MATH. SCAND. 3 (1955), 107–114

EINE EIGENSCHAFT GEWÖHNLICHER NEGATIONSLOSER KALKÜLE DER PROPOSITIONEN- UND PRÄDIKATENLOGIK

VELI VALPOLA

1. Die Betrachtungen in diesem Abschnitt gelten für die meisten negationslosen Satzkalküle. Es werden Kalküle betrachtet, die die folgenden Forderungen erfüllen:

(α) Es kommt eine abzählbar unendliche Reihe von Satzvariablen vor, die hier durch die Zeichen 'a_1', 'a_2', ... repräsentiert werden.

(β) Es kommen ein oder mehrere Konnektorzeichen vor, die hier durch die Zeichen 'f_{11}', 'f_{12}', ..., 'f_{21}', ... und allgemein durch Zeichen wie 'f_{nm}' repräsentiert werden (der erste Index gibt die Anzahl der Argumente an, der zweite dient zur Numerierung).

(γ) Es kommen möglicherweise auch konstante Satzzeichen vor.

(δ) Die Definition derjenigen Klasse von Zeichenreihen, die sogenannte wohlgebildete (sinnvolle) Sätze sind und die hier durch solche Bezeichnungen wie 's_m' und 's_n' repräsentiert werden, ist die folgende:

(δ_1) die Satzvariablen und die etwa vorkommenden konstanten Satzzeichen sind wohlgebildete Sätze;

(δ_2) sind 's_{m_1}', 's_{m_2}', ..., 's_{m_m}' wohlgebildete Sätze, so ist

$$`f_{mn} s_{m_1} s_{m_2} \ldots s_{m_m}'$$

ein wohlgebildeter Satz[1].

(ε) Aus den Wahrheitsregeln des Kalküls folgt die Wahrheit (Beweisbarkeit) wenigstens derjenigen wohlgebildeten Sätze, die nach den folgenden Regeln wahr sind (das Zeichen '$\vdash$' bedeutet, dass die Zeichenreihe, die nach ihm steht oder durch die nach ihm stehenden Zeichen repräsentiert wird, wahr ist; die Anführungszeichen sind dann weggelassen):

(ε_1) die Einsetzungsregel: jeder Satz, den man aus einem wahren Satz dadurch erhalten kann, dass man eine in diesem vorkommende (freie)

Eingegangen am 18. März 1955

[1] Die hier gebrauchte Schreibweise, bei der Klammern oder Punktzeichen nicht erforderlich sind, ist die von Łukasiewicz [10] eingeführte.

Satzvariable an jeder Stelle durch einen und denselben wohlgebildeten Satz ersetzt, ist wahr,

(ε_2) der Modus Ponens: eines von den 'f_{2n}' ist das sogenannte Implikationszeichen (hier durch 'C' repräsentiert) mit der Eigenschaft, dass falls $\vdash s_m$ und $\vdash Cs_ms_n$, so $\vdash s_n$,[2]

(ε_3) wenigstens ein wohlgebildeter Satz is wahr (er sei denn ein konstantes Satzzeichen oder etwa der Satz 'Ca_1a_1'),

(ε_4) die etwa vorkommenden konstanten Satzzeichen sind wahr,

(ε_5) falls $\vdash s_{m_1}$, $\vdash s_{m_2}$, ..., $\vdash s_{m_m}$, so $\vdash f_{mn}s_{m_1}s_{m_2}\ldots s_{m_m}$.

Es gelten nun die folgenden Metasätze:

METASATZ 1. *Ein wohlgebildeter Satz ohne Variable (d.i. ein aus den konstanten Satzzeichen und den Konnektoren gebildeter) ist beweisbar.*

Dies kann man auf Grund von (ε_5) durch einen Induktionsschluss zeigen.

METASATZ 2. *Man kann aus jedem wohlgebildeten Satz, der wenigstens eine Satzvariable enthält, durch eine oder mehrere Einsetzungen einen wohlgebildeten beweisbaren Satz bilden.*

Man kann nämlich alle Satzvariablen durch einen und denselben beweisbaren Satz (die Existenz eines solchen wurde in (ε_3) vorausgesetzt) ersetzen, wonach man mit Hilfe von (ε_5) durch einen Induktionsschluss zeigen kann, dass der ganze Satz beweisbar ist.

METASATZ 3. *Für jeden beweisbaren Implikationssatz 'Cs_ms_n' gilt, dass die Teilsätze 's_m' und 's_n' wenigstens eine gemeinsame Satzvariable enthalten oder dass der Satz 's_n' beweisbar ist.*

Man kann nämlich in solchen Sätzen 'Cs_ms_n', in denen keine in 's_n' vorkommende Satzvariable in 's_m' vorkommt, jede in 's_m' etwa vorkommende Satzvariable durch einen beweisbaren Satz ersetzen, wodurch (nach Metasatz 1 oder Metasatz 2) ein beweisbarer Satz entsteht, und dann ist $\vdash s_n$ (nach (ε_2)).

Die Voraussetzung (ε_5) ist für die Zeichen der Konjunktion und Disjunktion (»Alternation«) in nahezu allen Kalkülen erfüllt und meistens auch für die Zeichen der Implikation (»Konditional«) und Äquivalenz (»Bikonditional«). Genau gesagt, die Voraussetzungen (α)–(ε) sind erfüllt und der Metasatz 3 ist gültig u.a. für die folgenden Kalküle:

1) für die Menge derjenigen im klassischen (zweiwertigen) Satzkalkül beweisbaren Sätze, die kein Negationszeichen enthalten, die aber Zeichen

[2] Die Bezeichnung 'Cs_ms_n' vertritt die Peanosche und Russellsche Bezeichnung '$s_m \supset s_n$' und die Hilbertsche '$s_m \rightarrow s_n$'.

der Implikation, Konjunktion, Disjunktion und Äquivalenz enthalten können; diese Menge ist zugleich die Menge derjenigen wohlgebildeten Sätze ohne Negationszeichen, die gemäss den gewöhnlichen zweiwertigen Wahrheitstafeln wahr sind;

2) für den sogenannten positiven Satzkalkül, dessen Axiome von Hilbert und Bernays [6, S. 66] aufgestellt worden sind (vgl. auch die Axiome 1–10 in Hilbert [5]); jeder in diesem negationslosen Kalkül beweisbare Satz ist auch im klassischen Kalkül beweisbar, während gewisse in diesem beweisbare Sätze fehlen, u.a. der Satz '$CCCa_1a_2a_1a_1$'; die Menge der so erhaltenen beweisbaren Sätze ist nach Hilbert und Bernays [6] identisch mit der Menge derjenigen in dem sogenannten intuitionistischen Satzkalkül [4] beweisbaren Sätze, die kein Negationszeichen enthalten;

3) für den vollen Implikationskalkül, in dem jeder wohlgebildete Satz beweisbar ist, der nach der gewöhnlichen (zweiwertigen) Wahrheitstafel der Implikation wahr ist;

4) für den positiven Implikationskalkül, in dem die und nur die im positiven Satzkalkül beweisbaren Implikationssätze beweisbar sind; dieser Kalkül (mit den Regeln (α), (δ), (ε_1) und (ε_2)) gründet sich auf die folgenden Hilbertschen Axiome [5]:

$$\begin{aligned} &\vdash Ca_1Ca_2a_1 \\ &\vdash CCa_1Ca_1a_2Ca_1a_2 \\ &\vdash CCa_1Ca_2a_3Ca_2Ca_1a_3 \\ &\vdash CCa_2a_3CCa_1a_2Ca_1a_3 \end{aligned} \tag{1}$$

oder ebenso auf die folgenden Axiome von Hilbert und Bernays [6]:

$$\begin{aligned} &\vdash Ca_1Ca_2a_1 \\ &\vdash CCa_1Ca_1a_2Ca_1a_2 \\ &\vdash CCa_1a_2CCa_2a_3Ca_1a_3\,. \end{aligned} \tag{2}$$

In den meisten Kalkülen, die ein Konjunktionszeichen (hier durch 'K' repräsentiert) oder ein Disjunktionszeichen (hier durch 'A' repräsentiert) enthalten, entnimmt man das Erfülltsein der Voraussetzung (ε_5) einfach daraus, dass die Sätze

$$\text{'}Ca_1Ca_2Ka_1a_2\text{'} \tag{3}$$

$$\text{'}Ca_1Aa_1a_2\text{'} \tag{4}$$

beweisbar sind. Hinsichtlich des Implikationszeichens 'C' ist die Beweisbarkeit des Satzes[3]

(5) $$\text{'}Ca_1\,Ca_2a_1\text{'}$$

hinreichend dafür, dass die Voraussetzung (ε_5) erfüllt ist; in den oben erwähnten vier Kalkülen ist dieser Satz beweisbar[4].

Ähnliche Betrachtungen lassen sich auch auf Kalküle der Prädikatenlogik anwenden, die freie Prädikatenvariable und freie und gebundene Individuenvariable, aber keine konstanten Prädikaten- oder Individuenzeichen enthalten (die genaue Formulierung der Struktur- und Wahrheitsregeln sei dem Leser überlassen). Der Metasatz 3 ist dann gültig, vorausgesetzt dass Sätze mit einer oder mehreren über den ganzen Satz gebundenen Individuenvariablen, die aus einem beweisbaren Satz gebildet sind, beweisbar sind. Diese Voraussetzung ist für gewöhnliche Kalküle der Prädikatenlogik (z.B. den klassischen Kalkül), die einen »leeren Individuenbereich« nicht zulassen, erfüllt. In dem System von Whitehead und Russell [12] sind z.B. alle untenstehenden Sätze (wo 'g_1', 'g_2',.. Prädikatenvariable mit einem, mit zwei, ... Argumenten sind) wahr:

$$\text{'}(a_1)\cdot g_1a_1 \supset g_1a_1\text{'}$$
$$\text{'}(\exists a_1)\cdot g_1a_1 \supset g_1a_1\text{'}$$
$$\text{'}(a_1)(a_2)\cdot g_2a_1a_2 \supset g_2a_1a_2\text{'}$$
$$\text{'}(a_1)(\exists a_2)\cdot g_2a_1a_2 \supset g_2a_1a_2\text{'}$$
$$\text{'}(\exists a_1)(a_2)\cdot g_2a_1a_2 \supset g_2a_1a_2\text{'}$$
$$\text{'}(\exists a_1)(\exists a_2)\cdot g_2a_1a_2 \supset g_2a_1a_2\text{'}$$

usw.

2. Church [2] hat einen negationslosen Implikationskalkül, den sogenannten schwachen positiven Implikationskalkül, mit den Axiomen

(6)
$$\vdash Ca_1a_1$$
$$\vdash CCa_1\,Ca_1a_2\,Ca_1a_2$$
$$\vdash CCa_1\,Ca_2a_3\,Ca_2\,Ca_1a_3$$
$$\vdash CCa_2a_3\,CCa_1a_2\,Ca_1a_3$$

---

[3] In der Symbolik von Whitehead und Russell: '$a_1 \cdot \supset \cdot a_2 \supset a_1$', in der Symbolik von Hilbert: '$a_1 \to (a_2 \to a_1)$'.

[4] Der Satz (5) ist in dem von Destouches-Février [3] angegebenen negationslosen Axiomensystem beweisbar (die gegenteilige, von Church [2] wiederholte Behauptung der Verfasserin beruht auf einem Irrtum; siehe L'Abbé [9]).

(vgl. die Hilbertschen Axiome (1)) gebildet, in welchem der Satz (5) nicht beweisbar ist. Die Unbeweisbarkeit dieses Satzes zeigt Church mit Hilfe einer Wertung, die durch die folgende Matrix (links der Wert des ersten Teilsatzes, oben der Wert des zweiten):

(7)

C	0	1	2
0	0	1	2
1	2	1	2
2	1	1	1

bestimmt wird, wo 0 und 1 »ausgezeichnete Werte« (der Wahrheit entsprechend) sind. Man zeigt durch Berechnung, dass jedes Axiom in allen Fällen den Wert 0 oder 1 hat, und ferner, dass man nach den Schlussregeln der Einsetzung und des Modus Ponens aus den Sätzen mit einem ausgezeichneten Wert immer Sätze mit einem ausgezeichneten Wert erhält, während der Wert des Satzes (5) im Falle $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ gleich 2 ist.

Mit Hilfe derselben Wertung kann man zeigen, dass die Voraussetzung (ε_5) in diesem Kalkül nicht erfüllt ist[5]. Es sind zum Beispiel $\vdash Ca_1a_1$ und $\vdash Ca_2a_2$, während der Satz

(8) $$\text{‘}CCa_1a_1\,Ca_2a_2\text{’}$$

unbeweisbar ist. Eine ähnliche Methode wie beim Beweis des Metasatzes 3 ist hier also unmöglich.

Man kann aber direkt mit Hilfe der durch die Matrix (7) bestimmten Wertung den folgenden Metasatz (der stärker als Metasatz 3 ist) beweisen:

METASATZ 3′. *Im schwachen positiven Implikationskalkül ist jeder beweisbare Satz ein implikationaler Satz von der Struktur ‘Cs_ms_n’, wo die Teilsätze ‘s_m’ und ‘s_n’ wenigstens eine gemeinsame Satzvariable enthalten.*

Hat man nämlich einen solchen implikationalen Satz, dessen Teilsätze keine gemeinsame Variable enthalten, so kommt bei der Wertung der Fall vor, dass jede Variable des ersten Teilsatzes den Wert 1 hat und jede Variable des zweiten Teilsatzes den Wert 0, in welchem Falle der erste Teilsatz den Wert 1 und der zweite Teilsatz den Wert 0 und der ganze Satz folglich den Wert 2 hat, so dass er in diesem Kalkül unbeweisbar ist.

[5] Die Voraussetzung (ε_5) ist für das von Church [1] eingeführte Zeichen der »bedingten Disjunktion« erfüllt; wenn dieses Zeichen das einzige Konnektorzeichen des Satzkalküls ist, so wird die explizite Definition der Negation erst dann möglich, wenn noch ein konstanter wahrer Satz und ein konstanter falscher Satz zur Verfügung stehen.

Es erhebt sich die Frage, ob es nicht möglich wäre, sowohl den schwachen positiven Implikationskalkül als die anderen negationslosen Kalküle auf eine einheitliche Weise zu behandeln, da für diese Kalküle die ähnlichen Metasätze 3 und 3′ gültig sind. Diese Frage ist zu verneinen. Es gibt negationslose Kalküle der Implikationssätze, in denen die Menge der beweisbaren Sätze grösser als im schwachen positiven Implikationskalkül, zugleich aber kleiner als im positiven Implikationskalkül ist. Einen solchen Kalkül erhält man z. B. dadurch, dass man zu den Axiomen (6) einen oder mehrere der Sätze

(9) $\quad$ '$CCa_1\,Ca_2a_1\,Ca_3\,Ca_4a_3$'

(10) $\quad$ '$CCa_2\,Ca_1a_1\,Ca_4\,Ca_3a_3$'

(11) $\quad$ '$CCa_1\,Ca_1a_1\,Ca_3\,Ca_3a_3$'

als Axiom hinzufügt. Diese Sätze sind unbeweisbar im schwachen positiven Implikationskalkül, aber beweisbar im positiven Implikationskalkül. In dem neuen Kalkül sind u.a. die folgenden (im positiven Implikationskalkül beweisbaren) Sätze

(12) $\quad$ '$Ca_3\,Ca_4a_3$'

(13) $\quad$ '$Ca_4\,Ca_3a_3$'

(14) $\quad$ '$Ca_3\,Ca_3a_3$'

nicht beweisbar, was man mit der Hilfe der durch die Matrix

(15)

C	0	1	2	3	4	5
0	0	1	0	1	2	3
1	0	0	0	0	2	2
2	0	1	0	1	2	3
3	0	0	0	0	2	2
4	2	3	2	3	0	3
5	2	2	2	2	2	0

bestimmten Wertung zeigen kann, indem man 0 als den ausgezeichneten Wert nimmt. (Die Berechnungen werden durch die Tatsache vereinfacht, dass man bei implikationalen Sätzen, deren beide Teilsätze implikationale Sätze sind, $0 = 2 = 4$ und $1 = 3 = 5$ setzen kann, so dass die Matrix sich dann auf die gewöhnliche Wahrheitstafel der Implikation reduziert.) In dem gebildeten Kalkül kommen also beweisbare implikationale Sätze vor, deren Teilsätze keine gemeinsame Variable enthalten, deren zweiter Teilsatz aber trotzdem unbeweisbar ist, so dass der Metasatz 3 nicht gültig ist. — Allerdings kann man einwenden, dass man kaum eine vernünftige Begründung für die Einführung der Axiome (9), (10) oder (11) finden kann. Eine Charakterisierung der »vernünftigen« negationslosen Implikationskalküle liegt aber nicht vor.

3. Die Voraussetzung (ε_5) ist nicht erfüllt für Zeichen, mit deren Hilfe man eine explizite Definition der Negation bilden kann, u.a. das Sheffersche »Stroke«-Zeichen (»weder a_1 noch a_2«), das Zeichen der Unverträglichkeit (»nicht sowohl a_1 als a_2«), das von Moisil [11] und Johansson [8] eingeführte Zeichen der »Exzeption« oder »Subtraktion« (»a_1, aber nicht a_2«) und selbstverständlich das gewöhnliche Negationszeichen. Es ist auch leicht zu sehen, dass falls die Voraussetzungen (α)–(ε) erfüllt sind, das Definieren der Negation in dem Sinne unmöglich ist, dass man keinen wohlgebildeten Satz mit genau einer freien Satzvariablen derart bilden kann, dass der aus diesem Satz durch Einsetzung entstehende Satz dann und nur dann nicht beweisbar ist, wenn der an die Stelle der Variablen eingesetzte Satz beweisbar ist.

Im klassischen und auch im intuitionistischen Kalkül ist u.a. der Satz

$$\text{(16)} \qquad \text{‘}CKa_1\,Na_1a_2\text{’}$$

(wo ‘N’ das Negationszeichen repräsentiert) beweisbar; in diesem implikationalen Satz enthalten die Teilsätze keine gemeinsame Variable und der zweite Teilsatz ist unbeweisbar (so dass der Metasatz 3 nicht gültig ist). Bei den im klassischen (oder auch im intuitionistischen) Satzkalkül beweisbaren implikationalen Sätzen dieser Art ist der erste Teilsatz dann von solcher Struktur, dass man aus ihm durch Einsetzungen unmöglich einen beweisbaren Satz bilden kann (sonst wäre ja der zweite Teilsatz gemäss dem Modus Ponens beweisbar). Implikationale Sätze solcher Art sind aber sicher als Schlussregeln unbrauchbar (sofern der Kalkül widerspruchslos ist, was er sein muss). Hält man es für den Zweck eines Satzkalküls, eine Gruppe von »logischen Umformungsregeln«, die »Schemata der Schlussfolgerungen«, welche Bedeutung den »identisch wahren Ausdrücken« nach Hilbert [6, S. 62] zukommt, zu systematisieren, so sind implikationale Sätze mit einem »identisch falschen« ersten Teilsatz unnötig[6].

[6] Die Beweisbarkeit des Satzes (16), der in der Symbolik von Whitehead und Russell ‘$a_1 \cdot \sim a_1 \cdot \supset \cdot a_2$’ geschrieben wird, hat die Folge, dass jeder wohlgebildete Satz beweisbar ist, falls irgend ein Satz zusammen mit dem aus ihm gebildeten Negationssatz beweisbar ist. Dieser Sachverhalt ist für die syntaktisch-semantischen Untersuchungen bedeutsam, kommt aber beim normalen Schliessen nicht in Betracht. — Im »Minimalkalkül« Johanssons [7], dem das Heytingsche Axiom ‘$CNa_1\,Ca_1a_2$’ fehlt, ist der Satz (16) nicht beweisbar; dagegen ist z.B. der Satz ‘$CKa_1\,Na_1\,Na_2$’ beweisbar, so dass der Metasatz 3 ungültig ist.

Wenn dagegen der erste Teilsatz an sich beweisbar ist oder nach bestimmten Einsetzungen beweisbar wird, so wird dann auch der zweite Teilsatz (gemäss dem Modus Ponens) beweisbar sein; falls die Teilsätze keine gemeinsame Variable enthalten, so ist der zweite Teilsatz an sich beweisbar. Unter dieser Voraussetzung wird der Metasatz 3 also auch für einen Kalkül mit einem Negationszeichen gültig sein.

Zum Metasatz 3 kann man weiter bemerken, dass implikationale Sätze, deren zweiter Teilsatz an sich beweisbar ist, als Schlussregeln eigentlich unnötig sind; einen solchen Satz kann der Teilsatz ersetzen (der vielleicht wieder durch einen einfacheren ersetzt werden kann). Es bleiben also nur diejenigen implikationalen Sätze übrig, deren Teilsätze wenigstens eine gemeinsame Variable enthalten. Es sollte also möglich sein, bei der Systematisierung der »logischen Umformungsregeln« statt der singulären (»materialen«) Implikationssätze ausschliesslich generelle (»formale«) Implikationssätze zu gebrauchen.

LITERATUR

1. A. Church, *Conditioned disjunction as a primitive connective for the propositional calculus*, Portugaliae Math. 7 (1948), 87–90.
2. A. Church, *The weak theory of implication*, Kontrolliertes Denken, Untersuchungen zum Logikkalkül und zur Logik der Einzelwissenschaften, München, 1951, 22–37.
3. Paulette Destouches-Février, *Logique de l'intuitionisme sans négation et logique de l'intuitionisme positif*, C. r. Acad. Sci., Paris 226 (1948), 38–39.
4. A. Heyting, *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik*, S.-Ber. Preuss. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl., 1930, 42–56.
5. D. Hilbert, *Die Grundlagen der Mathematik*, Abh. math. Sem. Hamburg. Univ. 6 (1928), 65–85 (etwas gekürzt als Anhang IX (S. 289–312) in Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, 7. Auflage, Leipzig·Berlin, 1930).
6. D. Hilbert und P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik* I (Grundlehren der math. Wiss. 40), Berlin, 1934; Neudruck: Ann Arbor, 1944.
7. I. Johansson, *Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus*, Compositio Math. 4 (1937), 119–136.
8. I. Johansson, *On the possibility to use the subtractive calculus for the formalization of constructive theories*, Actes du XIème Congrès Int. Philos. (Bruxelles 1953) XIV, 60–64.
9. M. L'Abbé, Review of [3], J. Symbolic Logic 13 (1948), 163–164.
10. J. Łukasiewicz und A. Tarski, *Untersuchungen über den Aussagenkalkül*, C. r. Soc. Sci. Lettr. Varsovie, classe III, 23 (1930), 30–50.
11. Gr. C. Moisil, *Logique modale*, Disquisitiones math. phys. 2 (1942), 3–98.
12. A. N. Whitehead and B. Russell, *Principia Mathematica* I–III, Cambridge, 1910–1913; spätere Auflagen 1925-1927 und 1951.

FINNISCHE AKADEMIE, HELSINKI