MATH. SCAND. 4 (1956), 129–142

ÜBER EINE ZAHLENTHEORETISCHE SUMME

SIGMUND SELBERG

Einleitung.

Es sei

$$\sigma_k(x) = \sum_{\lambda=1}^{k} \left\{ x\left[\frac{\lambda}{x}\right] - (x+1)\left[\frac{\lambda}{x+1}\right] \right\}, \tag{1}$$

wo k eine natürliche Zahl und $x > 0$ ist und $[y]$ die grösste ganze Zahl $\leqq y$ bezeichnet. In einer früheren Arbeit [1] habe ich bewiesen, dass für alle reellen positiven x

$$\sigma_k(x) \geqq 0$$

ist. Der Zweck dieser Arbeit ist, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz. *Für alle positiven x und alle natürlichen Zahlen k ist*

$$\sigma_k(x) \leqq k\,. \tag{2}$$

Für grosse k folgt dies aus der früher [2] mitgeteilten Limesrelation

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sigma_k(x)}{k} = \tfrac{1}{2}\,,$$

die von E. Jacobsthal bewiesen worden ist.

In den Arbeiten [2] und [3] habe ich die Funktion $\sigma_k(x)$ und einige ihrer Eigenschaften für ganzzahlige x benutzt, um einige Resultate aus der analytischen Zahlentheorie zu erhalten. In [3] habe ich mich sogar der Ungleichheit (2), die wir hier beweisen werden, bedient.

Es ist bequem, zunächst den Satz für irrationale x zu beweisen.

Hierzu benutzen wir die in [1] abgeleitete Formel

$$\sigma_k(x) = \sum_{n=1}^{m_1} [nx] + \tfrac{1}{2}(x+1)(m_1^2+m_1) - x \sum_{n=m_1+1}^{m} [nx] + kx(m-m_1) - km_1\,, \tag{3}$$

worin

$$\left[\frac{k}{x}\right] = m, \quad \left[\frac{k}{x+1}\right] = m_1$$

Eingegangen am 23. April 1956.

gesetzt ist. Es ist also

$$m \geqq m_1 .$$

Ist in (1) jeder Summand $\leqq 1$, so ist der Satz richtig. Er braucht also nur unter der Annahme bewiesen zu werden, dass mindestens ein Summand >1 ist. Unter den k Summanden in (1) sei der h-te, $2 \leqq h \leqq k$, der letzte, der >1 ist. Da $\sigma_k(x) \leqq \sigma_h(x)+k-h$ ist, wird also $\sigma_k(x) \leqq k$, wenn $\sigma_h(x) \leqq h$ ist, und in σ_h ist der letzte Summand >1. Es ist also erlaubt anzunehmen, dass in (1) der letzte Summand >1 ist. Diese Voraussetzung hat zur Folge, dass der Fall $m=m_1$ bei Seite bleiben kann, da ja für $m=m_1$ das letzte Summenglied <0 ist. Daher haben wir als weitere Bedingung

$$m > m_1 ,$$

und die Voraussetzung über das letzte Glied ergibt

$$xm-(x+1)m_1 > 1 ,$$

also

(4) $$x > \frac{m_1+1}{m-m_1} .$$

Wegen

$$\sum_{n=1}^{N} [nx] = \sum_{n=1}^{N} [(N+1-n)x]$$

erhält man

$$2\sum_{n=1}^{N} [nx] = \sum_{n=1}^{N} \{[nx]+[(N+1)x-nx]\}$$
$$\leqq N[(N+1)x] ,$$

wenn man $[a]+[b] \leqq [a+b]$ auf jedes Summenglied anwendet.

Benutzt man diese Ungleichheit für $\sum_1^N [nx]$ im ersten Glied der rechten Seite von (3), so folgt für $\sigma_k(x)-k$ die Grundrelation

(5) $$\sigma_k(x)-k \leqq \tfrac{1}{2}m_1[(m_1+1)x]+\tfrac{1}{2}(x+1)(m_1^2+m_1)-$$
$$-x\sum_{n=m_1+1}^{m} [nx]+kx(m-m_1)-k(m_1+1) .$$

Der Beweis wird in mehrere Teile zerlegt: (I) $m=m_1+1$; (II) $m_1+2 \leqq m \leqq 2m_1-1$; (III) $m=2m_1$; (IV) $m=2m_1+1$; (V) $m \geqq 2m_1+2$.

§ 1. Fall (I): $m = m_1+1$.

Die Ungleichheit (5) ergibt in diesem Falle

(6) $$\sigma_k(x)-k \leqq (\tfrac{1}{2}m_1-x)[(m_1+1)x]+\tfrac{1}{2}(x+1)(m_1^2+m_1)+kx-k(m_1+1) .$$

Da wegen $m = m_1 + 1$ und (4)

$$x > m_1 + 1$$

ist, ist das erste Glied rechts in (6) negativ. Daher wird bei Verkleinerung von $[(m_1+1)x]$ die rechte Seite vergrössert. Wegen

$$k < (x+1)(m_1+1)$$

ist

$$[(m_1+1)x] \geqq k - m_1 - 1 .$$

Deswegen folgt

$$\sigma_k(x) - k \leqq (\tfrac{1}{2}m_1 - x)(k - m_1 - 1) + \tfrac{1}{2}(x+1)(m_1^2 + m_1) + kx - k(m_1+1) .$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite wird nach Ausrechnung

$$(\tfrac{1}{2}m_1 + 1)(mx - k) < 0 ,$$

womit Fall (I) erledigt ist.

In den folgenden Fällen ist stets $m \geqq m_1 + 2$. Aus

$$mx < k < (x+1)(m_1+1)$$

folgt daher

$$x < \frac{m_1+1}{m - m_1 - 1} .$$

Wegen (4) gilt also im folgenden

$$\frac{m_1+1}{m-m_1} < x < \frac{m_1+1}{m-m_1-1} . \tag{7}$$

§ 2. Fall (II): $m_1 + 2 \leqq m \leqq 2m_1 - 1$.

Indem man in (5) im ersten Glied der rechten Seite die eckige Klammer entfernt und in der Summe $[nx]$ durch $nx - 1$ ersetzt, vergrössert man die rechte Seite und erhält

$$\begin{aligned}\sigma_k(x) - k \leqq\ & (x + \tfrac{1}{2})(m_1^2 + m_1) - \tfrac{1}{2}x^2(m - m_1)(m + m_1 + 1) + \\ & + x(m - m_1) + kx(m - m_1) - k(m_1 + 1) .\end{aligned} \tag{8}$$

Die beiden Glieder rechts, die den Faktor k enthalten, sind wegen (4) zusammen positiv und werden also vergrössert, wenn man k durch die grössere Zahl $(x+1)(m_1+1)$ ersetzt. Dadurch ergibt sich

$$\begin{aligned}\sigma_k(x) - k \leqq\ & (x + \tfrac{1}{2})(m_1^2 + m_1) - \tfrac{1}{2}x^2(m - m_1)(m + m_1 + 1) + \\ & + x(m - m_1) + x^2(m_1 + 1)(m - m_1) + \\ & + x(m_1 + 1)(m - m_1) - x(m_1 + 1)^2 - (m_1 + 1)^2 .\end{aligned}$$

Setzt man

$$m - m_1 = d$$

und ordnet die rechte Seite nach Potenzen von x, so erhält man

$$\sigma_k(x) - k \leqq -\tfrac{1}{2}x^2 d(d-1) + x\{(d-1)(m_1+2)+1\} - \tfrac{1}{2}(m_1+1)(m_1+2)\,. \tag{9}$$

Das in x quadratische Polynom der rechten Seite von (9) hat die Diskriminante

$$\begin{aligned}\varDelta &= \{(d-1)(m_1+2)+1\}^2 - d(d-1)(m_1+1)(m_1+2)\\ &= (d-1)(d-m_1)(m_1+2)+1\,.\end{aligned}$$

Da nun im Falle (II) $2 \leqq d \leqq m_1 - 1$ gilt, ist die ganzzahlige Diskriminante $\varDelta < 0$ und das Polynom auf der rechten Seite von (9) negativ definit, womit der Fall (II) erledigt ist.

§ 3. Fall (III): $m = 2m_1$.

Die Diskriminante $\varDelta$ wird hier gleich 1. Daher zerfällt das quadratische Polynom in zwei lineare Faktoren mit rationalen Koeffizienten. Man rechnet leicht nach, dass die Nullstellen

$$\frac{m_1+1}{m_1-1} \quad \text{und} \quad \frac{m_1+2}{m_1} < \frac{m_1+1}{m_1-1}$$

sind, so dass (9) in diesem Falle die Gestalt

$$\sigma_k(x) - k \leqq -\tfrac{1}{2}m_1(m_1-1)\left(x - \frac{m_1+2}{m_1}\right)\left(x - \frac{m_1+1}{m_1-1}\right) \tag{10}$$

hat. Wegen (7) ist

$$x < \frac{m_1+1}{m-m_1-1} = \frac{m_1+1}{m_1-1}\,,$$

also der letzte Faktor rechts in (10) negativ. Wenn also $x \leqq (m_1+2)/m_1$ ist, so ist der Satz bewiesen. Daher brauchen wir nur noch den Fall zu betrachten, dass

$$\frac{m_1+2}{m_1} < x < \frac{m_1+1}{m_1-1} \tag{11}$$

ist. Hieraus folgt wegen

$$k > mx = 2m_1 x > 2(m_1+2)\,,$$

dass

$$k \geqq 2m_1 + 5 \tag{12}$$

wird. Andererseits ist

$$(13)\qquad k < (x+1)(m_1+1) < (m_1+1)\left(1+\frac{m_1+1}{m_1-1}\right) = 2m_1+4+\frac{4}{m_1-1}.$$

Aus (12) und (13) folgt $m_1 < 5$, und wegen $m = 2m_1 \geqq m_1+2$ ist $m_1 \geqq 2$. Daher kommen nur die Werte $m = 2, 3, 4$ in Frage. Wegen (12) und (13) ist in den Fällen

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & m_1 = 2: & 9 \leqq k < 12; \\ \text{(b)} & m_1 = 3: & k = 11; \\ \text{(c)} & m_1 = 4: & k = 13. \end{array}$$

(a) Für $m_1 = 2$, $k = 9, 10, 11$ ist nach (11)

$$2 < x < 3$$

und wegen $mx = 2m_1x < k < (x+1)(m_1+1)$

$$(14)\qquad \frac{k}{m_1+1} - 1 < x < \frac{k}{2m_1},$$

also für $m_1 = 2$

$$(15)\qquad \tfrac{1}{3}k - 1 < x < \tfrac{1}{4}k.$$

Hieraus folgt

$$k-3 < 3x < k - \tfrac{1}{4}k \leqq k - 2 - \tfrac{1}{4},$$

da $k \geqq 2m_1 + 5 \geqq 9$ ist. Also ist

$$(16)\qquad [3x] = k-3.$$

Nach (15) ist

$$k-1 \leqq k-4+\tfrac{1}{3}k < 4x < k,$$

woraus

$$(17)\qquad [4x] = k-1.$$

Nach (5) erhält man nun, wenn man (15), (16) und (17) benutzt,

$$\begin{aligned} \sigma_k(x) - k &\leqq [3x]+3x+3-x[3x]-x[4x]+2kx-3k \\ &= -2k+7x < -2k+\tfrac{7}{4}k = -\tfrac{1}{4}k < 0. \end{aligned}$$

Daher ist für $m_1 = 2$ alles bewiesen.

(b) Sei $m_1 = 3$, $k = 11$.

Dann ergibt (14)

$$(18)\qquad \tfrac{7}{4} < x < \tfrac{11}{6},$$

und nach (5) wird

$$\sigma_k(x) - k \leqq \tfrac{3}{2}[4x] - x[4x] - x[5x] - x[6x] + 39x - 38.$$

Nach (18) sind

$$[4x] = 7,\ [5x] \geqq 8,\ [6x] = 10$$

und daher

$$\sigma_k(x) - k \leqq 14x - \tfrac{55}{2} < 14 \cdot \tfrac{11}{6} - \tfrac{55}{2} = -\tfrac{11}{6} < 0 .$$

(c) Bleibt noch der Fall $m_1 = 4$, $k = 13$, in dem (14) die Relation

(19) $$\tfrac{8}{5} < x < \tfrac{13}{8}$$

und (5) die Ungleichheit

$$\sigma_k(x) - k \leqq 2[5x] - x\{[5x] + [6x] + [7x] + [8x]\} + 62x - 55$$

ergibt. Aus (19) folgt

$$[5x] = 8, \; [6x] = 9, \; [7x] = 11, \; [8x] = 12$$

und somit

$$\sigma_k(x) - k \leqq 22x - 39 < \tfrac{143}{4} - 39 = -\tfrac{13}{4} < 0 .$$

Damit ist Fall (III) erledigt.

§ 4. Fall (IV): $m = 2m_1 + 1$.

Aus (7) folgt

(20) $$1 < x < 1 + m_1^{-1} .$$

Wenn

$$mx = (2m_1 + 1)x < k < (x+1)(m_1+1)$$

beachtet wird, ergibt sich weiter mit Benutzung von (20)

$$2m_1 + 1 < k < (m_1+1)(2 + m_1^{-1}) = 2m_1 + 3 + m_1^{-1} .$$

Also ist nur

(21) $$k = 2m_1 + 2 ,$$

oder

(22) $$k = 2m_1 + 3$$

möglich.

Im Falle (21) ist wegen $(2m_1 + 1)x < k = 2m_1 + 2$

$$1 < x < 1 + \frac{1}{2m_1 + 1} ,$$

also

$$n < nx < n + \frac{n}{2m_1 + 1} .$$

Daher ist

$$[nx] = n, \qquad n = 1, 2, \ldots, \qquad 2m_1 + 1 = m .$$

Die rechte Seite in (5) ist somit leicht auszurechnen, und es ergibt sich

$$\begin{aligned}\sigma_k(x) - k &\leqq (m_1+1)\{x(m_1+1) - m_1 - 2\} \\ &< (m_1+1)\left\{(m_1+1)\left(1+\frac{1}{2m_1+1}\right) - m_1 - 2\right\} \\ &= (m_1+1)\left\{\frac{m_1+1}{2m_1+1} - 1\right\} < 0 .\end{aligned}$$

Im Falle (22) ist $k = 2m_1+3 > (2m_1+1)x$, also

$$x < 1 + \frac{2}{2m_1+1} .$$

Weiter folgt aus $k = 2m_1+3 < (m_1+1)(x+1)$, dass

$$x > 1 + \frac{1}{m_1+1}$$

ist. Wir haben hier also

$$1 + \frac{1}{m_1+1} < x < 1 + \frac{2}{2m_1+1} \tag{23}$$

und daher

$$n + \frac{n}{m_1+1} < nx < n + \frac{2n}{2m_1+1} .$$

Daraus folgt

$$\begin{cases} [nx] = n, & n = 1, 2, \ldots, m_1 , \\ [nx] = n+1 & \text{für} \quad n = m_1+1, \ldots, m . \end{cases}$$

Infolgedessen kann man $\sigma_k(x)$ nach (3) explizit berechnen. Man erhält

$$\begin{aligned}\sigma_k(x) - k &= (m_1^2 + m_1)(\tfrac{1}{2}x + 1) - \tfrac{1}{2}x(m_1+1)(3m_1+4) + \\ &\quad + (2m_1+3)(m_1+1)x - (m_1+1)(2m_1+3) \\ &= (m_1+1)\{(m_1+1)x - m_1 - 3\} .\end{aligned}$$

Mit Benutzung von (23) wird

$$(m_1+1)x - m_1 - 3 < -2 + \frac{2m_1+2}{2m_1+1} = -1 + \frac{1}{2m_1+1} < 0 ,$$

womit auch Fall (IV) erledigt ist.

§ 5. Fall (V): $m \geqq 2m_1 + 2$.

Dieser Teil des Beweises ist der komplizierteste. Aus der rechten Hälfte von (7) folgt wegen $m \geqq 2m_1+2$, dass

$$x < 1 \tag{24}$$

gilt. Da sich ausserdem wegen (7) aus der Definition von m, m_1 und der Irrationalität von x die noch wiederholt zu benutzende Relation

$$m_1(x+1)+1 < mx < k < (m_1+1)(x+1) < (m+1)x \tag{25}$$

ergibt, folgt zusammen mit $x<1$, dass $k<(m_1+1)2 \leqq m$, also

$$m \geqq k+1$$

ist. Folglich gilt

$$k > mx > (k+1)x\,,$$

so dass (24) zu

$$x < \frac{k}{k+1} \tag{26}$$

verschärft ist.

Wenn für eine ganze Zahl $s \geqq 0$ die Relation

$$\left[\frac{k+s}{x}\right] = m+s$$

richtig ist, was für $s=0$ der Fall ist, so folgt

$$\frac{k+s}{x} - 1 < m+s < \frac{k+s}{x}\,.$$

Hierin ist wegen $m=[k/x]$ und $x<1$ die rechte Hälfte von selbst erfüllt, während die linke Hälfte

$$s < \frac{(m+1)x-k}{1-x} < \frac{x}{1-x} \tag{27}$$

ergibt. Da die rechte Seite mit x wächst, folgt wegen (26) und (27), dass $s<k$, also $s \leqq k-1$.

Es gibt also eine eindeutig bestimmte ganze Zahl r, $1 \leqq r \leqq k$, so dass

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\dfrac{k+s}{x}\right] = m+s \quad \text{für} \quad s = 0, 1, 2, \ldots, r-1\,, \\[2ex] \left[\dfrac{k+r}{x}\right] \geqq m+r+1\,. \end{array}\right. \tag{28}$$

Es ist zur Ableitung von (5) die Relation

$$\sum_{n=1}^{N} [nx] \leqq \frac{N}{2}[(N+1)x]$$

bewiesen worden. Ersetzt man hierin N durch $N-1$ und addiert dann auf beiden Seiten $[Nx]$, so folgt

$$\sum_{n=1}^{N}[nx] \leqq \frac{N+1}{2}[Nx]. \tag{29}$$

Wendet man diese Relation auf $N = m_1$ an, so erhält man

$$\sum_{n=1}^{m_1}[nx] \leqq \frac{m_1+1}{2}[m_1x]. \tag{30}$$

Hierin kann $[m_1x]$ explizit angegeben werden. Aus (25) folgt nämlich

$$[m_1x] \leqq k-m_1-2.$$

Andererseits folgt aus der rechten Hälfte von (25)

$$m_1x > k-m_1-1-x > k-m_1-2,$$

also

$$[m_1x] \geqq k-m_1-2.$$

Daher ist

$$[m_1x] = k-m_1-2, \tag{31}$$

also nach (30)

$$\sum_{n=1}^{m_1}[nx] \leqq \tfrac{1}{2}(m_1+1)(k-m_1-2). \tag{32}$$

Diese Summenabschätzung wird benötigt, um den Fall (V) zu erledigen, da die früheren Abschätzungen für $\sigma_k(x)-k$ zu ungenau sind. Zunächst greifen wir auf eine Formel zurück, die in [1] als Gleichung (3′) steht:

$$\sum_{\lambda=1}^{k}\left[\frac{\lambda}{1+x}\right] = -\sum_{n=1}^{m_1}[nx]-\tfrac{1}{2}(m_1^2+m_1)+km_1.$$

Tragen wir dies in (1) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\sigma_k(x)-k = x\sum_{n=1}^{k}\left[\frac{n}{x}\right]+(x+1)\sum_{n=1}^{m_1}[nx]+\\ +\frac{x+1}{2}(m_1^2+m_1)-(x+1)km_1-k.\end{aligned} \tag{33}$$

Für die zweite Summe auf der rechten Seite gibt (32) eine obere Schranke. Für die erste Summe rechts findet man eine obere Schranke unter Verwendung der vorhin eingeführten Zahl r und ihrer Eigenschaften. Es ergibt sich nämlich mit Hilfe von (28) und (29)

$$(34)\qquad \sum_{n=1}^{k}\left[\frac{n}{x}\right] = \sum_{n=1}^{k+r-1}\left[\frac{n}{x}\right] - \sum_{n=k+1}^{k+r-1}\left[\frac{n}{x}\right]$$
$$= \sum_{n=1}^{k+r-1}\left[\frac{n}{x}\right] - \sum_{s=1}^{r-1}\left[\frac{k+s}{x}\right]$$
$$= \sum_{n=1}^{k+r-1}\left[\frac{n}{x}\right] - \sum_{s=1}^{r-1}(m+s)$$
$$\leqq \tfrac{1}{2}(k+r)(m+r-1) - m(r-1) - \tfrac{1}{2}(r^2-r)$$
$$= \tfrac{1}{2}m(k-r+2) + \tfrac{1}{2}k(r-1)\,,$$

was für $r=1$ direkt aus (29) folgt. Aus dieser Abschätzung, (32) und (33) ergibt sich nach Zusammenfassung

$$(35)\qquad \sigma_k(x) - k \leqq \tfrac{1}{2}(k-r+2)mx + \tfrac{1}{2}k(r+1)x - $$
$$- \tfrac{1}{2}k(x+1)(m_1+1) - (x+1)(m_1+1)\,.$$

Mit Hilfe von (25) folgt

$$\sigma_k(x) - k \leqq \tfrac{1}{2}(k-r+2)k + \tfrac{1}{2}k(r+1)x - \tfrac{1}{2}k^2 - k = \tfrac{1}{2}k\{x(r+1)-r\}\,.$$

Also ist $\sigma_k(x) \leqq k$ für $x < r(r+1)^{-1}$.

Da $r \geqq 1$, also $r(r+1)^{-1} \geqq \frac{1}{2}$, ist daher der Satz für $x < \frac{1}{2}$ richtig. Wir können daher im folgenden voraussetzen, dass

$$(36)\qquad \frac{r}{r+1} < x < \frac{k}{k+1}$$

ist. Nun ist nach (28)

$$m+r+1 < \frac{k+r}{x}\,,$$

und daher

$$(37)\qquad mx < k+r-x(r+1)\,,$$

was eine bessere obere Schranke für mx als (25) gibt, da (36) gilt. Führt man diese Schranke in (35) und die Schranken aus (25) in den letzten Gliedern von (33) ein, so folgt

$$\sigma_k(x) - k \leqq \tfrac{1}{2}(k-r+2)\{k+r-x(r+1)\} + \tfrac{1}{2}k(r+1)x - \tfrac{1}{2}k^2 - k$$
$$= (\tfrac{1}{2}r-1)\{(r+1)x-r\}\,.$$

Wegen der Voraussetzung (36) folgt daher die Richtigkeit des Satzes in den Fällen $r=1$ und $r=2$ für alle irrationalen x zwischen 0 und 1. Da ferner unter dieser Voraussetzung $x > \frac{3}{4}$ für $r \geqq 3$ ist, gilt also der Satz für alle irrationalen $x < \frac{3}{4}$, gleichgültig welchen Wert r hat. Wir können daher im folgenden voraussetzen, dass

$$r \geqq 3, \qquad x > \tfrac{3}{4} \tag{38}$$

ist.

Wir zeigen nun weiter die Richtigkeit des Satzes für den Fall, dass $r \geqq m_1 + 1$ ist. Dann haben wir nach (36)

$$1 > x > \frac{m_1+1}{m_1+2},$$

also

$$n > nx > n - \frac{n}{m_1+2}.$$

Daher ist für alle natürlichen Zahlen $n \leqq m_1 + 2$

$$[nx] = n-1,$$

und es ergibt sich

$$\sum_{n=1}^{m_1} [nx] = \tfrac{1}{2}(m_1^2 - m_1). \tag{39}$$

Da nun $[m_1 x] = m_1 - 1$ ist, bekommen wir aus (31)

$$k = 2m_1 + 1.$$

Wegen

$$\frac{m_1+1}{m_1+2} < x < \frac{m_1+1}{m - m_1 - 1}$$

gilt ferner

$$m < 2m_1 + 3.$$

Zusammen mit $m \geqq 2m_1 + 2$ gibt dies

$$m = 2m_1 + 2.$$

Es wird also nach (34)

$$\sum_{n=1}^{k} \left[\frac{n}{x}\right] \leqq (m_1+1)(2m_1 - r + 3) + \tfrac{1}{2}(2m_1+1)(r-1).$$

Demnach bekommen wir aus (33) und (39)

$$\begin{aligned}\sigma_k(x) - k \leqq{} & x(m_1+1)(2m_1-r+3) + \tfrac{1}{2}(2m_1+1)(r-1)x + \tfrac{1}{2}(x+1)(m_1^2 - m_1) + \\ & + \tfrac{1}{2}(x+1)(m_1^2+m_1) - (x+1)m_1(2m_1+1) - 2m_1 - 1.\end{aligned}$$

Da hierin auf der rechten Seite r den negativen Koeffizienten $-\tfrac{1}{2}x$ bekommt, wird die rechte Seite nicht kleiner, wenn man r durch seinen kleinsten Wert 3 ersetzt. Also ist

$$\begin{aligned}\sigma_k(x) - k &\leqq 2m_1(m_1+1)x + (2m_1+1)x + (x+1)m_1^2 - \\ &\quad - (x+1)(2m_1^2 + m_1) - 2m_1 - 1 \\ &= -(m_1^2 + 3m_1 + 1)(1-x) < 0.\end{aligned}$$

Also ist der Satz für $r > m_1$ richtig.

Wir dürfen daher in Zukunft annehmen, dass

$$3 \leqq r \leqq m_1 \tag{40}$$

ist.

Die in (35) auftretende Grösse $(x+1)(m_1+1)$ bezeichnen wir zur Abkürzung mit y. Unter Benutzung von (37) erhalten wir dann nach (35)

$$\begin{aligned}\sigma_k(x)-k &\leqq \tfrac{1}{2}(k-r+2)\bigl(k+r-(r+1)x\bigr)+\tfrac{1}{2}k(r+1)x-\tfrac{1}{2}ky-y \\ &= (\tfrac{1}{2}r-1)\{(r+1)x-r\}-(\tfrac{1}{2}k+1)(y-k)\,.\end{aligned} \tag{41}$$

Nach (25) ist $y > k$, und nach (28) ist $k \geqq r$, also $\frac{1}{2}k+1 > \frac{1}{2}r-1$ und folglich

$$\sigma_k(x)-k < (\tfrac{1}{2}r-1)\{(r+1)x-r-y+k\}\,. \tag{42}$$

Daher ist der Satz richtig, falls

$$(r+1)x-r-y+k \leqq 0$$

ist. Es bleibt also nur übrig, den Satz unter der Voraussetzung zu beweisen, dass $y < k+(r+1)x-r$, also

$$(1+x)(m_1+1) < k+(r+1)x-r \tag{43}$$

gilt. Der Vergleich von (37) und (43) zeigt, dass k in der rechten Hälfte des Intervalls $\bigl(mx, (m_1+1)(x+1)\bigr)$ liegt. Um den Rest des Beweises zu erledigen, soll durch Ausnutzung der Voraussetzung (43) die Abschätzung von $\sigma_k(x)-k$ durch Verbesserung von (32) verschärft werden Nach (31) ist $k-m_1-2 < m_1x$, also wegen $x < 1$

$$k-m_1-2-t < (m_1-t)x \tag{44}$$

für $t \geqq 0$. Andererseits ist nach (43)

$$m_1x < k-m_1-1+rx-r\,,$$

also

$$(m_1-t)x < k-m_1-1+(r-t)x-r\,,$$

und wegen $x < 1$

$$(r-t)x-r < -t$$

für $t = 0, 1, \ldots, r$, so dass

$$(m_1-t)x < k-m_1-1-t, \qquad t = 0, 1, \ldots, r\,,$$

wird, was zusammen mit (44)

$$[(m_1-t)x] = k-m_1-2-t, \qquad t = 0, 1, \ldots, r\,,$$

ergibt. Daraus folgt mit Benutzung von (40) und (30)

$$\sum_{n=1}^{m_1}[nx] = \sum_{n=0}^{m_1-r}[nx]+\sum_{t=0}^{r-1}[(m_1-t)x]$$
$$\leqq \tfrac{1}{2}(m_1-r+1)(k-m_1-2-r)+r(k-m_1-2)-\tfrac{1}{2}(r^2-r)\,.$$

Wir bekommen nach Ausrechnung der rechten Seite

$$\sum_{n=1}^{m_1}[nx] \leqq \tfrac{1}{2}k(m_1+1)-\tfrac{1}{2}m_1(m_1+1)-(m_1+1)(r+1)+\tfrac{1}{2}kr$$

und hieraus mit $(x+1)(m_1+1)=y$

$$(x+1)\sum_{n=1}^{m_1}[nx] \leqq \tfrac{1}{2}y\big(k-m_1-2(r+1)\big)+\tfrac{1}{2}kr(x+1)\,.$$

Hieraus und aus (33), (34) ergibt sich

$$\sigma_k(x)-k \leqq \tfrac{1}{2}mx(k-r+2)+\tfrac{1}{2}kx(r-1)+$$
$$+\tfrac{1}{2}y\big(k-m_1-2(r+1)\big)+\tfrac{1}{2}kr(x+1)+\tfrac{1}{2}ym_1-ky+kx$$

und endlich wegen (37)

$$\sigma_k(x)-k < \tfrac{1}{2}(k-r+2)\{k+r-(r+1)x\}+\tfrac{1}{2}k(r+1)x-$$
$$-\tfrac{1}{2}yk-y(r+1)+\tfrac{1}{2}kr(x+1)\,.$$

Da y hier einen negativen Koeffizienten bekommt, wird die rechte Seite vergrössert, wenn man y durch die kleinere Zahl k ersetzt. Also wird

$$\begin{aligned}\sigma_k(x)-k &< (\tfrac{1}{2}r-1)\{(r+1)x-r\}-\tfrac{1}{2}kr(1-x)\\ &= \tfrac{1}{2}r\{(r+1)x-r-k+kx\}-\{(r+1)x-r\}\\ &< \tfrac{1}{2}r\{rx-r-k+(k+1)x\}\end{aligned}$$

und daher wegen (26)

$$\sigma_k(x)-k < \tfrac{1}{2}r^2(x-1) < 0\,,$$

womit der Beweis für irrationale x vollendet ist.

§ 6. Beweis für rationale x.

Es sei nun x eine positive rationale Zahl. Dann wählen wir eine positive irrationale Grösse ε folgendermassen: Für jedes $\lambda=1, 2, \ldots, k$ ist

$$\operatorname{Min}\left\{x-\frac{\lambda}{[\lambda x^{-1}]+1},\ x+1-\frac{\lambda}{[\lambda(x+1)^{-1}]+1}\right\} = \delta_\lambda$$

positiv, und mit

$$\operatorname{Min}(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k) = \delta$$

wählen wir nun willkürlich das irrationale ε kleiner als Min (δ, x). Dann ist

$$\varepsilon < \delta \leqq \delta_\lambda \leqq x - \frac{\lambda}{[\lambda x^{-1}]+1},$$

$$x - \varepsilon > \frac{\lambda}{[\lambda x^{-1}]+1},$$

also

$$\frac{\lambda}{x} < \frac{\lambda}{x-\varepsilon} < \left[\frac{\lambda}{x}\right] + 1 .$$

Hieraus folgt

$$\left[\frac{\lambda}{x-\varepsilon}\right] = \left[\frac{\lambda}{x}\right], \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, k, \tag{45}$$

und ebenso

$$\left[\frac{\lambda}{x+1-\varepsilon}\right] = \left[\frac{\lambda}{x+1}\right], \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, k. \tag{46}$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (45) und (46) wird

$$\sigma_k(x) = \sigma_k(x-\varepsilon) + \varepsilon \sum_{\lambda=1}^{k} \left\{ \left[\frac{\lambda}{x}\right] - \left[\frac{\lambda}{x+1}\right] \right\},$$

woraus

$$\sigma_k(x) \leqq k + \varepsilon \sum_{\lambda=1}^{k} \left\{ \left[\frac{\lambda}{x}\right] - \left[\frac{\lambda}{x+1}\right] \right\}.$$

Geht die irrationale Grösse ε gegen 0, so folgt

$$\sigma_k(x) \leqq k .$$

LITERATUR

1. S. Selberg, *On a conjecture by Ernst Jacobsthal,* Norske Vid. Selsk. Forh. 26 (1953), Nr. 21, 81–93.
2. S. Selberg, *Über die Summe* $\sum_{n \leqq x} \frac{\mu(n)}{n}$, Norske Vid. Selsk. Forh. 28 (1955), Nr. 8, 37–41.
3. S. Selberg, *Über eine Vermutung von P. Turan,* Norske Vid. Selsk. Forh. 29 (1956), Nr. 8, 33–36.

NORWEGISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE, TRONDHEIM