MATH. SCAND. 3 (1955), 224–228

UNE FORMULE D'INVERSION CORRIGÉE

VIGGO BRUN

J'ai donné [1] en 1932 une formule d'inversion. Cette formule n'est pas correcte. Il faut y ajouter un terme complémentaire dont la valeur n'est pas en general nulle comme je l'avais supposé. Je donnerai ici la formule de nouveau en ajoutant ce terme complémentaire. La formule était déduite d'une formule d'inversion de M. Tambs Lyche [3]. Soit $a(x)$ une fonction donnée et admettant un développement taylorien pour $|x| < \varrho$

$$a(x) = x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots .$$

Je me bornerai ici au cas où x est réel. On cherche la fonction inverse

$$A(x) = x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots + A_nx^n + \ldots .$$

C'est-à-dire la fonction, qui satisfait à l'équation

$$A\bigl(a(x)\bigr) = x$$

et qui se réduit à zéro pour $x=0$. Désignons par $a_r(x)$ la fonction r fois itérée de $a(x)$

$$a_r(x) = x + \alpha_2(r)x^2 + \alpha_3(r)x^3 + \ldots + \alpha_n(r)x^n + \ldots$$

où par définition

$$a_0(x) = x, \qquad a_1(x) = a(x), \qquad a_2(x) = a\bigl(a(x)\bigr), \ldots, \qquad a_r(x) = a\bigl(a_{r-1}(x)\bigr).$$

M. Tambs Lyche a déterminé les coefficients cherchés A_n sous la forme suivante:

$$A_n = \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^r \binom{n}{r+1} \alpha_n(r) .$$

On peut donner à cette formule une autre forme, en remarquant que

$$a_r^{(n)}(0) = n!\,\alpha_n(r) .$$

Nous en concluons

$$A_n = \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^r \binom{n}{r+1} \frac{1}{n!} a_r^{(n)}(0) ,$$

Reçu le 22 septembre 1955.

d'où successivement

$$A_2 = -\frac{1}{2!}a_1''(0),$$

$$A_3 = -\frac{1}{2!}\frac{1}{1!}a_1'''(0) + \frac{1}{3!}a_2'''(0),$$

. . . .

$$A_{m-1} = -\frac{1}{2!}\frac{1}{(m-3)!}a_1^{(m-1)}(0) + \frac{1}{3!}\frac{1}{(m-4)!}a_2^{(m-1)}(0) - \ldots + \\ + (-1)^m \frac{1}{(m-1)!}a_{m-2}^{(m-1)}(0),$$

$$A_m = -\frac{1}{2!}\frac{1}{(m-2)!}a_1^{(m)}(0) + \frac{1}{3!}\frac{1}{(m-3)!}a_2^{(m)}(0) - \ldots + \\ + (-1)^m \frac{1}{(m-1)!}\frac{1}{1!}a_{m-2}^{(m)}(0) + (-1)^{m+1}\frac{1}{m!}a_{m-1}^{(m)}(0).$$

Nous obtenons par conséquent pour la fonction

$$F_m(x) = x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots + A_mx^m$$

la formule suivante

$$(1)\quad F_m(x) = x - \frac{x^2}{2!}\left[a_1''(0) + \frac{a_1'''(0)}{1!}x + \ldots + \frac{a_1^{(m-1)}(0)}{(m-3)!}x^{m-3} + \frac{a_1^{(m)}(0)}{(m-2)!}x^{m-2}\right] + \\ + \frac{x^3}{3!}\left[a_2'''(0) + \frac{a_2''''(0)}{1!}x + \ldots + \frac{a_2^{(m)}(0)}{(m-3)!}x^{m-3}\right] + \ldots + \\ + (-1)^m \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\left[a_{m-2}^{(m-1)}(0) + \frac{a_{m-2}^{(m)}(0)}{1!}x\right] + \\ + (-1)^{m+1}\frac{x^m}{m!}\left[a_{m-1}^{(m)}(0)\right].$$

Au moyen de la formule de MacLaurin

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(m)}(0)}{m!}x^m + \frac{1}{m!}\int_0^x u^m f^{(m+1)}(x-u)\,du$$

on obtient successivement

$$a_1''(x) = a_1''(0) + a_1'''(0)\frac{x}{1!} + \dots + \frac{a_1^{(m)}(0)}{(m-2)!}x^{m-2} + \\ + \frac{1}{(m-2)!}\int_0^x u^{m-2}a_1^{(m+1)}(x-u)\,du\,,$$

$$a_2'''(x) = a_2'''(0) + a_2''''(0)\frac{x}{1!} + \dots + \frac{a_2^{(m)}(0)}{(m-3)!}x^{m-3} + \\ + \frac{1}{(m-3)!}\int_0^x u^{m-3}a_2^{(m+1)}(x-u)\,du\,,$$

. . . .

$$a_{m-2}^{(m-1)}(x) = a_{m-2}^{(m-1)}(0) + \frac{a_{m-2}^{(m)}(0)}{1!}x + \frac{1}{1!}\int_0^x u\,a_{m-2}^{(m+1)}(x-u)\,du\,,$$

$$a_{m-1}^{(m)}(x) = a_{m-1}^{(m)}(0) + \int_0^x a_{m-1}^{(m+1)}(x-u)\,du\,.$$

En introduisant ces expressions dans (1), il vient

$$F_m(x) = x - \frac{x^2}{2!}a_1''(x) + \frac{x^3}{3!}a_2'''(x) - \dots + (-1)^{m+1}a_{m-1}^{(m)}(x) + \\ + \frac{1}{m!}\int_0^x u^m\left[\binom{m}{2}\left(\frac{x}{u}\right)^2 a_1^{(m+1)}(x-u) - \binom{m}{3}\left(\frac{x}{u}\right)^3 a_2^{(m+1)}(x-u) + \dots + \\ + (-1)^m\left(\frac{x}{u}\right)^m a_{m-1}^{(m+1)}(x-u)\right]du\,.$$

Nous savons que

$$\lim_{m\to\infty} F_m(x) = A(x)$$

pour $|x|$ assez petit. Par conséquent nous obtenons pour la fonction $A(x)$, inverse de $a(x)$, la formule

$$A(x) = S(x) + R(x)$$

où

$$S(x) = x - \frac{x^2}{2!}a_1''(x) + \frac{x^3}{3!}a_2'''(x) - \frac{x^4}{4!}a_3''''(x) + \dots$$

(en supposant cette série convergente) et

$$R(x) = \lim_{m\to\infty} \left\{ \frac{1}{m!} \int_0^x u^m \left[\binom{m}{2} \left(\frac{x}{u}\right)^2 a_1^{(m+1)}(x-u) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \binom{m}{3} \left(\frac{x}{u}\right)^3 a_2^{(m+1)}(x-u) + \ldots + (-1)^m \binom{m}{m} \left(\frac{x}{u}\right)^m a_{m-1}^{(m+1)}(x-u) \right] du \right\}.$$

Prenons comme exemple

$$a(x) = \frac{x}{x+1} \qquad \text{avec} \qquad 0 < x < 1 .$$

Il vient ici

$$a_r(x) = \frac{x}{rx+1} \qquad \text{et} \qquad a_r^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} n!\, r^{n-1} (1+rx)^{-(n+1)}$$

d'où

$$S(x) = x + \frac{x^2}{(1+x)^3} + \frac{2^2 x^3}{(1+2x)^4} + \frac{3^3 x^4}{(1+3x)^5} + \ldots$$

(série convergente pour $x > 0$) et

$$R(x) = \lim_{m\to\infty} \left\{ (-1)^m (m+1) \int_0^x u^m \left[\frac{\binom{m}{2}\left(\frac{x}{u}\right)^2}{\big(1+(x-u)\big)^{m+2}} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\binom{m}{3}\left(\frac{x}{u}\right)^3 2^m}{\big(1+2(x-u)\big)^{m+2}} + \ldots + (-1)^m \frac{\binom{m}{m}\left(\frac{x}{u}\right)^m (m-1)^m}{1+(m-1)(x-u)^{m+2}} \right] du \right\}.$$

Ici on determine directement pour $|x| < 1$ la fonction inverse et il vient par conséquent

$$\frac{x}{1-x} = x + \frac{x^2}{(1+x)^3} + \frac{2^2 x^3}{(1+2x)^4} + \frac{3^3 x^4}{(1+3x)^5} + \ldots + R(x) .$$

En choisissant $x = \frac{1}{2}$ on obtient

$$\tfrac{1}{2} = 1/2^2 + 1/3^3 + 2^2/4^4 + 3^3/5^5 + \ldots + \tfrac{1}{2}R .$$

La substitution $u = \frac{1}{2}t$ donne

$$\tfrac{1}{2}R = \lim_{m\to\infty} \left\{ (-1)^m (m+1) \int_0^1 \left[\frac{\binom{m}{2} t^{m-2}}{(3-t)^{m+2}} - \frac{\binom{m}{3} t^{m-3} 2^m}{(4-2t)^{m+2}} + \ldots + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{(-1)^m \binom{m}{m} t^0 (m-1)^m}{\big(m+1-(m-1)t\big)^{m+2}} \right] dt \right\}.$$

M. O. Kolberg [2] a trouvé que

$$\tfrac{1}{2} = 1/2^2 + 1/3^3 + 2^2/4^4 + 3^3/5^5 + \dots + \int_0^\infty \frac{x^x}{(x+2)^{x+2}}\,dx\,.$$

C'est ainsi qu'il a pu constater que ma formule orginelle, sans le terme complémentaire, était incorrecte.

BIBLIOGRAPHIE

1. V. Brun, *Sur la formule d'inversion de M. Tambs Lyche,* C. R. Acad. Sci. Paris 194 (1932), 2276–2277.
2. O. Kolberg, *Über ein Problem von Viggo Brun,* Math. Scand. 3 (1955), 221–223.
3. R. Tambs Lyche, *Une formule d'itération,* Bull. Soc. Math. France 55 (1927), 102–113.

UNIVERSITÉ D'OSLO, NORVÈGE