MATH. SCAND. 3 (1955), 221–223

ÜBER EIN PROBLEM VON VIGGO BRUN

O. KOLBERG

1. Im Jahre 1951 hat Viggo Brun [2] die Aufgabe gestellt, die Summe

$$s = 1/2^2 + 1/3^3 + 2^2/4^4 + 3^3/5^5 + \ldots$$

zu bestimmen.

Die Aufgabe ist später von S. Halvorsen [6] scheinbar gelöst worden. Er hat die folgende Reihenentwicklung von Abel [1, S. 73]

$$\varphi(x+\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha\,(\alpha-n\beta)^{n-1}\,\varphi^{(n)}(x+n\beta)/n!$$

benutzt. Setzt man

$$\varphi(x) = (x-1)/[2(x+1)], \qquad \alpha=\beta=x+1\,,$$

so ergibt sich $s=\frac{1}{2}$. Das ist aber falsch. Denn man hat für $n>1$

$$\log\big((n-1)^n/(n+1)^n\big) = -2n\,(1/n+1/3n^3+\ldots) < -2\,,$$

und folglich

$$(n-1)^n/(n+1)^n < e^{-2} < \tfrac{1}{7}\,.$$

Hieraus folgt

$$s < \tfrac{1}{4} + \sum_{n=2}^{\infty} 1/[7(n-1)(n+1)] = \tfrac{5}{14} < \tfrac{1}{2}\,.$$

Die Abelsche Reihenentwicklung ist in diesem Falle nicht gültig. Halphen [4][5] hat die notwendige und hinreichende Bedingung ihrer Gültigkeit gefunden. Es ist zum Beispiel notwendig (aber nicht hinreichend), dass $\varphi(x)$ eine ganze Funktion ist.

2. Wir wollen jetzt zeigen, dass sich die Summe s durch ein bestimmtes Integral ausdrücken lässt.

Man hat [4][5] für $|\beta v| \leqq 1$, $|\beta v e^{1+\beta v}| \leqq 1$

$$e^{\alpha v} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha\,(\alpha-n\beta)^{n-1} v^n e^{n\beta v}/n!\,.$$

Wir nehmen zuerst an, dass $e^{-1} \leqq x \leqq 1$ ist. Setzen wir

Eingegangen am 6. Juni 1955.

$$\alpha = \beta = -1, \qquad v = -\log x\,,$$

so ergibt sich dann

$$x = 1 + x\log x - \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)^{n-1}(-x\log x)^n/n!\,.$$

Wenn $0 \leqq x \leqq e^{-1}$ ist, kann man ein $y = y(x)$, $e^{-1} \leqq y \leqq 1$, finden, so dass

$$-x\log x = -y\log y$$

ist. Es ist also jetzt

$$y = 1 + x\log x - \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)^{n-1}(-x\log x)^n/n!\,.$$

Es ist $y^y = x^x$, oder $y = x^{x/y}$. Wir setzen $x/y = t$, das heisst $x/t = x^t$, also

$$x = t^{1/(1-t)}, \qquad y = t^{t/(1-t)}.$$

Nun ist

$$\int_0^1 \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)^{n-1}(n!)^{-1}(-x\log x)^n dx = \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)^{n-1}/(n+1)^{n+1}\,,$$

denn für $0 \leqq x \leqq 1$ ist

$$\left|(n-1)^{n-1}(n!)^{-1}(-x\log x)^n\right| \leqq (1-1/n)^{n-1}\, n^{n+\frac{1}{2}}(n!)^{-1}e^{-n}\, n^{-3/2} < Kn^{-3/2}\,,$$

wo K eine Konstante ist, so dass die erste Reihe hier gleichmässig konvergiert. Es folgt nun

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)^{n-1}/(n+1)^{n+1} &= \int_0^1 (1+x\log x)\,dx - \int_0^{1/e} y\,dx - \int_{1/e}^1 x\,dx \\
&= \tfrac{1}{4} - \int_0^{1/e}(y-x)\,dx \\
&= \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\int_{t=0}^1 (t^{-1}-1)\,d(x^2) \\
&= \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\int_{t=0}^1 t^{-2}x^2\,dt \\
&= \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\int_0^1 t^{2t/(1-t)}\,dt\,.
\end{aligned}$$

Wir führen schliesslich $u = 2t/(1-t)$ ein, und erhalten

$$1/2^2 + 1/3^3 + 2^2/4^4 + 3^3/5^5 + \ldots = \tfrac{1}{2} - \int_0^\infty u^u (u+2)^{-(u+2)} du\,.$$

Vgl. die nachstehende Abhandlung von Viggo Brun [3].

LITERATUR

1. N. H. Abel, *Sur les fonctions génératrices et leurs déterminantes,* Œuvres complètes II, 67–81, Christiania 1881.
2. V. Brun, Norsk Mat. Tidsskr. 33 (1951), 99.
3. V. Brun, *Une formule d'inversion corrigée,* Math. Scand. 3 (1955), 224–228.
4. G. Halphen, *Sur une série d'Abel,* C. R. Acad. Sci. Paris **93** (1881), 1003–1005 (= Œuvres II, 517–519).
5. G. Halphen, *Sur une série d'Abel,* Bull. Soc. Math. France 10 (1882), 67–87 (= Œuvres II, 520–539).
6. S. Halvorsen, Norsk Mat. Tidsskr. 34 (1952), 95–96.

p. t. UNIVERSITÄT OSLO, NORWEGEN