MATH. SCAND. 3 (1955), 303–305

ABSCHWÄCHUNG EINER KLASSISCHEN GRUPPENDEFINITION

TRYGVE NAGELL zum 60. Geburtstag gewidmet

BENGT STOLT

1. Eine der klassischen Gruppendefinitionen kann folgendermassen formuliert werden:

1. *In einer nichtleeren Menge bestehe eine Kompositionsregel, die einem ersten Element a und einem zweiten Element b genau ein drittes Element c zuordnet. Die Formel dieser Komposition ist $ab = c$.*

2. *Für die Komposition dreier Elemente a, b und c gilt das assoziative Gesetz: $(ab)c = a(bc)$.*

3. *Zu zwei beliebigen Elementen a und b gibt es genau ein Element x, das $ax = b$ erfüllt.*

4. *Zu zwei beliebigen Elementen a und b gibt es genau ein Element y, das $ya = b$ erfüllt.*

Diese Definition kommt u. a. bei Nagell [1, S. 43] vor.

Es liegt nun nahe, die klassische Definition dadurch abzuschwächen, dass man die Axiome 3. und 4. durch die folgenden 3′. und 4′. ersetzt, in denen die eindeutige Bestimmtheit der Elemente x und y nicht gefordert wird.

3′. *Zu zwei beliebigen Elementen a und b gibt es ein Element x, das $ax = b$ erfüllt.*

4′. *Zu zwei beliebigen Elementen a und b gibt es ein Element y, das $ya = b$ erfüllt.*

Das System 1., 2., 3′., 4′. kommt in den meisten Lehrbüchern der Gruppentheorie vor; siehe z. B. Zassenhaus [2, S. 2].

2. Es ist jedoch bemerkenswert, dass man Systeme bilden kann, in welchen 3. und 4. noch weiter abgeschwächt sind. Indem wir das beliebige Element b durch ein spezielles Element d der Menge ersetzen, formulieren wir die folgenden Postulate:

Eingegangen am 5. Juni 1955.

3″. Es gibt in der Menge ein Element d mit der Eigenschaft, dass es zu d und einem beliebigen Element a genau ein Element x gibt, das $ax=d$ erfüllt.

4″. Zu dem Element d von 3″. und einem beliebigen Element a gibt es mindestens ein Element y, das $ya=d$ erfüllt.

4‴. Zu dem Element d von 3″. und einem beliebigen Element a gibt es höchstens ein Element y, das $ya=d$ erfüllt.

Foster [3] hat gezeigt, dass das System 1., 2., 3′., 4″. (für irgend ein Element d) vollständig ist, d. h. dass es mit einer Gruppendefinition äquivalent ist. Es ist aber möglich, noch schwächere Systeme zu bilden.

In meiner Dissertation [4] wird gezeigt, dass die Systeme 1., 2., 3″., 4″. und 1., 2., 3″., 4‴. vollständig sind. Die Beweise dafür werden mit der Hilfe gruppentheoretischer Begriffe und Hilfssätze geführt. Es ist das Ziel der vorliegenden Note, die Vollständigkeit dieser Systeme ohne derartige Hilfsmittel zu beweisen.

3. Zunächst erinnern wir daran, dass ein System vollständig ist, wenn 1. und 2. bestehen und wenn die Menge ein rechtsseitiges Einselement e mit der Eigenschaft enthält, dass es zu e und einem beliebigen Element a ein rechtsseitiges Inverses a' gibt, das also $aa'=e$ erfüllt. Diese Gruppendefinition, die zum erstenmal von Dickson [5] aufgestellt wurde, kommt in den meisten Lehrbüchern der Gruppentheorie vor; siehe z. B. Zassenhaus [2, S. 1].

Nach dieser Vorbemerkung werden wir die Vollständigkeit der Systeme 1., 2., 3″., 4″. und 1., 2., 3″., 4‴. beweisen. Wegen 3″. gibt es zum Element d genau ein Element e, das $de=d$ erfüllt. Zunächst zeigen wir, dass man zu e und einem beliebigen Element a ein rechtsseitiges Inverses a' finden kann, das also $aa'=e$ erfüllt. Die Herleitung dieses Resultates hängt nur von 3″. ab, und dieser Teil der Beweise ist also für die beiden Systeme gemeinsam. Dann werden wir zeigen, dass e für jedes System ein rechtsseitiges Einselement ist.

Um den ersten Teil der Beweise zu erledigen, bilden wir $de=d$ und $dd=d^2$ und bestimmen nach 3″. das Element d' so, dass $d^2d'=d$ gilt. Dann erhalten wir

$$d(ee) = (de)e = de = d$$

und

$$d(dd') = (dd)d' = d^2d' = d\,.$$

Da e durch $de=d$ eindeutig bestimmt ist, ergibt sich hieraus $ee=e$ und $dd'=e$.

Wenn a ein beliebiges Element ist, so gibt es wegen 3″ ein Element x, für das $ax=d$ gilt. Setzen wir $xd'=a'$, so erhalten wir hieraus

$$aa' = a(xd') = (ax)d' = dd' = e ,$$

womit der erste Teil der Beweise erledigt ist.

Die weitere Beweisführung ist für die beiden Systeme verschieden.

Wenn 4″. besteht, so gibt es zu beliebigem a ein y, für welches $ya=d$ gilt. Dann haben wir

$$y(ae) = (ya)e = de = d .$$

Aus $ya=d$ und $y(ae)=d$ folgt $ae=a$ wegen 3″., womit gezeigt ist, dass e ein rechtsseitiges Einselement ist.

Wenn 4‴. besteht, müssen wir noch einmal die Existenzeigenschaft von 3″. benutzen. Wegen 3″. gilt $ed_\alpha=d$ für ein gewisses d_α, woraus

$$ed = e(ed_\alpha) = (ee)d_\alpha = ed_\alpha = d$$

folgt. Aus

$$(ea)x = e(ax) = ed = d$$

ergibt sich $ea=a$ wegen 4‴., womit gezeigt ist, dass e linksseitiges Einselement ist. Aus

$$(ae)x = a(ex) = ax = d$$

folgt schliesslich $ae=a$ wegen 4‴. Das Element e ist also rechtsseitiges Einselement, womit die Vollständigkeit der beiden Systeme gezeigt ist.

LITERATUR

1. T. Nagell, *Lärobok i algebra*, Uppsala, 1949.
2. H. Zassenhaus, *Lehrbuch der Gruppentheorie I*, Leipzig und Berlin, 1937.
3. R. M. Foster, *A simplified set of postulates for a group*, Bull. Amer. Math. Soc. 42 (1936), 846–848.
4. B. Stolt, *Über Axiomensysteme, die eine abstrakte Gruppe bestimmen*, Uppsala, 1953.
5. L. E. Dickson, *Definitions of a group and a field by independent postulates*, Trans. Amer. Math. Soc. 6 (1905), 198–204.

UNIVERSITÄT UPPSALA, SCHWEDEN