $\mathfrak{H}$, so ist der entsprechende Satz nicht richtig: Die Vektoren $f \in \mathfrak{H}$ sind im allgemeinen nicht mehr wirklich, sondern nur noch in einem abgeschwächten Sinne fastperiodisch bzgl. $\mathfrak{G}$. Am Ende des Paragraphen 3 dieser Abhandlung habe ich den angedeuteten Sachverhalt so formuliert: Jeder Vektor aus $\mathfrak{H}$ ist ω-fastperiodisch bzgl. $\mathfrak{G}$. Aus diesem Satz kann man auf die Existenz des Integralmittelwertes $M_x\{xf\}$ für jedes $f \in \mathfrak{H}$ schliessen ([8]). Diese Existenzaussage ist gleichbedeutend mit dem Birkhoffschen Ergodensatz ([1]).

Es liegt sehr nahe, zu versuchen, zunächst wie im Falle endlichdimensionaler Räume nachzuweisen, dass in $\mathfrak{H}$ jeder Vektor ω-fastperiodisch ist und dann, wie angedeutet, daraus den Ergodensatz herzuleiten, ihn sozusagen in die Theorie der fastperiodischen Funktionen (oder Vektoren) einzubetten. Dies war auch ursprünglich meine Absicht gewesen, nämlich möglichst elementar die (abgeschwächte) Fastperiodizität der Vektoren in $\mathfrak{H}$ zu beweisen, ohne vom Ergodensatz oder von der Ergodizität der Vektoren Gebrauch zu machen. Es stellte sich aber bald heraus, dass es ein wirklich schwieriges Problem ist nachzuweisen, dass jeder Vektor ω-fastperiodisch ist. Ich habe bisher keinen Beweis dafür gefunden, der nicht von Schlüssen Gebrauch macht, welche ebenso gut zum Beweis des Ergodensatzes benutzt werden könnten. Auch dann noch, wenn man den Ergodensatz als bekannt ansieht, ist es nicht trivial,

---

Eingegangen am 23. Oktober 1954.

die Periodizitätseigenschaften der Vektoren des Hilbertraumes zu erkennen.

Ich habe daraus die Folgerung gezogen, dass dem Ergodensatz und vor allem der Beweismethode Birkhoffs innerhalb der Theorie der verallgemeinerten fastperiodischen Funktionen eine fundamentale Bedeutung zukommt, ganz entgegen dem, was ich ursprünglich zu glauben geneigt war (siehe [8], vergl. [3]). So wird denn auch in vorliegender Abhandlung bereits am Anfang (in den §§ 1 und 2) die Ergodizität von Funktionen und Vektoren ausführlich behandelt, der Mittelwertsatz und (nebenbei auch), ohne dass von Periodizitätseigenschaften die Rede ist, der Ergodensatz bewiesen. Im Paragraphen 3 wird dann mit Hilfe des Mittelwertsatzes gezeigt, dass sich jeder Vektor des Hilbertraumes $\mathfrak{H}$ eindeutig als Summe eines fastperiodischen Vektors und eines »Fluchtvektors« auffassen lässt. Letzterer durchmisst die unendlich vielen Dimensionen des Hilbertraumes auf solche Weise, dass er fast nie in eine bestimmte Richtung weist. Dieser Zerlegungssatz (§ 3 Satz 5) gibt aufs Genaueste über die Periodizitätseigenschaften der Vektoren in $\mathfrak{H}$ Auskunft. Insbesondere folgt aus ihm, dass jeder Vektor ω-fastperiodisch ist. Der Satz steht in Beziehung zu einem ähnlichen Satz aus der Theorie der positivdefiniten Funktionen (Godement [4, Chap. III]). Wir machen auch von einigen Schlussweisen Godements Gebrauch; insgesamt gesehen ist aber unser Beweis des allgemeineren Satzes einfacher als Godements Beweis des Satzes über positivdefinite Funktionen. Insbesondere brauchen wir nicht wie Godement die Hauptsätze der Theorie fastperiodischer Funktionen heranzuziehen. Auf die merkwürdigen Anwendungsmöglichkeiten des Zerlegungssatzes soll hier nicht eingegangen werden.

Die skizzierten Ideen haben sich insofern bewährt, als es neuerdings Herrn Jacobs in München gelungen ist, die gesamte Theorie vom Falle unitärer Gruppen auf den Fall beliebiger beschränkter Gruppen dadurch zu übertragen, dass er die Schlussweisen Birkhoffs beim Beweis des Ergodensatzes sorgsam prüfte und in ihrer Anwendbarkeit verschärfte. In einer ersten Abhandlung [5] behandelt Herr Jacobs den Ergodensatz und in einer weiteren [6] den Zerlegungssatz für beliebige beschränkte Gruppen.

1. Ergodische Funktionen. Es sei ein Hilbertraum $\mathfrak{H}$ gegeben (siehe z. B. [10]). Ist $f \in \mathfrak{H}$, so setzt man $|f| = (f, f)^{\frac{1}{2}}$. Die Kugeln $|f| < \varepsilon$ mit Radius $\varepsilon > 0$ um $0 \in \mathfrak{H}$ bilden ein vollständiges System von Umgebungen U_ε der $0 \in \mathfrak{H}$ in der sogenannten *starken Topologie* des Hilbertraumes. Bestimmt man zu beliebig vorgegebenen $h_1, \ldots, h_s \in \mathfrak{H}$

und $\varepsilon > 0$ die Menge aller f mit

$$|(h_\sigma, f)| < \varepsilon, \qquad \sigma = 1, \ldots, s,$$

so erhält man eine Umgebung $U[h_1, \ldots, h_s; \varepsilon]$ der $0 \in \mathfrak{H}$ in der sogenannten *schwachen Topologie* des Hilbertraumes. Sämtliche $U[h_1, \ldots, h_s; \varepsilon]$ bilden ein vollständiges Umgebungssystem der $0 \in \mathfrak{H}$ in dieser Topologie.

$\mathfrak{G}$ sei eine beliebige Gruppe. Mit $f(x)$ bezeichnen wir eine Funktion der Elemente $x \in \mathfrak{G}$ mit Werten in $\mathfrak{H}$. Wir setzen $f(x)$ im Sinne der Norm stets beschränkt voraus.

Eine Funktion $f(x)$ heisst *rechtsergodisch*, wenn zu jedem U Elemente $b_1, \ldots, b_r \in \mathfrak{G}$ existieren, so dass

$$r^{-1} \sum_{\varrho=1}^{r} f(xb_\varrho) - r^{-1} \sum_{\varrho=1}^{r} f(yb_\varrho) \in U$$

für beliebige $x, y \in \mathfrak{G}$ gilt. Man nennt $r^{-1} \sum_{\varrho=1}^{r} f(b_\varrho) = M^R{}_U$ einen Näherungsmittelwert von $f(x)$. Entsprechend erklärt man *linksergodisch* und $M^L{}_U$. Im allgemeinen wird der Zusatz »stark« oder »schwach« gemacht werden müssen, um darauf hinzuweisen, welche der beiden Topologien zugrunde gelegt ist. Wenn eine Funktion sowohl rechts- wie auch linksergodisch ist, so heisse sie *ergodisch*. Dabei ist zugelassen, dass die Funktion z. B. stark rechts- und schwach linksergodisch ist; in dieser Abhandlung sind alle vorkommenden Beispiele ergodischer Funktionen von dieser Art.

Ein Element $M \in \mathfrak{H}$ wird dann *Mittelwert von* $f(x)$ genannt,

$$M = M_x\{f(x)\},$$

wenn für jede Umgebung U Elemente $x_1, \ldots, x_N$ bzw. $y_1, \ldots, y_{N'}$ existieren, so dass für alle $c, d \in \mathfrak{G}$ gilt

$$M - N^{-1} \sum_{\nu=1}^{N} f(cx_\nu) \in U, \qquad M - N'^{-1} \sum_{\nu=1}^{N'} f(y_\nu d) \in U.$$

Es genügt dabei, die schwache Topologie zugrunde zu legen.

Satz 1 (Mittelwertsatz). *Jede ergodische Funktion $f(x)$ besitzt einen eindeutig durch $f(x)$ bestimmten Mittelwert $M = M_x\{f(x)\}$.*

Beweis: Der Beweis lässt sich bereits führen, wenn man nur verlangt, dass $f(x)$ sowohl rechts- wie auch linksergodisch ist bzgl. der schwachen Topologie. Wir wollen aber annehmen, dass $f(x)$ stark rechtsergodisch und schwach linksergodisch ist. Dann existieren zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$

und zu vorgegebenem U der schwachen Topologie Näherungsmittelwerte $M^R{}_\varepsilon$ (wo ε für U_ε steht) und $M^L{}_U$ und Elemente $x_1, \ldots, x_n$ bzw. $y_1, \ldots, y_m \in \mathfrak{G}$, so dass für alle $c, d \in \mathfrak{G}$ gilt

$$M^R{}_\varepsilon - n^{-1} \sum_{\nu=1}^{n} f(cx_\nu) \in U_\varepsilon, \qquad M^L{}_U - m^{-1} \sum_{\mu=1}^{m} f(y_\mu d) \in U .$$

Setzt man für c ein $y_1, \ldots, y_m$ und setzt man für d ein $x_1, \ldots, x_n$, so ergibt sich

(1) $$M^R{}_\varepsilon - M^L{}_U$$

$$= \left(M^R{}_\varepsilon - m^{-1}n^{-1} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m} f(y_\mu x_\nu)\right) + \left(m^{-1}n^{-1} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m} f(y_\mu x_\nu) - M^L{}_U\right)$$

$$\in U_\varepsilon + U .$$

Alle $M^L{}_U$ liegen innerhalb einer endlichen Kugel in $\mathfrak{H}$. Solche Kugeln sind bekanntlich schwach kompakt (im Sinne von Bourbaki [2, Chap. I, § 10]). (Siehe z. B. Eberlein [3]. Hier findet sich auch weitere Literatur zitiert.) Deshalb ([2, Chap. I, § 6]) existiert ein M, das folgende Eigenschaften hat: Zu vorgegebenen Umgebungen U_0, V_0 der schwachen Topologie existiert eine schwache Umgebung $U^\cdot \subset U_0$ mit

$$M - M^L{}_{U^\cdot} \in V_0 .$$

Somit folgt aus (1)

$$M^R{}_\varepsilon - M = M^R{}_\varepsilon - M^L{}_{U^\cdot} + M^L{}_{U^\cdot} - M \in U_\varepsilon + U^\cdot + V_0 .$$

Da $U^\cdot \subset U_0$ und da U_0, V_0 beliebig waren, liegt also $M^R{}_\varepsilon - M$ in der schwach abgeschlossenen Hülle von U_ε. Da U_ε konvex ist, sind aber die schwache und die starke Hülle von U_ε identisch (siehe [3]). Also ergibt sich

$$|M^R{}_\varepsilon - M| \leqq \varepsilon .$$

Setzen wir $M^L{}_{U^\cdot} = m^{\cdot -1} \sum_{\mu=1}^{m^\cdot} f(y^\cdot{}_\mu)$, so haben wir

$$|M - n^{-1} \sum_{\nu=1}^{n} f(cx_\nu)| < 2\varepsilon, \qquad M - m^{\cdot -1} \sum_{\mu=1}^{m^\cdot} f(y^\cdot{}_\mu d) \in V_0 + U^\cdot .$$

Da $U^\cdot \subset U_0$ und da U_0, V_0 beliebig waren, ist unser Satz bewiesen. Unsere Herleitung zeigt, dass auch gelten muss:

Satz 2. *Ist $f(x)$ stark rechtsergodisch und in irgend einer der beiden Topologien linksergodisch, so existieren zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ Elemente $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{G}$, so dass für alle $c \in \mathfrak{G}$*

$$|M_x\{f(x)\} - n^{-1} \sum_{\nu=1}^{n} f(cx_\nu)| < \varepsilon .$$

Ausserdem erkennt man sofort:

Satz 3. *Ist $f(x)$ ergodisch, und hat man eine Folge von Näherungsmittelwerten der Gestalt $n^{-1}\sum_{\nu=1}^{n} f(cx_\nu)$, die im Sinne der starken Topologie gleichmässig in c gegen M^* konvergiert, so ist $M^* = M_x\{f(x)\}$.*

Sind die Funktionen $f(x)$, $g(x)$, $f(x)+g(x)$ und $f(cxd)$ ergodisch, so gilt

$$M_x\{f(x)+g(x)\} = M_x\{f(x)\} + M_x\{g(x)\},$$

(3) $$M_x\{f(cxd)\} = M_x\{f(x)\}.$$

Auf die Herleitung dieser und weiterer Formeln will ich verzichten.

2. Der Ergodensatz. Von nun an sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe unitärer Transformationen in dem Hilbertraum $\mathfrak{H}$. Wenn $x \in \mathfrak{G}$ den Vektor $f \in \mathfrak{H}$ in $f' \in \mathfrak{H}$ überführt, so schreiben wir

$$f' = xf.$$

Jedem $f \in \mathfrak{H}$ entspricht vermöge

$$f(x) = xf$$

eine Funktion der $x \in \mathfrak{G}$. Wenn diese Funktion ergodisch oder rechtsergodisch oder linksergodisch ist, so heisst auch f *ergodisch* bzw. *rechtsergodisch* bzw. *linksergodisch.*

Wir bedienen uns zukünftig einer abkürzenden Schreibweise, indem wir für Operatoren der Gestalt $r^{-1}\sum_{\varrho=1}^{r}$ grosse lateinische Buchstaben verwenden. Z. B. bedeutet $B = r^{-1}\sum_{\varrho=1}^{r} b_\varrho$ mit $b_\varrho \in \mathfrak{G}$ den Operator

$$f \to Bf = r^{-1}\sum_{\varrho=1}^{r} b_\varrho f.$$

Es sollen nun Beispiele ergodischer Funktionen bzw. Vektoren angegeben werden.

Satz 1. *Jeder Vektor $f \in \mathfrak{H}$ ist stark rechtsergodisch.*

Beweis: Wir zeigen, dass zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein Operator B existiert mit

(1) $$|xBf - yBf| < \varepsilon \qquad \text{für beliebige } x, y \in \mathfrak{G}.$$

Wäre nämlich für $x_1, x_2 \in \mathfrak{G}$ die Differenz $|x_1 f - x_2 f| > \varepsilon$, also für geeignetes ε_1

$$|x_1 f - x_2 f| > 2\,\varepsilon_1\,|f| > \varepsilon,$$

so folgt für $X_1 = \frac{1}{2}(x_1+x_2)$ wegen der Konvexität des Hilbertraumes (siehe etwa [10, S. 7])

$$|X_1 f|^2 = \tfrac{1}{4}|x_1 f + x_2 f|^2 = \tfrac{1}{2}(|x_1 f|^2 + |x_2 f|^2) - \tfrac{1}{4}|x_1 f - x_2 f|^2$$
$$\leqq |f|^2 - \varepsilon_1{}^2 |f|^2 = |f|^2(1 - \varepsilon_1{}^2)\,.$$

Durch Anwendung von X_1 ist also f wesentlich verkleinert worden. Entweder ist nun (1) erfüllt, wenn man $B = X_1$ setzt, oder man wendet die soeben durchgeführte Schlussweise nochmals an und zwar auf $X_1 f$ statt auf f. So ergibt sich ein X_2, evtl. noch ein X_3, ... Das Verfahren muss einmal enden, wie man leicht nachrechnet, etwa mit X_n. Dann ist $B = X_n \ldots X_1$ zu setzen.

Satz 2. *Für beliebige $f, h \in \mathfrak{H}$ ist (h, xf) eine numerische ergodische Funktion.*

Beweis: Aus Satz 1 folgt, dass (h, xf) rechtsergodisch ist. Es gilt aber

$$(h, xf) = (x^{-1}h, f) = \overline{(f, x^{-1}h)}\,.$$

Die Transformationen $x^\star = x^{-1}$ bilden die zu $\mathfrak{G}$ adjungierte Gruppe $\mathfrak{G}^\star$. Offenbar ist $(f, x^\star h)$ rechtsergodisch in $\mathfrak{G}^\star$; dies aber bedeutet, dass (h, xf) linksergodisch ist.

Satz 3. *Sind $h_1, \ldots, h_s$ und f beliebig in $\mathfrak{H}$, so sind die s numerischen Funktionen $(h_1, xf), \ldots, (h_s, xf)$ »gleichgradig linksergodisch«, d. h. zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ existiert ein Operator $B = r^{-1}\sum_{\varrho=1}^{r} b_\varrho$, so dass für alle $\sigma = 1, \ldots, s$ und alle $x, y \in \mathfrak{G}$ gilt*

$$|(h_\sigma, Bxf) - (h_\sigma, Byf)| < \varepsilon\,.$$

Ich verzichte auf die Durchführung des einfachen Beweises.

Satz 4. *Jeder Vektor $f \in \mathfrak{H}$ ist schwach linksergodisch, damit also ergodisch.*

Beweis: Ist $U = U[h_1, \ldots, h_s; \varepsilon]$, so gilt für das in Satz 3 angegebene B und alle $x, y \in \mathfrak{G}$ offenbar $Bxf - Byf \in U$.

Satz 5 (Birkhoffscher Ergodensatz). *Zu vorgegebenem $f \in \mathfrak{H}$ existiert ein eindeutig bestimmtes Element $f_0 \in \mathfrak{H}$, das folgende Eigenschaften hat:*

1° *$cf_0 = f_0$ für alle $c \in \mathfrak{G}$.*

2° *Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein Operator $A = r^{-1}\sum_{\varrho=1}^{r} a_\varrho$, so dass*

$$|f_0 - Af| < \varepsilon\,.$$

Beweis: Da nach Satz 4 der Vektor f ergodisch ist, besitzt also xf einen Mittelwert (§ 1 Satz 1), und man hat natürlich

$$f_0 = M_x\{xf\}$$

zu setzen. Aus Satz 1 und § 1 Satz 2 ersehen wir, dass ein A existieren muss mit

$$|f_0 - cAf| < \varepsilon \qquad \text{für alle } c \in \mathfrak{G}\,.$$

Hieraus, oder aus § 1 (3), folgt sofort die Fixpunkteigenschaft von f_0, nämlich $cf_0 = f$ für alle $c \in \mathfrak{G}$. Die Eindeutigkeit ergibt sich schliesslich aus § 1 Satz 3.

Anmerkung: Satz 1 ist eine unmittelbare Folge des Birkhoffschen Ergodensatzes. Der Birkhoffsche Beweis des Satzes 5 hat auch ähnliche Züge wie unser Beweis des Satzes 1. Der hier gegebene Beweis des Satzes 5 ist weniger elegant als der Birkhoffsche, er dürfte aber trotzdem von prinzipiellem Interesse sein, besonders wegen der Benutzung von $\mathfrak{G}^\star$.

3. Der Zerlegungssatz. Wir geben zunächst weitere Beispiele für ergodische Funktionen an, die wir später benötigen.

Satz 1. *Für beliebige $f, g \in \mathfrak{H}$ ist $(g, xf)xf$ stark rechtsergodisch und schwach linksergodisch; diese Funktion ist also ergodisch.*

Beweis: Im Tensorprodukt $\mathfrak{H} \wedge \mathfrak{H}$ (siehe Godement [4, § 20]) induziert $\mathfrak{G}$ eine ebenfalls unitäre Gruppe von linearen Transformationen, die wir mit $\mathfrak{G}$ identifizieren können. Nach § 2 Satz 1 ist der Vektor $f \wedge f$ in $\mathfrak{H} \wedge \mathfrak{H}$ bezüglich $\mathfrak{G}$ stark rechtsergodisch; deshalb existiert zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein Operator $B = r^{-1} \sum_{\varrho=1}^{r} b_\varrho$, so dass für alle $x, y \in \mathfrak{G}$

$$|xB\cdot f \wedge f - yB\cdot f \wedge f| < \varepsilon$$

oder ausführlicher

$$\left|r^{-1} \sum_{\varrho=1}^{r} xb_\varrho f \wedge xb_\varrho f - r^{-1} \sum_{\varrho=1}^{r} yb_\varrho f \wedge yb_\varrho f\right| < \varepsilon$$

gilt. Man rechnet leicht nach, dass dann für alle $x, y \in \mathfrak{G}$ auch

$$\left|r^{-1} \sum_{\varrho=1}^{r} (g, xb_\varrho f)xb_\varrho f - r^{-1} \sum_{\varrho=1}^{r} (g, yb_\varrho f)yb_\varrho f\right| < |g|\, \varepsilon \tag{1}$$

erfüllt ist. Es ist also $(g, xf)xf$ stark rechtsergodisch. Entsprechend beweist man die andere Aussage des Satzes.

Aus dem soeben bewiesenen Satz folgt sofort die Existenz des Mittelwertes

$$f_1 = M_t\{(g, tf)tf\}\,. \tag{2}$$

Satz 2. *Die numerische Funktion* $(g, xf)(xf, h)$ *ist bei jeder Wahl von* $f, g, h \in \mathfrak{H}$ *ergodisch.*

Beweis: Aus (1) folgt

$$\left|r^{-1}\sum_{\varrho=1}^{r}(g, xb_\varrho f)(xb_\varrho f, h) - r^{-1}\sum_{\varrho=1}^{r}(g, yb_\varrho f)(yb_\varrho f, h)\right|$$
$$= \left|\left(r^{-1}\sum_{\varrho=1}^{r}(g, xb_\varrho f)xb_\varrho f - r^{-1}\sum_{\varrho=1}^{r}(g, yb_\varrho f)yb_\varrho f,\ h\right)\right| \leqq |g|\,|h|\,\varepsilon,$$

d. h. es ist $(g, xf)(xf, h)$ rechtsergodisch. Entsprechend sieht man, dass diese Funktion linksergodisch ist.

Aus Satz 2 folgt unmittelbar die Existenz des Mittelwertes

$$M_t\{(g, tf)(tf, h)\}\,.$$

Wir zeigen nun, dass eine gewisse Vertauschungsregel gilt.

Satz 3. *Für beliebige* $f, g, h \in \mathfrak{H}$ *gilt*

$$(f_1, h) = M_t\{(g, tf)(tf, h)\}\,. \tag{3}$$

Dabei ist f_1 *durch* (2) *erklärt. Diese Formel lässt sich ausführlicher folgendermassen schreiben:*

$$\big(M_t\{(g, tf)tf\},\ h\big) = M_t\{(g, tf)(tf, h)\}\,.$$

Beweis: Da nach Satz 1 die Funktion $(g, xf)xf$ stark rechtsergodisch ist, gibt es nach § 1 Satz 2 zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ Elemente $t_1, \ldots, t_N$, so dass für alle $c \in \mathfrak{G}$ gilt

$$\left|f_1 - N^{-1}\sum_{\nu=1}^{N}(g, ct_\nu f)ct_\nu f\right| < \varepsilon\,. \tag{4}$$

Daraus folgt

$$\left|(f_1, h) - N^{-1}\sum_{\nu=1}^{N}(g, ct_\nu f)(ct_\nu f, h)\right|$$
$$= \left|\left(f_1 - N^{-1}\sum_{\nu=1}^{N}(g, ct_\nu f)ct_\nu f,\ h\right)\right| < \varepsilon\,|h|\,.$$

Da dies für jedes $\varepsilon > 0$, entsprechende t_ν und sämtliche $c \in \mathfrak{G}$ gilt, folgt aus § 1 Satz 3 die behauptete Gleichung (3).

In Hinblick auf den zu formulierenden Zerlegungssatz müssen nun einige Definitionen gegeben werden.

Definition. Ein Vektor $f \in \mathfrak{H}$ heisst *fastperiodisch*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Überdeckung $\mathfrak{a}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{a}_n = \mathfrak{G}$ von $\mathfrak{G}$ existiert, so dass für beliebiges $i = 1, \ldots, n$ und beliebige $x, y \in \mathfrak{a}_i$ gilt

$$|xf - yf| < \varepsilon\,.$$

Ein Vektor $f \in \mathfrak{H}$ soll *Fluchtvektor* genannt werden, wenn

$$M_x\{|(h, xf)|^2\} = 0$$

ist für beliebige Wahl von $h \in \mathfrak{H}$. (Die Existenz dieses Mittelwertes folgt aus Satz 2.)

SATZ 4. *Bei jeder Wahl von $f, g \in \mathfrak{H}$ ist der Vektor*

$$f_1 = M_t\{(g, tf)tf\}$$

fastperiodisch.

BEWEIS: Wäre f_1 nicht fastperiodisch, so würde es ein $\varepsilon > 0$ und eine unendliche Folge $x_1, x_2, \ldots$ von Elementen aus $\mathfrak{G}$ geben, so dass

$$|x_i f_1 - x_k f_1| > 3\varepsilon \qquad \text{für } i \neq k\,. \tag{5}$$

Indem wir notfalls eine Teilfolge der x_i betrachten, dürfen wir annehmen, dass die Folge der $x_i g$ schwach konvergiert. Es ist also möglich eine Zahl Γ anzugeben, so dass für alle $i, k > \Gamma$ und die t_ν der Ungleichung (4) gilt

$$|(x_i g, t_\nu f) - (x_k g, t_\nu f)| < \varepsilon\, |f|^{-1}, \qquad \nu = 1, \ldots, N\,.$$

Daraus folgt

$$\left|N^{-1}\sum_{\nu=1}^{N}(x_i g, t_\nu f)t_\nu f - N^{-1}\sum_{\nu=1}^{N}(x_k g, t_\nu f)t_\nu f\right| < \varepsilon\,.$$

Deshalb ergibt sich für diese $x_i, x_k \in \mathfrak{G}$ unter Benutzung von (4)

$$|x_i f_1 - x_k f_1| < 3\,\varepsilon\,,$$

und das ist ein Widerspruch zu (5). Also ist f_1 fastperiodisch.

SATZ 5 (ZERLEGUNGSSATZ). *Die Menge der fastperiodischen Vektoren des Hilbertraumes $\mathfrak{H}$, in dem eine unitäre Gruppe wirkt, bildet einen abgeschlossenen invarianten Teilraum $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{H}$. Die Menge der Fluchtvektoren in $\mathfrak{H}$ bildet ebenfalls einen abgeschlossenen invarianten Teilraum $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{H}$. Die Räume $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{F}$ sind orthogonal zu einander und spannen zusammen $\mathfrak{H}$ auf, d. h. es ist*

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{R} \oplus \mathfrak{F}\,.$$

BEWEIS: Dass $\mathfrak{R}$ abgeschlossener invarianter Teilraum von $\mathfrak{H}$ ist, darf als bekannt angesehen werden. Wir bilden

$$\mathfrak{F}' = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{R}$$

und zeigen $\mathfrak{F}' = \mathfrak{F}$. Zunächst soll bewiesen werden $\mathfrak{F}' \subset \mathfrak{F}$. Es sei etwa $f \in \mathfrak{F}'$. Dann ist für beliebiges $h \in \mathfrak{H}$

$$f_1 = M_t\{(h, tf)tf\}$$

nach Satz 4 fastperiodisch. Z. B. aus (4) und der Invarianz von $\mathfrak{F}'$ entnimmt man, dass $f_1 \in \mathfrak{F}'$. Nach Definition von $\mathfrak{F}'$ muss also $f_1 = 0$ sein. Daraus folgt wegen Satz 3

$$M_t\{|(h, tf)|^2\} = (f_1, h) = 0\,.$$

Also ist f Fluchtvektor, d. h. es ist $\mathfrak{F}' \subset \mathfrak{F}$.

Nun zeigen wir $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}'$. Sei also $f \in \mathfrak{F}$; dann ist

$$f = p + f', \qquad p \in \mathfrak{R},\ f' \in \mathfrak{F}'. \tag{6}$$

Da f Fluchtvektor ist, muss gelten

$$M_x\{|(p, xf)|^2\} = 0\,. \tag{7}$$

Mit p ist auch $|(p, xf)|^2$ fastperiodisch. Deshalb folgt aus (7)

$$(p, xf) \equiv 0\,.$$

Wegen (6) und weil $\mathfrak{F}'$ invariant und senkrecht zu $\mathfrak{R}$ ist, folgt

$$(p, xp) = (p, xp) + (p, xf') = (p, xf) \equiv 0\,.$$

Dies kann nur angehen, wenn $p = 0$ ist. Also ist $f = f' \in \mathfrak{F}'$. Es sind also $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{F}'$ identisch, der Zerlegungssatz also bewiesen.

Die Periodizitätseigenschaften, welche einem jeden Vektor des Hilbertraumes zukommen, werden am besten durch den Satz 5 beschrieben. Man kann aber auch folgendermassen vorgehen. Ist $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{G}$ und $\chi(x)$ die charakteristische Funktion von $\mathfrak{N}$, so erklärt man

$$\mu(\mathfrak{N}) = \inf_{a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{G}} \ \sup_{c \in \mathfrak{G}} \ n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \chi(ca_i)\,.$$

Ist $\mu(\mathfrak{N}) = 0$, so heisst $\mathfrak{N}$ eine Nullmenge. Ein Vektor $h \in \mathfrak{H}$ werde nun *ω-rechtsfastperiodisch* genannt, wenn zu jedem U der schwachen Topologie eine Nullmenge $\mathfrak{N}_U$ und eine Überdeckung $\mathfrak{a}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{a}_n = \mathfrak{G}$ von $\mathfrak{G}$ existiert, so dass für beliebiges $i = 1, \ldots, n$ und beliebige $x, y \in \mathfrak{a}_i$ und $c \in \mathfrak{G}$ gilt

$$cxh - cyh \in U\,,$$

wofern nicht cx oder $cy \in \mathfrak{N}_U$. Entsprechend erklärt man *ω-linksfastperiodisch* und schliesslich *ω-fastperiodisch.*

Aus Satz 5 folgt, dass jeder Vektor $h \in \mathfrak{H}$ tatsächlich ω-fastperiodisch ist. Umgekehrt kann man, wenn man weiss, dass jeder Vektor ω-fastperiodisch ist, unschwer zeigen, dass der Zerlegungssatz und der Ergodensatz gelten müssen.

Wie man den Raum $\mathfrak{R}$ der fastperiodischen Vektoren in endlichdimensionale invariante Teilräume zerlegen kann, ist z. B. in [9] auseinander gesetzt. Besonderes Interesse beansprucht allerdings gegenwärtig die Zerlegung des Raumes $\mathfrak{F}$. Vergleiche hierüber z. B. Godement [4].

LITERATUR

1. L. Alaoglu, G. Birkhoff, *General ergodic theorems*, Ann. of Math., (2) 41 (1940), 293–309.
2. N. Bourbaki, *Topologie générale*, Chap. I–II (Actualités Sci. Ind. 858), Paris, 1940.
3. W. F. Eberlein, *Abstract ergodic theorems and weak almost periodic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 67 (1949), 217–240.
4. R. Godement, *Les fonctions de type positif et la théorie des groupes*, Trans. Amer. Math. Soc. 63 (1948), 1–84.
5. K. Jacobs, *Ein Ergodensatz für beschränkte Gruppen im Hilbertraum*, Math. Ann., im Druck.
6. K. Jacobs, *Periodizitätseigenschaften beschränkter Gruppen im Hilbertraum*, Math Z., im Druck.
7. W. Maak, *Fastperiodische Funktionen* (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 61), Berlin, 1950.
8. W. Maak, *Integralmittelwerte von Funktionen auf Gruppen und Halbgruppen*, J. reine angew. Math., 190 (1952), 34–48.
9. W. Maak, *Fastperiodische invariante Vektormoduln in einem metrischen Vektorraum*, Math. Ann. 122 (1950), 157–166.
10. B. v. Sz.-Nagy, *Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertraumes* (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete V, 5), Berlin, 1942.

UNIVERSITÄT MÜNCHEN, DEUTSCHLAND