MATH. SCAND. 3 (1955), 44–48

FASTPERIODISCHE FUNKTIONEN AUF DER MODULGRUPPE

WILHELM MAAK

1. Das Problem. Die Anwendungsmöglichkeiten der Theorie fastperiodischer Funktionen auf Gruppen ist, soweit es sich um kontinuierliche Gruppen handelt, nur sehr beschränkt, da häufig der Fall eintritt, dass sämtliche fastperiodische Funktionen der betreffenden Gruppe konstant sind [2] [6]. Das Interesse wendet sich deshalb besonders den diskreten Gruppen zu, z.B. der Modulgruppe oder deren Untergruppen, welche ja zu den wenigen Gruppen gehören, über die man ziemlich viel weiss. Man wird zunächst bemüht sein, die fastperiodischen Funktionen auf diesen Gruppen anzugeben.

Wir wollen uns vor allem mit der Gruppe $\Gamma(2)$, also der Gruppe aller Substitutionen

$$\tau' = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$$

beschäftigen, wobei a, b, c, d ganze Zahlen mit $ad-bc=1$ sind, die auch

$$a \equiv d \equiv 1 \pmod 2, \qquad b \equiv c \equiv 0 \pmod 2)$$

erfüllen. Bekanntlich ist $\Gamma(2)$ eine freie Gruppe von 2 erzeugenden Substitutionen

$$S(\tau) = \tau+2, \qquad T(\tau) = \frac{\tau}{-2\tau+1} \tag{1}$$

(siehe z.B. [3, S. 437]).

Um die fastperiodischen Funktionen auf $\Gamma(2)$ zu kennen, ist es nach der allgemeinen Theorie dieser Funktionen (siehe z.B. [4]) nur erforderlich, ein vollständiges System inäquivalenter irreduzibler unitärer Darstellungen von $\Gamma(2)$ anzugeben. Eine jede solche Darstellung $D(X)$ mit $X \in \Gamma(2)$ ordnet den Elementen (1) unitäre Matrizen $D(S)$ und $D(T)$ zu. Wenn man weiss, wie X sich aus den S und T aufbaut, und wenn man $D(S)$ und $D(T)$ kennt, so kennt man die ganze Darstellung. Ist etwa $D(S)=A$ und $D(T)=B$ und gilt

$$X = S^{n_1} T^{m_1} S^{n_2} \ldots S^{n_r} T^{m_r}\,, \tag{2}$$

Eingegangen am 29. Oktober 1954.

so ist

$$D(X) = A^{n_1} B^{m_1} A^{n_2} \dots A^{n_r} B^{m_r}. \tag{3}$$

Wenn es sich gar um eine Darstellung 1. Grades handelt, so gilt

$$D(X) = A^{n_1 + \dots + n_r} B^{m_1 + \dots + m_r}, \qquad |A| = |B| = 1\,. \tag{4}$$

Man erhält also sämtliche Darstellungen $D(X)$ des Grades 1 von $\Gamma(2)$, indem man irgend welche Zahlen A und B vom Betrage 1 wählt, und $D(X)$ durch (2) und (4) erklärt.

Wenn man unser Problem auf die skizzierte Weise anpackt und löst, so hat man es völlig bagatellisiert, und es ist uninteressant geworden. Wir fragten nach sämtlichen fastperiodischen Funktionen auf $\Gamma(2)$; wir haben angedeutet, wie man sie finden kann. Was aber heisst es eigentlich: »Eine Funktion kennen«? Wenn man von einer »bekannten« Funktion $F(X)$ auf $\Gamma(2)$ verlangt, dass sie einen Rechenausdruck gibt, der es gestattet, aus den Zahlen a, b, c, d, welche X charakterisieren, den Funktionswert F zu berechnen, so ist festzustellen, dass unsere oben skizzierte Lösung unseres Problems keineswegs uns die Funktionen auf $\Gamma(2)$ »bekannt« gemacht hat. Nicht einmal die Darstellungen 1. Grades sind uns vermöge der Formel (4) »bekannt«. In diesem strengeren Sinne ist unser Problem also noch ungelöst. Wir haben sämtliche Darstellungen und damit alle fastperiodischen Funktionen »charakterisiert« aber nicht »konstruiert«.

Durch diese andere Art der Fragestellung wird überraschender Weise unser Problem nicht nur interessant, sondern geradezu tief; es ist nicht ganz leicht, die Lösung anzugeben. Nur die Darstellungen 1. Grades lassen sich unmittelbar unter Benutzung bereits vorhandener Untersuchungen wirklich konstruieren, und dies soll hier zur Erläuterung der obigen Ausführungen nun geschehen.

2. Darstellungen 1. Grades von $\Gamma(2)$. Die Funktion

$$f(x) = \prod_{m=1}^{\infty} (1 - x^m)$$

ist für $|x| < 1$ regulär und $\neq 0$. Also ist $\log f(x)$ im Einheitskreis regulär. Wir beseitigen die Mehrdeutigkeit in der Definition dieser Funktion, indem wir

$$\log f(0) = 0$$

fordern. Wird $\tau = r + is$ mit $s > 0$ gesetzt, so ist $e^{2\pi i\tau} = e^{-2\pi s} e^{2\pi i r}$ im Einheitskreis gelegen, $e^{2\pi i z}$ bildet die obere Halbebene auf den Einheitskreis ab. Also ist $\log f(e^{2\pi i\tau})$ in der oberen Halbebene eindeutig bestimmt.

Man setzt

$$\log \eta(\tau) = \tfrac{1}{12}\pi i \tau + \log f(e^{2\pi i \tau}) .$$

Das Verhalten dieser Funktion gegenüber Modulsubstitutionen

$$\tau' = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \qquad a, b, c, d \text{ ganz}, \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1 ,$$

ist schon oft (erstmalig von Dedekind in seinen Erläuterungen zu Fragmenten aus Riemanns Nachlass [1]) untersucht worden. Z.B. findet man in einer Abhandlung von Rademacher ([5, S. 323])

$$(5)\quad \log \eta(\tau') = \log \eta(\tau) + (\operatorname{sign} c)^2 \tfrac{1}{2} \log(c\tau+d) - \tfrac{1}{4}\pi i \operatorname{sign} c + \tfrac{1}{12}\pi i \,\Phi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit

$$-\pi < \operatorname{Im} \log(c\tau+d) < \pi \qquad \text{für } c \neq 0$$

und

$$\operatorname{sign} c = \begin{cases} c/|c| & \text{für} \quad c \neq 0 , \\ 0 & \;\;,, \quad\;\; c = 0 . \end{cases}$$

Der wichtigste und interessanteste Bestandteil der Formel (5) ist aber

$$\Phi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{cases} b/d & \text{für} \quad c = 0 , \\ (a+d)/c - 12 \operatorname{sign} c \; s(a, |c|) & \;\;,, \quad\;\; c \neq 0 . \end{cases}$$

Hierin bedeutet

$$s(h, k) = \sum_{\mu=1}^{k-1} (\mu/k - [\mu/k] - \tfrac{1}{2})(h\mu/k - [h\mu/k] - \tfrac{1}{2}) .$$

Wie üblich ist $[u]$ die grösste ganze Zahl $\leqq u$. Es ist Φ stets ganzzahlig.

Übt man auf τ zwei Modulsubstitutionen nacheinander aus, so erhält man aus (5) zunächst für Φ und dann für $s(h, k)$ gewisse eigenartige Beziehungen, z.B.

$$12\, s(h, k) + 12\, s(k, h) = -3 + h/k + k/h + 1/(hk) .$$

Darauf soll nicht weiter eingegangen werden. Diese Verhältnisse sind aber doch die eigentliche Ursache dafür, dass es im folgenden gelingt, eine Darstellung von $\Gamma(2)$ anzugeben.

Wir bilden statt $\log \eta(\tau)$ folgende noch von zwei reellen Parametern α, β abhängige Funktion

$$\log h(\tau) = \alpha \log \eta(2\tau) + \beta \log \eta(\tfrac{1}{2}\tau) - (\alpha+\beta) \log \eta\big(\tfrac{1}{2}(\tau+1)\big) .$$

Ersetzt man hierin τ durch

$$\tau' = \frac{a\tau+b}{c\tau+d} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod 2,$$

so kann man schreiben

$$\log h(\tau') = \alpha \log \eta\left(\frac{a\, 2\tau + 2b}{\frac{1}{2}c\, 2\tau + d}\right) + \beta \log \eta\left(\frac{a\,\frac{1}{2}\tau + \frac{1}{2}b}{2c\,\frac{1}{2}\tau + d}\right) -$$

$$- (\alpha+\beta) \log \eta\left(\frac{(a+c)\,\frac{1}{2}(\tau+1) + \frac{1}{2}(b+d-a-c)}{2c\,\frac{1}{2}(\tau+1) + (d-c)}\right).$$

Wendet man hierauf die Formel (5) an, so ergibt sich

$$(6)\quad \log h(\tau') = \log h(\tau) + \tfrac{1}{12}\pi i \left[\alpha\, \Phi\begin{pmatrix} a & 2b \\ \frac{1}{2}c & d \end{pmatrix} + \beta\, \Phi\begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ 2c & d \end{pmatrix} - \right.$$

$$\left. - (\alpha+\beta)\, \Phi\begin{pmatrix} a+c & \frac{1}{2}(b+d-a-c) \\ 2c & d-c \end{pmatrix}\right].$$

Nennen wir

$$\Psi_{\alpha\beta}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha\, \Phi\begin{pmatrix} a & 2b \\ \frac{1}{2}c & d \end{pmatrix} + \beta\, \Phi\begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ 2c & d \end{pmatrix} - (\alpha+\beta)\, \Phi\begin{pmatrix} a+c & \frac{1}{2}(b+d-a-c) \\ 2c & d-c \end{pmatrix},$$

so können wir (6) auch schreiben

$$\log h(\tau') = \log h(\tau) + \tfrac{1}{12}\pi i\, \Psi_{\alpha\beta}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

oder

$$h(\tau') = h(\tau) \exp\left[\tfrac{1}{12}\pi i\, \Psi_{\alpha\beta}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right].$$

Man sieht, dass die

$$(7)\qquad \exp\left[\tfrac{1}{12}\pi i\, \Psi_{\alpha\beta}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]$$

eine Darstellung 1. Grades von $\Gamma(2)$ bilden, die noch von 2 Parametern abhängt. Da diese Parameter und damit Ψ reell sind, ist (7) vom Betrage 1, die Darstellung ist also unitär.

Um zu erkennen, dass (7) sämtliche Darstellungen ersten Grades ergibt, braucht man sich nur daran zu erinnern, dass die Darstellungen durch ihre Werte für S und T charakterisiert sind. Eine ganz elementare Rechnung liefert

$$\Psi_{\alpha\beta}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3\alpha, \qquad \Psi_{\alpha\beta}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 3\beta\,.$$

Damit ist gezeigt, dass zu willkürlich vorgeschriebenen Zahlen A, B vom Betrage 1 stets α, β so gewählt werden können, dass (7) den erzeugenden Substitutionen S und T die Werte A bzw. B zuordnet.

LITERATUR

1. R. Dedekind, *Erläuterung zu den Fragmenten* XXVIII, in B. Riemann's Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass, 2. Aufl., Leipzig, 1892, S. 466–478 (=R. Dedekind, Gesammelte mathematische Werke I, Braunschweig, 1930, S. 159–173).
2. H. Freudenthal, *Topologische Gruppen mit genügend vielen fastperiodischen Funktionen*, Ann. of Math. 37 (1936), 57–77.
3. R. Fricke, *Elliptische Funktionen* I, Leipzig und Berlin, 1916.
4. W. Maak, *Fastperiodische Funktionen*, Berlin, 1950.
5. H. Rademacher, *Zur Theorie der Modulfunktionen*, J. reine angew. Math. 167 (1932), 312–336.
6. A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications* (Actualités Sci. Ind. 869), Paris, 1940.

UNIVERSITÄT MÜNCHEN, DEUTSCHLAND