

BEITRÄGE ZUR THEORIE DER LAPLACE-STIELTJES-TRANSFORMATIONEN

ARNE PLEIJEL

Carlson [1] hat gewisse Bedingungen dafür gefunden, dass eine durch eine Dirichletsche Reihe definierte Funktion in einer Halbebene beschränkt ist. Seine Methode ist weiterer Anwendungen fähig, und ich habe in einer früheren Arbeit [3] gewisse notwendige und hinreichende Bedingungen dafür gefunden, dass ein Laplace-Integral

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} F(x) dx \quad (s = \sigma + it)$$

für $\sigma > 0$ die Relation $f(s) = O(t^k)$, wo $k \geq 0$ ist, erfüllt.

In der vorliegenden Arbeit wird mit $f(s)$ durchgehend ein Laplace-Stieltjes-Integral

$$(1) \quad f(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} d\alpha(x) \quad (s = \sigma + it)$$

und seine analytische Fortsetzung bezeichnet. Hier ist $\alpha(x)$ eine komplexe Funktion der reellen Variablen x , die in jedem endlichen Intervall $(0, R)$ von beschränkter Variation sein soll. Weiter wird vorausgesetzt, dass das Integral in mindestens einem Punkt $s_0 = \sigma_0 + it_0$ mit positivem σ_0 (und dann natürlich auch für alle s mit $\text{Res} s > \sigma_0$) konvergiert. Wir wollen untersuchen, unter welchen Bedingungen die durch das Laplace-Integral definierte Funktion eine analytische Fortsetzung hat, die für $\text{Res} s > 0$ regulär ist und die Relation $f(s) = O(t^k)$, $k \geq 0$, erfüllt.

Wir beweisen folgenden

SATZ. *Eine hinreichende Bedingung dafür, dass für $\sigma > 0$ gleichmässig $f(s) = O(t^k)$, wo $k \geq 0$, ist die Existenz zweier Konstanten $\kappa > k$ und K , derart dass die Ungleichung*

$$\left| \int_0^y e^{-\tau x} (1 - y^{-1}x)^{\kappa} d\alpha(x) \right| \leq K(1 + |\tau|)^k$$

für alle reellen τ und alle positiven y gilt.

Eingegangen am 2. Februar 1955.

Umgekehrt, wenn $f(s)$ die genannte Eigenschaft hat, so gibt es zu jedem $\kappa > k$ ein K , so dass die obige Ungleichung erfüllt ist.

Hieraus folgt dann unmittelbar folgendes

KOROLLARIUM. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $f(s) = o(t^{k'})$ für $\sigma > 0$ und für jedes $k' > k$, ist, dass man κ und K so bestimmen kann, dass die Ungleichung

$$\left| \int_0^y e^{-i\tau x} (1 - y^{-1}x)^\kappa d\alpha(x) \right| \leq K(1 + |\tau|)^{k'}$$

für alle reellen τ , alle positiven y und alle $k' > k$ gilt.

Um den ersten Teil des Satzes zu beweisen, setzen wir

$$A_\kappa(y) = (\Gamma(\kappa + 1))^{-1} \int_0^y e^{-i\tau x} (y - x)^\kappa d\alpha(x).$$

Zufolge unserer Voraussetzung können wir κ und K so wählen, dass

$$|A_\kappa(y)| \leq K y^\kappa (1 + |\tau|)^k.$$

Das Integral

$$F_\kappa(s) = (s - i\tau)^{\kappa+1} \int_0^\infty e^{-y(s-i\tau)} A_\kappa(y) dy$$

ist für $\sigma \geq \delta > 0$ gleichmäßig konvergent und stellt also eine Funktion dar, die in $s = \sigma + it$ für $\sigma > 0$ regulär analytisch ist. Wir zeigen jetzt:

1. Wenn $\sigma > \sigma_0$ ist, gilt

$$F_\kappa(s) = \int_0^\infty e^{-xs} d\alpha(x),$$

so dass $F_\kappa(s)$ unabhängig von τ und eine analytische Fortsetzung von $f(s)$ ist.

2. Für jedes $\sigma > 0$ gilt

$$F_\kappa(s) = O(t^k).$$

Die Richtigkeit von 1 kann so eingesehen werden: Man setzt ($\sigma > \sigma_0$)

$$F_\kappa(s) = (\Gamma(\kappa + 1))^{-1} (s - i\tau)^{\kappa+1} \int_0^\infty e^{-(s-i\tau)y} dy \int_0^y e^{-i\tau x} (y - x)^\kappa d\alpha(x)$$

und erhält nach einer partiellen Integration (wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\alpha(0) = 0$ setzen)

$$F_{\kappa}(s) = (\Gamma(\kappa + 1))^{-1} (s - i\tau)^{\kappa+1} \int_0^{\infty} e^{-sy} dy \int_0^y \alpha(x) \frac{d}{dx} (e^{i\tau(y-x)} (y-x)^{\kappa}) dx .$$

Da $\alpha(x) = o(e^{\sigma_0 x})$ und das Integral absolut konvergent ist, kann die Integrationsordnung umgekehrt werden, und man erhält

$$\begin{aligned} \Gamma(\kappa + 1) F_{\kappa}(s) &= (s - i\tau)^{\kappa+1} \int_0^{\infty} \alpha(x) \int_x^{\infty} e^{-sy} \frac{d}{dy} (-e^{i\tau(y-x)} (y-x)^{\kappa}) dy dx \\ &= (s - i\tau)^{\kappa+1} \int_0^{\infty} \alpha(x) e^{-sx} \int_0^{\infty} e^{-su} \frac{d}{du} (e^{i\tau u} u^{\kappa}) du dx \\ &= (s - i\tau)^{\kappa+1} \int_0^{\infty} s \alpha(x) e^{-sx} \int_0^{\infty} e^{-(s-i\tau)u} u^{\kappa} du dx \\ &= \Gamma(\kappa + 1) \int_0^{\infty} e^{-sx} d\alpha(x) , \end{aligned}$$

womit die Richtigkeit der Behauptung 1 bewiesen ist. Dass 2 richtig ist, folgt so: Nach der Voraussetzung ist

$$|A_{\kappa}(y)| \leq K y^{\kappa} (1 + |\tau|)^{\kappa} .$$

In dem Ausdruck für $F_{\kappa}(s)$ wählen wir $\tau = t$ (Imaginärteil von s) und erhalten

$$|F_{\kappa}(s)| \leq \sigma^{\kappa+1} \int_0^{\infty} e^{-\sigma y} |A_{\kappa}(y)| dy \leq K \Gamma(\kappa + 1) (1 + |t|)^{\kappa} .$$

Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen.

Um den zweiten Teil des Hauptsatzes zu beweisen, brauchen wir zunächst zwei Hilfssätze.

HILFSSATZ I. *Ist für $\text{Res} > 0$ und für jedes $\varepsilon > 0$ die Funktion $f(s)$ regulär und $o(t^{k+\varepsilon})$, so gilt für $\kappa > k \geq 0$*

$$\begin{aligned} (2\pi i)^{-1} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s) e^{y(s-s_1)} (s-s_1)^{-(\kappa+1)} ds \\ = \begin{cases} (\Gamma(\kappa + 1))^{-1} \int_0^y e^{-s_1 x} (y-x)^{\kappa} d\alpha(x) & (y > 0) \\ 0 & (y \leq 0) , \end{cases} \end{aligned}$$

wobei $c > 0, c > \text{Res}_1$. (Vgl. Doetsch [2], S. 334–344).

BEWEIS. Das Integral kann so geschrieben werden

$$(2\pi)^{-1} e^{y(c-s_1)} \int_{-\infty}^{\infty} f(c+it) e^{iyt} (c+it-s_1)^{-(\kappa+1)} dt,$$

wo $f(s)$ das Laplace-Stieltjes-Integral ist. Wir betrachten das entsprechende Doppelintegral mit endlichen Integrationsgrenzen und bekommen durch Umkehrung der Integrationsordnung

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-1} e^{y(c-s_1)} \int_{-R}^R e^{iyt} (c+it-s_1)^{-(\kappa+1)} dt \int_0^{\xi} e^{-x(c+it)} d\alpha(x) \\ = (2\pi)^{-1} \int_0^{\xi} e^{-s_1 x} d\alpha(x) \int_{-R}^R e^{(y-x)(c+it-s_1)} (c+it-s_1)^{-(\kappa+1)} dt. \end{aligned}$$

Da $\kappa > 0$, ist das zweite Integral in x absolut und gleichmässig konvergent, wenn $R \rightarrow \infty$. Hieraus erhalten wir für $\xi > y$

$$\begin{aligned} (2\pi i)^{-1} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{y(s-s_1)} (s-s_1)^{-(\kappa+1)} ds \int_0^{\xi} e^{-xs} d\alpha(x) \\ = (2\pi)^{-1} \int_0^{\xi} e^{-s_1 x} d\alpha(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{(y-x)(c+it-s_1)} (c+it-s_1)^{-(\kappa+1)} dt \\ = (\Gamma(\kappa+1))^{-1} \int_0^y (y-x)^{\kappa} e^{-s_1 x} d\alpha(x); \end{aligned}$$

denn bekanntlich ist

$$(2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(u-x)(c+it-s_1)} (c+it-s_1)^{-(\kappa+1)} dt = \begin{cases} (\Gamma(\kappa+1))^{-1} (u-x)^{\kappa} & (u-x > 0), \\ 0 & (u-x \leq 0). \end{cases}$$

Die obige Gleichung bleibt richtig für $\xi = \infty$. Dies kann so eingesehen werden. Wenn $c > \text{Re } s_0$ ist, finden wir

$$\left| \int_0^{\xi} e^{-x(c+it)} d\alpha(x) \right| \leq A + A|t|$$

durch partielle Integration und Benutzung von

$$\alpha(x) = o(e^{\sigma_0 x})$$

(vgl. Widder [4, S. 39]). Für $\kappa > 1$ sieht man einfach durch Anwendung des Lebesgueschen Majorantensatzes, dass man ξ gegen ∞ streben lassen darf. Also ist der Hilfssatz I für $\kappa > 1$ und $c > \sigma_0$ bewiesen. Dass er für

alle $\kappa > 0$ richtig ist, sieht man durch Differenzieren der beiden Seiten nach y ein. Diese Differentiation ist erlaubt, da das erhaltene komplexe Integral in jedem endlichen y -Intervall gleichmässig konvergiert. Hiermit ist Hilfssatz I für $c > \sigma_0$ bewiesen. Um einzusehen, dass er auch für beliebige $c > 0$, $c > \text{Res}_1$ gilt, braucht man nur Cauchys Integralsatz anzuwenden, und zwar auf ein Rechteck $E(R)$, dessen Ecken in den Punkten $(c_1, -R)$, (c_1, R) , (c_2, R) und $(c_2, -R)$ liegen. Wenn man in dem Integral

$$\int_{E(R)} f(s) e^{y(s-s_1)} (s-s_1)^{-(\kappa+1)} ds$$

R gegen ∞ wachsen lässt, verschwinden (wenn nur $c_1, c_2 > \text{Res}_1$) die Teilintegrale über die zu der σ -Achse parallelen Wege, und da der Integrand im Inneren des Rechtecks regulär ist, geht hieraus die Richtigkeit des Hilfssatzes hervor.

HILFSSATZ II. *Unter denselben Voraussetzungen wie in Hilfssatz I gilt*

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s) e^{y(s-s_1)} (1 - e^{-y(s-s_1)})^\mu (s-s_1)^{-(\kappa+1)} ds = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s) e^{y(s-s_1)} (s-s_1)^{-(\kappa+1)} ds$$

für $\mu > 0$.

BEWEIS. Das Integral ist absolut konvergent, und da die Entwicklung von

$$(1 - e^{-y(s-s_1)})^\mu$$

in eine Binomialreihe für $c > \text{Res}_1$ gleichmässig in t konvergiert, kann man gliedweise integrieren. Hilfssatz I gibt dann unmittelbar die Richtigkeit der Behauptung.

Der zweite Teil des Hauptsatzes folgt jetzt so: Wenn $y \leq 1$ ist, ergibt sich unmittelbar

$$\left| \int_0^y e^{-i\tau x} (y-x)^\kappa d\alpha(x) \right| \leq y^\kappa \int_0^y |e^{-i\tau x} d\alpha(x)| \leq y^\kappa V[\alpha]^y \leq y^\kappa V[\alpha]_0^1 (1 + |\tau|)^k,$$

wobei $V[\alpha]_0^1$ die totale Variation von $\alpha(x)$ im Intervalle $0 \leq x \leq 1$ ist.

Wenn $y > 1$, geben die Hilfssätze

$$\int_0^y e^{-i\tau x} (y-x)^\kappa d\alpha(x) = (2\pi i)^{-1} \Gamma(\kappa+1) \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma+it+i\tau) e^{y(\sigma+it)} (1 - e^{-y(\sigma+it)})^{\kappa+1} (\sigma+it)^{-(\kappa+1)} dt.$$

Hieraus folgt

$$\left| \int_0^y e^{-i\tau x} (y-x)^\kappa d\alpha(x) \right| \\ \leq (2\pi)^{-1} \Gamma(\kappa+1) K e^{y\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (1+|t+\tau|)^k |1 - e^{-y(\sigma+it)}|^{\kappa+1} |\sigma+it|^{-(\kappa+1)} dt .$$

Diese Ungleichung gilt für alle $\sigma > 0$, und da

$$|1 - e^{-y(\sigma+it)}|^2 |\sigma+it|^{-2} \leq 4t^{-2} \sin^2 \frac{1}{2} ty$$

ist, sieht man (Lebesguescher Majorantensatz), dass sie auch für $\sigma = 0$ gilt:

$$\left| \int_0^y e^{-i\tau x} (y-x)^\kappa d\alpha(x) \right| \\ \leq (2\pi)^{-1} \Gamma(\kappa+1) (1+|\tau|)^k \int_{-\infty}^{\infty} (1+|t|)^k |\sin \frac{1}{2} yt|^{\kappa+1} |t|^{-(\kappa+1)} dt .$$

Die Transformation $u = yt$ gibt

$$\left| \int_0^y e^{-i\tau x} (y-x)^\kappa d\alpha(x) \right| \\ \leq (2\pi)^{-1} \Gamma(\kappa+1) (1+|\tau|)^k y^\kappa \int_{-\infty}^{\infty} (1+y^{-1}|u|)^k |\sin \frac{1}{2} u|^{\kappa+1} |u|^{-(\kappa+1)} du \\ \leq (2\pi)^{-1} \Gamma(\kappa+1) (1+|\tau|)^k y^\kappa \int_{-\infty}^{\infty} (1+|u|)^k |\sin \frac{1}{2} u|^{\kappa+1} |u|^{-(\kappa+1)} du .$$

Damit ist der zweite Teil unseres Satzes bewiesen.

LITERATUR

1. F. Carlson, *Contributions à la theorie des séries de Dirichlet*, Note IV, Ark. Mat. 2. (1952), 293–298.
2. G. Doetsch, *Handbuch der Laplace-Transformation I*, Basel, 1950.
3. A. Pleijel, *Beitrag zur Theorie der Laplace-Transformationen*, Tolfte Skandinaviska Matematikerkongressen, Lund 1954, 217–221.
4. D. V. Widder, *The Laplace transform*, Princeton, 1946.