MATH. SCAND. 3 (1955), 150–154

ÜBER k-FACH SYMMETRISCHE, STERNFÖRMIGE SCHLICHTE ABBILDUNGEN DES EINHEITSKREISES

HAAKON WAADELAND

Es sei S die Menge aller Funktionen

(1) $$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots, \qquad f(0) = 0,\ f'(0) = 1\,,$$

die in $|z| < 1$ regulär sind und eine schlichte Abbildung dieses Gebietes vermitteln.

Es sei S_k, wo k eine natürliche Zahl ist, die Teilmenge von S, die aus den Funktionen

(2) $$g_k(z) = z + a_{k+1}^{(k)} z^{k+1} + \ldots + a_{pk+1}^{(k)} z^{pk+1} + \ldots$$

besteht, mit anderen Worten, aus den Funktionen (1), für welche ausserdem folgende Gleichung gilt:

(3) $$g_k(z e^{2\pi i/k}) = e^{2\pi i/k} g_k(z)\,.$$

Wir sagen hier kurz, dass $g_k(z)$ k-fach symmetrisch ist.

Es sei weiter S^* die Teilmenge von S, die aus den Funktionen (1) besteht, die ausserdem eine sternförmige Abbildung des Einheitskreises vermitteln, und S_k^* die Teilmenge von S_k, die aus den Funktionen (2) mit derselben Eigenschaft besteht. Wir haben also insbesondere $S = S_1$ und $S^* = S_1^*$.

Durch die Transformationen

(4) $$g_k(z) = [f(z^k)]^{1/k}$$

(4′) $$f(z) = [g_k(z^{1/k})]^k$$

(k eine natürliche Zahl)

wird bei geeigneter Wahl des Funktionenzweiges die Menge S in S_k bzw. die Menge S_k in S übergeführt. Entsprechendes gilt für die Mengen S^* und S_k^*.

Der Zweck dieser Arbeit ist, Abschätzungen für die absoluten Beträge $|a_{pk+1}^{(k)}|$ der Koeffizienten der Funktionen in S_k^* zu geben.

Für die Funktionen $g_k(z)$ in S_k^* gilt bekanntlich

Eingegangen am 29. März 1955.

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z\,g_k'(z)}{g_k(z)}\right) > 0\,, \tag{5}$$

wo Re den Realteil bezeichnet. In der Reihenentwicklung

$$\frac{z\,g_k'(z)}{g_k(z)} = 1 + c_k^{(k)} z^k + c_{2k}^{(k)} z^{2k} + \ldots \tag{6}$$

gilt dann bekanntlich $|c_{pk}^{(k)}| \leqq 2$ für alle p (vgl. [1]).

Durch eine leichte Rechnung ergibt sich die Koeffizientenidentität

$$p\,k\,a_{pk+1}^{(k)} = c_{pk}^{(k)} + c_{(p-1)k}^{(k)} a_{k+1}^{(k)} + \ldots + c_k^{(k)} a_{(p-1)k+1}^{(k)}\,. \tag{7}$$

Es seien $s(\nu, k)$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots, p$, reelle positive Zahlen, die durch die Rekursionsformel

$$\nu\,k\,s(\nu, k) = 2\,[s(0, k) + s(1, k) + \ldots + s(\nu-1, k)]\,, \qquad s(0, k) = 1\,, \tag{8}$$

bestimmt sind. Dann ist notwendig

$$s(\nu, k) \geqq |a_{\nu k+1}^{(k)}|, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, p\,.$$

Setzt man $\nu = p$ und $\nu = p-1$ in (8) und subtrahiert die letzte Gleichung von der ersten, so erhält man

$$p\,k\,s(p, k) - (p-1)\,k\,s(p-1, k) = 2\,s(p-1, k)\,, \tag{9}$$

woraus

$$\frac{s(p, k)}{s(p-1, k)} = \frac{(p-1)k + 2}{pk}, \tag{10}$$

also

$$s(p, k) = \frac{2}{k}\cdot\frac{k+2}{2k}\cdot\frac{2k+2}{3k}\cdot\ldots\cdot\frac{(p-1)k+2}{pk} \tag{11}$$

folgt. Dies ergibt die Abschätzung

$$|a_{pk+1}^{(k)}| \leqq \frac{2}{k}\cdot\frac{k+2}{2k}\cdot\frac{2k+2}{3k}\cdot\ldots\cdot\frac{(p-1)k+2}{pk} \tag{12}$$

oder

$$|a_{pk+1}^{(k)}| \leqq \prod_{\nu=1}^{p}\left(1 - \frac{k-2}{\nu k}\right). \tag{12'}$$

Für $k = 1$ und $k = 2$ erhält man die bekannten Abschätzungen

$$|a_{p+1}| \leqq p + 1, \qquad |a_{2p+1}^{(2)}| \leqq 1\,.$$

Die Abschätzung (12′) ist scharf, und die Extremalfunktion ergibt sich aus (6), wenn man alle $c_{pk}^{(k)} = 2$ setzt. Man erhält dann

$$g_k(z) = \frac{z}{(1-z^k)^{2/k}} \tag{13}$$

oder

$$g_k(z) = \frac{z}{(1-\eta z^k)^{2/k}}, \qquad |\eta| = 1\,. \tag{13'}$$

Dieses Ergebnis sieht trivial aus, da ja die Funktion (13′) aus der Funktion

$$f(z) = \frac{z}{(1-\eta z)^2}, \qquad |\eta| = 1\,,$$

durch die Transformation (4) hervorgeht. Die Funktion $f(z)$ maximiert bekanntlich die Koeffizienten der Funktionen in S^*. Man erhält also die Extremalfunktion des Koeffizientenproblems für $S_k{}^*$ aus der Extremalfunktion des Koeffizientenproblems für S^* durch die Transformation (4). Diese Eigenschaft gilt aber nicht für die Menge S_k. Die Funktion $f(z)$ maximiert bekanntlich $|a_3|$ in der Menge S, während die Funktion

$$g_k(z) = \frac{z}{(1-\eta z^k)^{2/k}}$$

nicht den maximalen Wert von $\left|a_{2k+1}^{(k)}\right|$ in S_k ergibt. Nach [2] ist nämlich in S_k

$$\left|a_{2k+1}^{(k)}\right| \leqq \frac{2}{k} e^{-2(k-1)/(k+1)} + \frac{1}{k}.$$

Genaue Schranken kann man in anderer Weise und in einer anderen Darstellung erhalten, wenn man von der Reihenentwicklung

$$[f(z)/z]^{1/k} = 1 + a_{k+1}^{(k)} z + a_{2k+1}^{(k)} z^2 + \ldots \tag{14}$$

ausgeht. Wir setzen

$$\log[f(z)/z] = b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_p z^p + \ldots\,. \tag{15}$$

Wenn man die Funktion (14) nach Potenzen von $1/k$ entwickelt, erhält man

$$[f(z)/z]^{1/k} = 1 + \frac{\log[f(z)/z]}{1!\,k} + \ldots + \frac{(\log[f(z)/z])^p}{p!\,k^p} + \ldots\,, \tag{16}$$

wo der Funktionenzweig also so gewählt ist, dass $[\log[f(z)/z]]_{z=0} = 0$.

Hieraus folgt

$$a_{pk+1}^{(k)} = d_1^{(p)} \frac{1}{k} + d_2^{(p)} \frac{1}{k^2} + d_3^{(p)} \frac{1}{k^3} + \ldots + d_p^{(p)} \frac{1}{k^p}, \tag{17}$$

wo $d_l^{(p)}$ der Koeffizient von z^p in der Reihenentwicklung von

$$\frac{[\log[f(z)/z]]^l}{l!}$$

ist. Ersetzt man in $\log[f(z)/z]$ alle Koeffizienten durch ihre oberen Schranken, so erhält man eine obere Schranke für $d_l^{(p)}$, und damit auch für $\left|a_{pk+1}^{(k)}\right|$.

Da $\left|c_{pk}^{(k)}\right| \leqq 2$, hat man nach (6) und (15)

$$|b_p| \leqq \frac{2}{p}, \tag{18}$$

wo sämtliche Koeffizientenschranken für die Funktion

$$f(z) = \frac{z}{(1-\eta z)^2}, \qquad |\eta| = 1, \tag{19}$$

erreicht werden. Da nach einer Formel von E. Jacobsthal [3]

$$a_{pk+1}^{(k)} = \frac{(-1)^p}{p!} \begin{vmatrix} -\frac{1}{k}a_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{2}{k}a_3 & \left(1-\frac{1}{k}\right)a_2 & 2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & p-1 \\ -\frac{p}{k}a_{p+1} & \left(1-\frac{p-1}{k}\right)a_p & \cdot & \dots & \left(p-1-\frac{1}{k}\right)a_2 \end{vmatrix} \tag{20}$$

ist, ergeben sich die Abschätzungen

$$\left|a_{pk+1}^{(k)}\right| \leqq \frac{(-1)^p}{p!} \begin{vmatrix} -\frac{1}{k}\cdot 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{2}{k}\cdot 3 & \left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot 2 & 2 & \dots & 0 \\ -\frac{3}{k}\cdot 4 & \left(1-\frac{2}{k}\right)\cdot 3 & \left(2-\frac{1}{k}\right)\cdot 2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & p-1 \\ -\frac{p}{k}(p+1) & \cdot & \cdot & \dots & \left(p-1-\frac{1}{k}\right)\cdot 2 \end{vmatrix}, \tag{21}$$

indem man durch die Wahl $\eta = 1$ in (19) $a_n = n$ erhält, und dadurch erreicht, dass (20) für jede natürliche Zahl k eine positive reelle Zahl darstellt. Die Ungleichungen (21) und (12) sind identisch.

LITERATUR

1. C. Carathéodory, *Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Koeffizienten von positiven harmonischen Funktionen,* Rend. Circ. Mat. Palermo 32 (1911), 193–217.
2. M. Fekete und G. Szegö, *Eine Bemerkung über ungerade schlichte Funktionen,* J. London Math. Soc. 8 (1933), 85–89.
3. E. Jacobsthal, *Sur l'inversion d'une série de puissances* I, Norske Vid. Selsk. Forhdl. 21 (Nr. 4, 1948), 13–17.

NORWEGISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE, TRONDHEIM