MATH. SCAND. 3 (1955), 75–89

EINE VERBESSERUNG DES RESTGLIEDES BEIM ELEMENTAREN BEWEIS DES PRIMZAHLSATZES

P. KUHN

1. Einleitung. Beim elementaren Beweis des Primzahlsatzes [1] [2] wird die diesem Satze äquivalente Relation

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leqq x} \log p = x + o(x) \tag{1.1}$$

abgeleitet, in der x eine natürliche Zahl ist, während p die Reihe der Primzahlen durchläuft.

Im Folgenden beweisen wir elementar die schärfere Abschätzung

$$\vartheta(x) = x + O(x \log^{-c} x), \quad c = \tfrac{1}{10}. \tag{1.2}$$

Mit kleinen und grossen lateinischen Buchstaben, mit und ohne Index, bezeichnen wir in der Regel positive ganze Zahlen, mit p Primzahlen. Doch dürfen m und s, wo dies ausdrücklich angegeben ist, auch den Wert Null annehmen. Ferner werden positive Konstanten, auch wenn sie nicht ganze Zahlen sind, mit $c, c_1, c_2, \ldots, C, C_1, C_2, \ldots$ bezeichnet. Schliesslich bedeuten $R(\eta)$ und $Q(\varkappa)$ Funktionen, deren Funktionswerte nicht positive ganze Zahlen sind. Wir führen ferner die Bezeichnung ein:

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{wenn } n \text{ eine Primzahlpotenz } p^k, \\ 0 \quad , & \text{wenn } n \text{ keine Primzahlpotenz ist,} \end{cases}$$

und setzen

$$\psi(x) = \sum_{n \leqq x} \Lambda(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \vartheta(x^{1/k}). \tag{1.3}$$

Da $\psi(x) = \vartheta(x) + O(x^{\frac{1}{2}})$ ist, genügt es statt (1.2) die Relation

$$\psi(x) = x + O(x \log^{-c} x), \quad c = \tfrac{1}{10}, \tag{1.4}$$

zu beweisen (Theorem 2 im § 3, S. 88).

Die Funktion $\psi(x)$ genügt der Tschebyscheff-Polignac-schen Identität

$$\sum_{m \leqq x} \psi(xm^{-1}) = \sum_{n \leqq x} \Lambda(n)[xn^{-1}] = \log(x!) = x \log x - x + O(\log x). \tag{1.5}$$

Eingegangen am 1. Juli 1954.

Die Ungleichheit (Formel (1.3) in [1])

$$\vartheta(x)\log x + \sum_{p\leqq x}\log p\,\vartheta(xp^{-1}) = 2x\log x + O(x)$$

kann in der äquivalenten Form

$$\psi(x)\log x + \sum_{n\leqq x}\Lambda(n)\,\psi(xn^{-1}) = 2x\log x + O(x) \tag{1.6}$$

geschrieben werden. Auf Grund von (1.5) und (1.6) soll (1.4) bewiesen werden.

Im Folgenden verwenden wir die Bezeichnung

$$R(\eta) = R([\eta]) = \psi(\eta)-[\eta]\,.$$

Mertens [3] hat aus (1.5) die Ungleichheiten

$$|R(\eta)| \leqq \eta\,, \tag{1.7}$$

$$\Big|\sum_{n\leqq x}\Lambda(n)\,n^{-1}-\log x\Big| < 2 \tag{1.8}$$

abgeleitet, während Tschebyscheff, ebenfalls auf Grund von (1.5), die Ungleichheit

$$|R(\eta)| \leqq 0{,}11\,\eta, \qquad \eta \geqq x_1\,, \tag{1.9}$$

bewies, wo x_1 eine bestimmte natürliche Zahl bedeutet. (Vgl. [4, S. 87–95], wo für $\varepsilon>0$, $x\geqq x_0(\varepsilon)$

$$\lambda(1-\varepsilon)x < \psi(x) < 1{,}2\,\lambda(1+\varepsilon)x\,, \qquad \lambda = 0{,}92129\ldots\,,$$

bewiesen wird).

Es sei $M\leqq x$. Wir erhalten dann

$$\sum_{M<n\leqq x}\psi(xn^{-1}) = \sum_{M<n\leqq x}\;\sum_{m\leqq x/n}\Lambda(m) = \sum_{m\leqq x/M}\Lambda(m)([xm^{-1}]-M)\,,$$

und daraus folgt, wenn wir die Summe links in (1.5) in zwei Summen teilen, so dass $n\leqq M$ und $M<n\leqq x$ ist, die Relation

$$\sum_{n\leqq M}\psi(xn^{-1}) + \sum_{m\leqq x/M}\Lambda(m)[xm^{-1}] - M\,\psi(xM^{-1}) = x\log x - x + O(\log x)\,,$$

aus der sich auf Grund von (1.7) und (1.8) gleichmässig in M

$$\sum_{n\leqq M}R(xn^{-1}) = O(x) \tag{1.10}$$

ergibt.

Wir werden (1.6) in eine für unsere Zwecke geeignetere Gestalt bringen. Da

$$\sum_{n \leqq x} \Lambda(n)\, \psi(xn^{-1}) = 2 \sum_{n^2 \leqq x} \Lambda(n)\, \psi(xn^{-1}) - \left(\psi(x^{\frac{1}{2}})\right)^2$$

ist, kann (1.6) in der Form

$$R(x) \log x = -2 \sum_{n^2 \leqq x} \Lambda(n)\, R(xn^{-1}) + O(x)$$

oder, wenn wir (1.10) mit $M = [x^{\frac{1}{2}}]$ zweimal hiervon subtrahieren, in der Form

$$|R(x)| \log x \leqq 2 \Big| \sum_{n^2 \leqq x} \big(\Lambda(n) - 1\big) R(xn^{-1}) \Big| + O(x) \tag{1.11}$$

geschrieben werden.

In unserem Beweise für (1.4) schliessen wir an (1.9) an. Wir setzen uns nämlich zum Ziel, eine Folge natürlicher Zahlen y_i, $i = 1, 2, \ldots$, $y_i < y_{i+1}$ und eine Folge hierzu gehöriger Zahlen $\alpha(y_i)$ zu konstruieren, so dass $\alpha(y_i) > \alpha(y_{i+1})$ und weiter

$$|R(\eta)| \leqq \eta\, \alpha(y_i) \qquad \text{für} \qquad \eta \geqq y_i \tag{1.12}$$

wird, wobei $y_1 = x_1$ die Zahl aus (1.9) und $\alpha(x_1) = 0{,}11$ sei.

Es wird sich dann in § 3 zeigen, dass, wenn man von einem gewissen Index $i = I$ an die y_i gemäss

$$y_{I+m} = \left[c_1^{c_2^m}\right], \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.13}$$

mit konstanten c_1 und c_2 wählt, Zahlen, die (1.12) genügen, auf Grund der Relation

$$\alpha(y_{I+m}) = c_3\, c_4^m, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.14}$$

mit konstanten c_3, c_4 bestimmt werden können.

Der für unseren Beweis wichtigste Satz wird im § 2 hergeleitet und lautet:

THEOREM 1. *Falls für $\eta \geqq N \geqq x_1$ die Ungleichheiten*

$$|R(\eta)| \leqq \beta(N)\, \eta \qquad \textit{mit} \qquad \beta(N) \leqq \alpha(x_1) = 0{,}11 \tag{1.15}$$

gelten und ferner die zwei Zahlen L und x den Ungleichheiten

$$N^2 \leqq L, \qquad L^2 \leqq x \tag{1.16}$$

Genüge leisten, gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} & x^{-1} \Big| \sum_{N < n \leqq L} \big(\Lambda(n) - 1\big) R(xn^{-1}) \Big| \\ & \leqq 0{,}75\, \beta(N) \big(1 + \beta(N)\big) \log(LN^{-1}) + O(\log L \log^{-\frac{1}{2}} N)\,. \end{aligned} \tag{1.17}$$

BEMERKUNG. Relation (1.17) dient zur Abschätzung der Summe in (1.11). Wir können (1.17) (auf die gleiche Weise wie in § 2) auch dann beweisen, wenn (1.16) durch die folgenden etwas schwächeren Ungleichheiten ersetzt wird:

$$N^{\gamma} \leqq L \quad \text{für} \quad \gamma > 1, \qquad NL \leqq x\,. \tag{1.16'}$$

2. Beweis von Theorem 1. Wenn n den Ungleichheiten $N < n \leqq L$ und L der zweiten Ungleichheit in (1.16) oder (1.16′) genügt, so dass $xn^{-1} \geqq xL^{-1} \geqq N$ ist, gilt gemäss (1.15)

$$nx^{-1}\,|R(xn^{-1})| \leqq \beta(N), \qquad n^{-1}\,|R(n)| \leqq \beta(N), \qquad \beta(N) \leqq 0{,}11\,.$$

Da N in § 2 eine feste Zahl ist, schreiben wir jetzt β für $\beta(N)$ und setzen

$$\delta = \log^{-\frac{1}{2}} N\,. \tag{2.1}$$

Wir betrachten $R(\eta)$ für die Argumente η_m und η_{-m}, $m = 0, 1, 2, \ldots,$ die wir auf folgende Weise definieren:

$$\eta_m = N(1+\delta)^m, \qquad \eta_m\,\eta_{-m} = x\,, \tag{2.2}$$

und führen die Bezeichnungen:

$$\eta_m^{-1}\,\{R(\eta_{m+1}) - R(\eta_m)\} = \sigma(m)\,, \tag{2.3}$$

$$\eta_{-m}^{-1}\,R(\eta_{-m}) = \varrho(m) \tag{2.4}$$

ein, wobei m die Werte $\leqq r$ durchläuft und r durch

$$r = [\log(LN^{-1})\log^{-1}(1+\delta)] \tag{2.5}$$

bestimmt sei. Es ist dann $\eta_m \geqq N$, $\eta_{-m} \geqq N$ und daher gemäss (1.15)

$$\eta_m^{-1}\,|R(\eta_m)| \leqq \beta\,, \tag{2.6}$$

$$|\varrho(m)| \leqq \beta\,. \tag{2.7}$$

Nun sei $0 \leqq \varDelta \leqq \delta$. Da (1.6) auch für nichtganzzahliges Argument gilt, können wir x erst durch $\eta + \varDelta\eta$ und dann durch η ersetzen. Als Differenz ergibt sich

$$\psi(\eta+\varDelta\eta) - \psi(\eta) + \log^{-1}\eta \sum_{n \leqq \eta+\varDelta\eta} \varLambda(n)\,\{\psi((\eta+\varDelta\eta)n^{-1}) - \psi(\eta n^{-1})\}$$
$$= 2\varDelta\eta + O(\eta\log^{-1}\eta)\,.$$

Die obige Summe besteht aus lauter nichtnegativen Summanden, so dass

$$0 \leqq \psi(\eta+\varDelta\eta) - \psi(\eta) \leqq 2\varDelta\eta + O(\eta\log^{-1}\eta) \tag{2.8}$$

ist und, wenn die Konstante C genügend gross gewählt wird, die Relation gilt:

$$\eta^{-1}\,|R(\eta+\Delta\eta)-R(\eta)| \leqq \Delta + C\log^{-1}\eta\,. \tag{2.9}$$

Wir beweisen nun

LEMMA 1. *Für $\varrho(m)$ und $\sigma(m)$ gelten folgende Ungleichheiten:*

$$|\varrho(m)| \leqq \beta\,, \tag{2.7}$$

$$|\varrho(m+1)-\varrho(m)| \leqq \delta(1+\beta)+C\delta^2\,, \tag{2.10}$$

$$|\sigma(m)| \leqq \delta+C\delta^2\,, \tag{2.11}$$

$$\Big|\sum_{v\leqq m\leqq v+w}\sigma(m)\Big| \leqq 2\beta+(w+1)\beta\delta\,. \tag{2.12}$$

Wir bemerken, dass $\eta_{-m}=\eta_{-m-1}(1+\delta)$, also

$$\varrho(m)-\varrho(m+1) = \eta_{-m-1}{}^{-1}\,\{R(\eta_{-m-1}(1+\delta))-R(\eta_{-m-1})\} - \delta\eta_{-m}{}^{-1}\,R(\eta_{-m})$$

ist. Aus Relation (2.9) für $\eta=\eta_{-m-1}$ und $\Delta=\delta$ und aus (2.7) folgt (2.10). Ebenso folgt aus Relation (2.9) für $\eta=\eta_m$ und $\Delta=\delta$ Ungleichheit (2.11). Schliesslich ist $\eta_m{}^{-1}-\eta_{m+1}{}^{-1}=\delta\eta_{m+1}{}^{-1}$ und daher

$$\sum_{v\leqq m\leqq v+w}\sigma(m) = -\eta_v{}^{-1}R(\eta_v)+\delta\sum_{v+1\leqq m\leqq v+w}\eta_m{}^{-1}R(\eta_m)+\eta_{v+w}{}^{-1}R(\eta_{v+w+1})\,,$$

und daraus ergibt sich, wegen $\eta_{v+w}{}^{-1}=(1+\delta)\eta_{v+w+1}{}^{-1}$ und Relation (2.6) Ungleichheit (2.12).

Wir wollen nun die Summe in (1.17) durch $\varrho(m)$ und $\sigma(m)$ ausdrücken.

LEMMA 2. *Es ist*

$$x^{-1}\sum_{N<n\leqq L}\big(\Lambda(n)-1\big)R(xn^{-1}) - \sum_{m=0}^{r-1}\varrho(m)\sigma(m) = O(\delta\log L)\,, \tag{2.13}$$

wo r durch (2.5) *gegeben ist.*

Es sei $\eta_{-m-1}\leqq xn^{-1}<\eta_{-m}$. Wir setzen $\eta_{-m}=xn^{-1}(1+\Delta)$, wo $0<\Delta\leqq\delta$ ist, und erhalten aus (2.9) für $\eta=xn^{-1}$

$$R(xn^{-1}) = R(\eta_{-m})+O(\delta\eta_{-m}) = \eta_{-m}\big(\varrho(m)+O(\delta)\big)\,.$$

Aus (2.3) ergibt sich, wenn die folgende Summe für $\eta_m<n\leqq\eta_{m+1}$ genommen wird:

$$\sum\big(\Lambda(n)-1\big) = \eta_m\,\sigma(m)\,,$$

$$\sum\big(\Lambda(n)-1\big)R(xn^{-1}) = \eta_m\,\sigma(m)\,\eta_{-m}\,\varrho(m) + O\Big(\sum|\Lambda(n)-1|\,\delta\eta_{-m}\Big)\,.$$

Nun ist

$$\sum|\Lambda(n)-1| \leqq \sum\Lambda(n)+\sum 1,\qquad \sum 1 = [\eta_{m+1}]-[\eta_m] = O(\delta\eta_m)\,,$$

$$\sum\Lambda(n) = \psi\big(\eta_m(1+\delta)\big)-\psi(\eta_m)\,.$$

Aus (2.8) mit $\eta=\eta_m$, $\Delta=\delta$ ergibt sich nun wegen (2.1)

$$\sum \Lambda(n) \leqq 2\delta\eta_m + O(\delta^2\eta_m) = O(\delta\eta_m),$$
$$\sum |\Lambda(n)-1| = O(\delta\eta_m),$$
$$\sum \big(\Lambda(n)-1\big) R(xn^{-1}) = x\,\{\sigma(m)\,\varrho(m) + O(\delta^2)\}. \tag{2.14}$$

Schliesslich ist, wenn die Summe über $\eta_r < n \leqq L$ genommen wird, wegen

$$\sum n^{-1} = O\big(\log(1+\delta)\big), \qquad |\Lambda(n)-1| \leqq \log L,$$
$$\sum x^{-1} n R(xn^{-1})\big(\Lambda(n)-1\big) n^{-1} = O(\delta \log L). \tag{2.15}$$

Aus (2.14) und (2.5), sowie aus (2.15) folgt für die rechte Seite von (2.13)

$$r\,O(\delta^2) + O(\delta \log L) = O(\delta \log L),$$

was zu beweisen war.

Die Summe

$$\sum_{m=0}^{r-1} \varrho(m)\,\sigma(m) \tag{2.16}$$

lässt sich in lauter Teilsummen der $\varrho(m)\sigma(m)$ zerlegen, so dass in jeder Teilsumme alle aufeinander folgenden $\varrho(m)\sigma(m)$ gesammelt sind, in denen entweder alle $\varrho(m)>0$ oder alle $\varrho(m)<0$ oder alle $\varrho(m)=0$ sind. Die letzteren Teilsummen können wir fortlassen, da sie zu der Gesamtsumme nichts beitragen. Wir führen für die verbleibenden zwei Klassen von Teilsummen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\chi_i = \sum \varrho(m)\,\sigma(m) \quad \text{für} \quad \varrho(m) > 0, \quad a_i \leqq m < a_i + k_i, \quad i = 1, 2, \ldots, G, \tag{2.17}$$

$$\nu_j = \sum \varrho(m)\,\sigma(m) \quad \text{für} \quad \varrho(m) < 0, \quad b_j \leqq m < b_j + l_j, \quad j = 1, 2, \ldots, H. \tag{2.18}$$

Es ist dann

$$\left|\sum_{m=0}^{r-1} \varrho(m)\,\sigma(m)\right| \leqq \sum_{i\leqq G} |\chi_i| + \sum_{j \leqq H} |\nu_j| \tag{2.19}$$

und ferner

$$\sum_{i\leqq G} k_i + \sum_{j\leqq H} l_j \leqq r. \tag{2.20}$$

Wir werden nun obere Schranken für die Quotienten

$$k_i^{-1}\,\delta^{-1}\,|\chi_i|, \qquad l_j^{-1}\,\delta^{-1}\,|\nu_j| \tag{2.21}$$

bestimmen, wobei wir nicht alle gemäss Lemma 1 für die $\varrho(m)$ und

$\sigma(m)$ geltenden Ungleichheiten benützen werden. Dadurch werden zwar diese oberen Schranken etwas grösser ausfallen, aber unsere Untersuchung wird einfacher sein.

Zunächst suchen wir eine obere Schranke für $\omega_i = k_i^{-1}\delta^{-1}\chi_i$, wobei wir uns ein bestimmtes i herausgegriffen denken können, so dass wir den Index i bei den Bezeichnungen in (2.17) fortlassen dürfen. Für zwei oft wiederkehrende Grössen führen wir die Bezeichnungen ein:

$$\tau = \delta(1+\beta)+C\delta^2, \qquad \varepsilon = \delta+C\delta^2\,, \tag{2.22}$$

aus denen folgt

$$\tau = O(\delta), \qquad \varepsilon\delta^{-1} = 1+O(\delta)\,. \tag{2.23}$$

Wir haben nun drei Fälle zu unterscheiden.

In den zwei ersten Fällen sei χ weder die erste noch die letzte Teilsumme der Summe (2.16), das heisst $i \neq 1$, $i \neq G$. Gemäss (2.17) muss dann $\varrho(a-1) \leqq 0$ und $\varrho(a+k) \leqq 0$ sein, sonst würden nämlich $\varrho(a-1)$ resp. $\varrho(a+k)$ noch zu χ gehören. Daraus und durch wiederholte Anwendung von (2.10) folgt

$$\varrho(m) \leqq (m-a+1)\,\tau \quad \text{für} \quad m = a,\ a+1,\ a+2,\ \ldots, \tag{2.24}$$

$$\varrho(m) \leqq (a+k-m)\,\tau \quad \text{für} \quad m = a+k-1,\ a+k-2,\ \ldots\,. \tag{2.25}$$

In den ersten zwei zu betrachtenden Fällen sei $k\tau \leqq 4\beta$, und von den Ungleichheiten in Lemma 1 werden bloss (2.7), (2.10) und (2.11) benützt. Wir werden ferner, da $\varrho(m) > 0$ ist, obere Schranken von ω erhalten, wenn wir alle $\sigma(m)$ durch ihre oberen Schranken ε ersetzen.

Fall I. Es sei hier

$$k\tau \leqq 2\beta\,. \tag{2.26}$$

Wir verwenden (2.24) für

$$a \leqq m \leqq a+[k/2]-1 \tag{2.27}$$

und (2.25) für

$$a+[k/2] \leqq m \leqq a+k-1\,. \tag{2.28}$$

Wegen (2.26) ist damit auch Ungleichheit (2.7) erfüllt. Wir erhalten

$$\omega \leqq k^{-1}\delta^{-1}\tau\varepsilon\left(\textstyle\sum_1+\sum_2\right),$$

wobei die Summation $\sum_1$ über (2.27), die Summation $\sum_2$ über (2.28) laufen soll. Da

$$\textstyle\sum_1+\sum_2 = \frac{1}{4}k^2+O(k)$$

gilt, ergibt sich unter Berücksichtigung von (2.23)

$$\omega \leqq \tfrac{1}{4}k\tau+O(\delta)\,,$$

und wegen (2.26) folgt

$$\omega \leqq \tfrac{1}{2}\beta + O(\delta)\,. \tag{2.29}$$

Fall II. Es sei hier

$$2\beta < k\tau \leqq 4\beta\,. \tag{2.30}$$

Wir verwenden (2.24) für

$$a \leqq m \leqq a+[\beta\tau^{-1}]-1 \tag{2.31}$$

und (2.25) für

$$a+k-[\beta\tau^{-1}] \leqq m \leqq a+k-1\,. \tag{2.32}$$

Ferner ist wegen (2.7)

$$\varrho(m) \leqq \beta, \qquad a+[\beta\tau^{-1}] \leqq m \leqq a+k-[\beta\tau^{-1}]-1\,. \tag{2.33}$$

Bezeichnen wir die Summationen über (2.31), resp. (2.32), resp. (2.33) mit Σ_1, resp. Σ_2, resp. Σ_3, so folgt

$$\omega \leqq k^{-1}\delta^{-1}\tau\varepsilon\left(\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2+\sum\nolimits_3\right),$$

$$\sum\nolimits_1 = \tfrac{1}{2}[\beta\tau^{-1}]^2+\tfrac{1}{2}[\beta\tau^{-1}], \qquad \sum\nolimits_2=\sum\nolimits_1, \qquad \sum\nolimits_3 = \beta\tau^{-1}\,(k-2[\beta\tau^{-1}])\,.$$

Wir erhalten obere Schranken von Σ_1 und Σ_2, wenn wir dort $[\beta\tau^{-1}]$ durch $\beta\tau^{-1}$, und eine obere Schranke von Σ_3, wenn wir dort $[\beta\tau^{-1}]$ durch $\beta\tau^{-1}-1$ ersetzen. Beachten wir, dass nach (2.30)

$$\beta\tau^{-1}k^{-1} = O(1)$$

ist, so folgt unter Berücksichtigung von (2.23)

$$\omega \leqq \beta - k^{-1}\beta^2\tau^{-1} + O(\delta)\,.$$

Der Ausdruck rechts steigt mit fallendem $k^{-1}\tau^{-1}$. Da nach (2.29)

$$k^{-1}\tau^{-1} \geqq (4\beta)^{-1}$$

ist, gilt

$$\omega \leqq 0{,}75\,\beta+O(\delta)\,. \tag{2.34}$$

Fall III. Hier verwenden wir bloss die Ungleichheiten (2.7), (2.11) und (2.12), die letztere nur für $v=a$, $w=a+k-1$:

$$\Big|\sum_{a\leqq m<a+k}\sigma(m)\Big| \leqq 2\beta+\beta k\delta\,. \tag{2.35}$$

Ferner sei jetzt

$$k\tau > 4\beta\,. \tag{2.36}$$

Bezeichnen wir mit k_1, resp. k_2, resp. k_3 die Anzahl derjenigen $\sigma(m)$ aus (2.35), die positiv, resp. negativ, resp. Null sind, so können wir setzen:

$$(2.37)\qquad \begin{cases} \sigma(m_i') > 0, & i = 1, \ldots, k_1, \\ \sigma(m_i'') < 0, & i = 1, \ldots, k_2, \\ \sigma(m_i''') = 0, & i = 1, \ldots, k_3, \end{cases}$$

$$k_1 + k_2 + k_3 = k\,,$$

$$(2.38)\qquad \omega = k^{-1}\delta^{-1}\left\{\sum\nolimits_1 \varrho(m_i')\,\sigma(m_i') + \sum\nolimits_2 \varrho(m_i'')\,\sigma(m_i'')\right\},$$

worin Σ_1 die Summation über $i = 1, \ldots, k_1$, Σ_2 die Summation über $i = 1, \ldots, k_2$ bedeutet. Da $0 < \varrho(m) \leqq \beta$ ist, erhält man aus (2.38)

$$(2.39)\qquad \omega \leqq k^{-1}\delta^{-1}\beta \sum\nolimits_1 \sigma(m_i')\,.$$

Wir haben also eine obere Schranke für die Summe in (2.39) zu bestimmen. Aus (2.35) folgt

$$(2.40)\qquad \sum\nolimits_1 \sigma(m_i') \leqq 2\beta + \beta k\delta - \sum\nolimits_2 \sigma(m_i'')$$

oder da wegen (2.11) $0 < -\sigma(m_i'') \leqq \varepsilon$ ist,

$$(2.41)\qquad \sum\nolimits_1 \sigma(m_i') \leqq 2\beta + \beta k\delta + (k - k_1 - k_3)\varepsilon \leqq 2\beta + \beta k\delta + (k - k_1)\varepsilon\,.$$

Zu dieser Ungleichheit addieren wir die aus (2.11) folgende

$$\sum\nolimits_1 \sigma(m_i') \leqq k_1\varepsilon$$

und erhalten

$$(2.42)\qquad \sum\nolimits_1 \sigma(m_i') \leqq \beta + \tfrac{1}{2}\beta k\delta + \tfrac{1}{2}k\varepsilon\,.$$

Daher ergibt sich aus (2.39), (2.42) und (2.23)

$$(2.43)\qquad \omega \leqq k^{-1}\delta^{-1}\beta^2 + \tfrac{1}{2}\beta^2 + \tfrac{1}{2}\beta\big(1 + O(\delta)\big)\,.$$

Aus (2.36) folgt daher

$$(2.44)\qquad \omega \leqq 0{,}75\,\beta(1+\beta) + O(\delta)\,.$$

Aus (2.29), (2.34) und (2.44) ergibt sich

Lemma 3. *Die Ungleichheit*

$$(2.45)\qquad \omega_i = k_i^{-1}\delta^{-1}\chi_i \leqq 0{,}75\,\beta(1+\beta) + O(\delta)$$

gilt,

falls $k_i\tau \leqq 4\beta$ *ist, für* $i = 2, 3, \ldots, G-1$,

falls $k_i\tau > 4\beta$ *ist, für* $i = 1, 2, \ldots, G$.

Man kann nun auf die gleiche Art wie oben beweisen, dass auch $\omega_i \geqq -0{,}75\,\beta(1+\beta) + O(\delta)$ ist, falls $k_i\tau$ die Ungleichheiten in Lemma 3 erfüllt. Ebenso erhält man die entsprechenden Ungleichheiten für ν_j und damit:

LEMMA 4. *Die zwei Ungleichheiten*

$$(2.46)\qquad \begin{cases} k_i^{-1}\delta^{-1}\,|\chi_i| \leqq 0{,}75\,\beta(1+\beta)+O(\delta), \\ l_j^{-1}\delta^{-1}\,|\nu_j| \leqq 0{,}75\,\beta(1+\beta)+O(\delta) \end{cases}$$

sind erfüllt, wenn

entweder $k_i\tau \leqq 4\beta,\quad i = 2, 3, \ldots, G-1$ *oder* $k_i\tau > 4\beta$,

resp. wenn

entweder $l_j\tau \leqq 4\beta,\quad j = 2, 3, \ldots, H-1$ *oder* $l_j\tau > 4\beta$

gilt.

Wir haben uns jetzt nur noch mit den Ausnahmsfällen $k_i\tau \leqq 4\beta$, $i=1$ und $i=G$, resp. $l_j\tau \leqq 4\beta$, $j=1$ und $j=H$ zu befassen. Wir können uns hier mit einer trivialen Abschätzung begnügen. Aus (2.17) geht hervor, dass

$$|\chi_i| \leqq \sum |\varrho(m)|\,|\sigma(m)| \leqq k_i\beta(\delta+C\delta^2) = O(\beta^2) = O(1)$$

sein muss, und für $|\nu_j|$ gilt offenbar dieselbe Abschätzung.

Wir finden also schliesslich

$$x^{-1}\Big|\sum_{N<n\leqq L}\big(\Lambda(n)-1\big)R(xn^{-1})\Big|$$
$$\leqq \Big\{\sum_{i\leqq G} k_i\delta + \sum_{j\leqq H} l_j\delta\Big\}\{0{,}75\,\beta(1+\beta)+O(\delta)\} + O(\delta\log L)\,.$$

Hieraus folgt wegen (2.20) und (2.5) die Ungleichheit (1.17).

3. Beweis von (1.4). Wir führen die Bezeichnung

$$(3.1)\qquad x^{-1}\sum_{N<n\leqq L}\big(\Lambda(n)-1\big)R(xn^{-1}) = \sum(N, L)$$

ein, wobei die Ungleichheiten (1.16) erfüllt sein sollen.

Wir wollen in Formel (1.17) dem Restglied eine andere Form geben und beweisen zu diesem Zwecke

LEMMA 5. *Unter den Voraussetzungen* (1.15) *und* (1.16) *ist*

$$(3.2)\qquad \Big|\sum(N, L)\Big| \leqq 0{,}75\,\beta(1+\beta)\log(LN^{-1}) + C_1\log^{\frac{1}{2}} L\,,$$

wo C_1 eine Konstante bedeutet.

Es sei C_2 eine so grosse Konstante, dass das Restglied in (1.17) kleiner als $C_2\log L\log^{-\frac{1}{2}} N$ ist. Ferner sei t so gewählt, dass die Ungleichheiten

$$(3.3) \qquad 2^t \log N \leqq \log L < 2^{t+1} \log N$$

gelten. Setzen wir $\log N(s) = 2^s \log N$, $s = 0, 1, 2, \ldots, t$, so erhalten wir

$$\left|\sum (N, L)\right| \leqq \left|\sum \bigl(N(t-1), L\bigr)\right| + \sum_{1 \leqq j \leqq t-1} \left|\sum \bigl(N(t-j-1),\ N(t-j)\bigr)\right| .$$

Wendet man (1.17) auf jede der Summen rechts an, so erhält man für die Differenz

$$\left|\sum (N, L)\right| - 0{,}75\, \beta(N)\bigl(1 + \beta(N)\bigr) \log (LN^{-1})$$

folgende obere Schranke:

$$C_2 \left\{\log L \log^{-\frac{1}{2}} N(t-1) + (2^{\frac{1}{2}} + 1 + 2^{-\frac{1}{2}} + \ldots) \log^{\frac{1}{2}} N(t-1)\right\},$$

wo $2^{-2} \log L < \log N(t-1) \leqq 2^{-1} \log L$ ist. Hiermit ist (3.2) bewiesen.

Es sei nun x_1 die Zahl aus (1.9). Schreiben wir α_1 für $\alpha_1(x_1) = 0{,}11$, so gilt für alle $x \geqq x_1{}^2$, wenn eine Bezeichnung analog zu (3.1) verwendet wird,

$$(3.4) \qquad \left|\sum (0, x_1)\right| = x^{-1} \left|\sum_{n \leqq x_1} \bigl(\Lambda(n) - 1\bigr) R(xn^{-1})\right| < \alpha_1 (2 \log x_1 + 3) .$$

Es ist dann nämlich für alle n dieser Summe $xn^{-1} \geqq x_1{}^2 x_1{}^{-1} = x_1$ und daher wegen (1.9)

$$x^{-1} n\, |R(xn^{-1})| \leqq \alpha_1, \qquad \left|\sum (0, x_1)\right| \leqq \alpha_1 \sum_{n \leqq x_1} \bigl(\Lambda(n) + 1\bigr) n^{-1} .$$

Da

$$\sum_{n \leqq x_1} n^{-1} \leqq 1 + \log x_1$$

und, wegen (1.8),

$$\sum_{n \leqq x_1} \Lambda(n) n^{-1} < 2 + \log x_1$$

ist, ergibt sich (3.4). Wir erhalten nun für alle $\zeta \geqq x_1{}^2$ und alle $x \geqq \zeta^2$

$$(3.5) \qquad \left|\sum (0, \zeta)\right| \leqq \left|\sum (0, x_1)\right| + \left|\sum (x_1, \zeta)\right| .$$

Die erste Summe rechts wird mittels (3.4), die zweite Summe rechts mittels (3.2) mit $N = x_1$, $L = \zeta$ und $\beta(N) = \alpha_1$ abgeschätzt. Wir erhalten für $x \geqq \zeta^2$

$$(3.6) \qquad \left|\sum (0, \zeta)\right| \leqq 0{,}75\, \alpha_1 (1 + \alpha_1) \log \zeta + C_1 \log^{\frac{1}{2}} \zeta + C_3 ,$$

wo

$$C_3 = \bigl(2\alpha_1 - 0{,}75\, \alpha_1 (1 + \alpha_1)\bigr) \log x_1 + 3\alpha_1 .$$

Ferner sei C_4 eine so grosse Konstante, dass (1.11) in der Form

$$(3.7) \qquad x^{-1} |R(x)| \log x \leqq 2 \left|\sum (0, x^{\frac{1}{2}})\right| + C_4$$

geschrieben werden kann.

Wir wollen nun die Ungleichheit (3.6) in eine einfachere Gestalt bringen. Wir wollen uns x_2 so gross gewählt denken, dass für $\varepsilon_1 = 10^{-3}$ und alle $\zeta \geqq x_2$ die Ungleichheit

$$(3.8) \qquad 0{,}75\ \varepsilon_1 \alpha_1 (1+\alpha_1) \log \zeta \ \geqq\ C_1 \log^{\frac{1}{2}} \zeta + C_3 + \tfrac{1}{2} C_4 \, .$$

gilt. Führen wir dann die Bezeichnung

$$(3.9) \qquad \alpha_2 \ =\ 0{,}75\ \alpha_1 (1+\alpha_1)(1+\varepsilon_1)$$

ein, so gelten für $k = 2$, $\zeta \geqq x_k$ und $x \geqq \zeta^2$ die Ungleichheiten

$$(3.10) \qquad \alpha_k \ <\ 0{,}092 \, ,$$

$$(3.11) \qquad \varepsilon_1 \alpha_k \log \zeta \ >\ C_1 \log^{\frac{1}{2}} \zeta \, ,$$

$$(3.12) \qquad \left| \sum (0, \zeta) \right| \ <\ \alpha_k \log \zeta - \tfrac{1}{2} C_4 \, ,$$

$$(3.13) \qquad \zeta^{-2} \, |R(\zeta^2)| \ <\ \alpha_k \, .$$

Es wird sich nun der folgende Satz ergeben:

Lemma 6. *Es sei x_2 so gewählt, dass* (3.11), (3.12), (3.13) *für $\zeta \geqq x_2$ gelten, α_2 sei durch* (3.9) *bestimmt, $\varepsilon_1 = 10^{-3}$ und $\varkappa \geqq 2$. Wenn dann für $k = 2, 3, \ldots$*

$$(3.14) \qquad \log x_{k+1} \ \geqq\ 2\varkappa \log x_k \ >\ \log (x_{k+1} - 1) \, ,$$

$$(3.15) \qquad \alpha_{k+1} \ =\ (1+\varepsilon_1) \alpha_k \, \varphi(\varkappa, k), \qquad \varphi(\varkappa, k) \ =\ \varkappa^{-1} \left\{ 1 + 0{,}75\, (\varkappa - 1)(1+\alpha_k) \right\}$$

gesetzt wird, gelten für alle $\zeta \geqq x_{k+1}$ und $x \geqq \zeta^2$ die Ungleichheiten

$$(3.16) \qquad \left| \sum (0, \zeta) \right| \ <\ \alpha_{k+1} \log \zeta \ -\ \tfrac{1}{2} C_4 \, ,$$

$$(3.17) \qquad \zeta^{-2} \, |R(\zeta^2)| \ <\ \alpha_{k+1} \, .$$

Um Lemma 6 abzuleiten, beweisen wir, dass aus den Ungleichheiten (3.10), (3.11), (3.12) und (3.13) für $k \geqq 2$ dieselben Ungleichheiten für $k+1$ folgen, wenn x_{k+1} und α_{k+1} gemäss (3.14) und (3.15) bestimmt werden, $\zeta \geqq x_{k+1}$ und $x \geqq \zeta^2$ ist.

Aus (3.10) ergeben sich die folgenden Relationen:

$$(3.18) \qquad 1 \ -\ 0{,}75\, (1+\alpha_k) \ >\ 0 \, ,$$

$$(3.19) \qquad 0{,}75 \ <\ \varphi(\varkappa, k) \ <\ 0{,}91 \, .$$

Um (3.19) zu erhalten, schreiben wir $\varphi(\varkappa, k)$ in der Form

$$\varphi(\varkappa, k) \ =\ 0{,}75\, (1+\alpha_k) \ +\ \varkappa^{-1} \left\{ 1 - 0{,}75\, (1+\alpha_k) \right\} .$$

Wegen (3.18) ist dieser Ausdruck grösser als 0,75 und steigt, wenn $\varkappa$

fällt. Da $\varkappa \geqq 2$ ist, ergibt sich als obere Schranke $\varphi(2, k)$, das wegen (3.10) kleiner als 0,91 ist.

Wir erhalten nun für $\zeta \geqq x_{k+1} \geqq x_k^{2\varkappa}$ und $x \geqq \zeta^2$

$$\left|\sum(0, \zeta)\right| \leqq \left|\sum(0, x_k^2)\right| + \left|\sum(x_k^2, \zeta)\right| \leqq \alpha_k \log x_k^2 - \tfrac{1}{2}C_4 + \left|\sum(x_k^2, \zeta)\right| . \tag{3.20}$$

Nach (3.13) ist nun

$$x_k^{-2}\,|R(x_k^2)| < \alpha_k .$$

Wenn wir daher auf die letzte Summe in (3.20) Relation (3.2) mit $N = x_k^2$ und $L = \zeta$ anwenden, dürfen wir $\beta(N) = \alpha_k$ setzen und erhalten

$$\left|\sum(0, \zeta)\right|$$
$$\leqq \{\alpha_k - 0{,}75\,\alpha_k(1+\alpha_k)\}\log x_k^2 + 0{,}75\,\alpha_k(1+\alpha_k)\log\zeta + C_1\log^{\frac{1}{2}}\zeta - \tfrac{1}{2}C_4 .$$

Hier ist $\log x_k^2$ mit einem Ausdruck multipliziert, der gemäss (3.18) positiv ist. Da nun $\log x_k^2 \leqq \varkappa^{-1}\log\zeta$ ist, erhalten wir

$$\left|\sum(0, \zeta)\right| \leqq \alpha_k\,\varphi(\varkappa, k)\log\zeta + C_1\log^{\frac{1}{2}}\zeta - \tfrac{1}{2}C_4 . \tag{3.21}$$

Nun gilt nach Voraussetzung (3.11) für $\zeta \geqq x_k$ und es ist daher für $\zeta \geqq x_{k+1}$

$$\varepsilon_1\alpha_k(2\varkappa)^{-1}\log\zeta > C_1(2\varkappa)^{-\frac{1}{2}}\log^{\frac{1}{2}}\zeta .$$

Aus (3.19) folgt aber

$$(2\varkappa)^{-\frac{1}{2}} < \varphi(\varkappa, k) ,$$

so dass

$$\varepsilon_1\alpha_k\,\varphi(\varkappa, k)\log\zeta > C_1\log^{\frac{1}{2}}\zeta \tag{3.22}$$

ist. Setzt man $\alpha_k(1+\varepsilon_1)\,\varphi(\varkappa, k) = \alpha_{k+1}$, was (3.15) entspricht, so folgt aus (3.21) und (3.22) Relation (3.16) und daraus, wegen (3.7), Relation (3.17). Aus (3.22) folgt ferner Relation (3.11) für $k+1$ statt k und schliesslich ergibt sich aus (3.19)

$$\alpha_{k+1} < 0{,}91\,(1+\varepsilon_1)\alpha_k < 0{,}92\,\alpha_k, \qquad k = 2, 3, \ldots , \tag{3.23}$$

so dass auch (3.10) für $k+1$ statt k gilt. Damit ist Lemma 6 bewiesen.

Aus (3.23) und (3.10) folgt

$$\alpha_k < 0{,}1\,(0{,}92)^{k-1}, \qquad k = 2, 3, \ldots . \tag{3.24}$$

Wir wählen nun eine so grosse natürliche Zahl I, dass $\alpha_I < 10^{-3}$ ist. Ferner ist dann

$$(1+\varepsilon_1)\,\varphi(\varkappa, I+m) < 1{,}001\,\varkappa^{-1}\{1 + 0{,}75\,(\varkappa-1)\,1{,}001\} = Q(\varkappa) , \tag{3.25}$$

also nach (3.15)

$$\alpha_{I+m} < 10^{-3}\,Q^m(\varkappa) . \tag{3.26}$$

Wir definieren nun die natürlichen Zahlen y_{I+m} durch

$$y_{I+m} = \left[(x_2+1)^{(2\varkappa)^{I+m-2}}\right], \qquad m = 0, 1, \ldots . \tag{3.27}$$

Dann ist, wie man leicht aus (3.14) schliesst, $y_{I+m} > x_{I+m}$, und es findet daher für $x \geqq y_{I+m}{}^2$ die Ungleichheit statt:

$$x^{-1}\,|R(x)| < 10^{-3}\,Q^m(\varkappa)\,. \tag{3.28}$$

Lemma 7. *Es sei* y_{I+m} *durch* (3.27) *definiert, wo* I *so gross ist, dass* $\alpha_I < 10^{-3}$ *gilt. Aus* (3.28) *folgt dann Relation* (1.4) *für ein* $c = c(\varkappa)$, *das durch*

$$c(\varkappa) = -\log Q(\varkappa)\log^{-1}(2\varkappa) \tag{3.29}$$

bestimmt ist.

Es sei nämlich x so gross, dass $y_{I+m}{}^2 \leqq x < y_{I+m+1}{}^2$ für irgend ein $m \geqq 0$ gilt. Aus (3.27) folgt dann $(2\varkappa)^m = O(\log x)$ und wir erhalten aus (3.28) und (3.29)

$$x^{-1}|R(x)| = O\big(Q^m(\varkappa)\big) = O\big((2\varkappa)^{-mc}\big) = O(\log^{-c} x)\,,$$

was zu beweisen war.

Es ist noch c gemäss (3.29) von $\varkappa$ abhängig, wobei $\varkappa \geqq 2$ angenommen ist. Um c gross zu erhalten, wählen wir $\varkappa = 3$, weil dieser Wert in der Nähe einer Wurzel von

$$\frac{d}{d\varkappa}\{\log Q(\varkappa)\log^{-1}(2\varkappa)\} = 0$$

liegt. Es ist dann $c = c(3) > \frac{1}{10}$ und es ergibt sich

Theorem 2. *Für* $\psi(x) = \sum_{p \leqq x} \log p + O(x^{\frac{1}{2}})$ *gilt die Abschätzung*

$$\psi(x) = x + O(x\log^{-c} x), \qquad c = \tfrac{1}{10}\,. \tag{1.4}$$

Bei den Untersuchungen in § 2 und § 3 haben wir, um eine Vereinfachung zu erzielen, nicht alle zur Verfügung stehenden Relationen ausgenützt, so dass der für c angegebene Wert nicht der grösste ist, der sich auf elementarem Wege durch ähnliche Betrachtungen erzielen lässt, worauf wir doch hier nicht näher eingehen können. Unsere Betrachtungen lassen sich auch auf die Behandlung verwandter Probleme ausdehnen, was einer späteren Mitteilung vorbehalten bleiben muss.

Der Verfasser wünscht Herrn Professor R. A. Rankin, Glasgow, und Herrn Dr. J. M. Rushforth, Dundee, seinen herzlichen Dank für ihre Hilfe und wertvolle Kritik auszusprechen.

LITERATUR

1. A. Selberg, *An elementary proof of the prime-number theorem*, Ann. of Math. (2) 50 (1949), 305–313.
2. P. Erdös, *On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime-number theorem*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 35 (1949), 374–384.
3. F. Mertens, *Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie*, J. Reine Angew. Math. 78 (1874), 46–63.
4. E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* I, Leipzig und Berlin, 1909.

UPPSALA, SCHWEDEN