MATH. SCAND. 4 (1956), 161–173

ÜBER DIE EIGENWERTE DER SCHWINGUNGSGLEICHUNG

VOJISLAV G. AVAKUMOVIĆ

1. Einleitung.

1.1 Sei D ein beschränktes Gebiet der xy-Ebene und D' der Rand von D; D' sei stückweise glatt. Dann existiert die am Rande D' verschwindende Greensche Funktion von $(\Delta+\lambda)U=0$. Sie sei mit $G(P, Q;\lambda)$ bezeichnet. Dabei sind P und Q, und ebenso nachher Π, Punkte aus D.

Es bezeichnen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ die Eigenwerte und $\Phi_1(P), \Phi_2(P), \ldots$ die orthonormierten Eigenfunktionen der Randwertaufgabe

$$(\Delta+\lambda)U = 0 \quad \text{innerhalb } D, \qquad U = 0 \quad \text{längs } D' .$$

Dabei ist $0<\lambda_n \leqq \lambda_{n+1} \to \infty$.

Ferner seien folgende Bezeichnungen festgesetzt: r_{PQ} bedeutet die Entfernung zwischen P und Q und l_P die Minimalentfernung zwischen P und D'; $m_1, m_2, \ldots$ sind von l_P und D unabhängige Zahlen, während $C_1, C_2, \ldots$ von D und l_P abhängige Zahlen sind. $J_\nu(x)$ sind die Besselschen Funktionen erster Art.

1.2. $K_0(x)$ bezeichne die modifizierte Besselsche Funktion

$$K_0(x) = \int_1^\infty e^{-xt}(t^2-1)^{\frac{1}{2}}\, dt .$$

Die Funktion $K_0\big(r_{PQ}(-\lambda)^{\frac{1}{2}}\big)$, $0<\arg\lambda<2\pi$, ist in bezug auf jede der Veränderlichen P und Q eine Lösung von $(\Delta+\lambda)U=0$, wenn nur $P \neq Q$. Im Punkte $x=0$ wird $K_0(x)$ genau wie $\lg 1/x$ unendlich.

T. Carleman [3] hat bewiesen, dass für reelle negative λ die Ungleichung

$$\left|G(P, Q;\lambda)-(2\pi)^{-1}K_0\big(r_{PQ}(-\lambda)^{\frac{1}{2}}\big)\right| \leqq m\, l_P^{-\frac{1}{2}}(-\lambda)^{-\frac{1}{4}}\exp\big(-l_P(-\lambda)^{\frac{1}{2}}\big)$$

gilt.

Sei

$$\vartheta(P, Q; t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \Phi_\nu(P)\,\Phi_\nu(Q)\,e^{-\lambda_\nu t}$$

Eingegangen am 12. September, 1955.

die am Rande D' verschwindende Greensche Funktion der Wärmeleitungsgleichung $(\Delta - \partial/\partial t)\,U = 0$. Die Funktion

$$(4\pi t)^{-1} \exp(-r_{PQ}{}^2/4t)$$

ist in bezug auf jede der Veränderlichen P und Q eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung, wenn nur $P \neq Q$ und $t > 0$ ist.

Unabhängig von den Carlemanschen Untersuchungen hat S. Minakshisundaram [6] bewiesen, dass bei festen P und $0 < t \leqq l_P{}^2/4$ die Ungleichung

$$|\vartheta(P, Q; t) - (4\pi t)^{-1} \exp(-r_{PQ}{}^2/4t)| \leqq (4\pi t)^{-1} \exp(-l_P{}^2/4t)$$

für jedes Q gilt.

Zwischen $G(P, Q; \lambda)$ und $\vartheta(P, Q; t)$ besteht die Beziehung

$$\vartheta(P, Q; t) = (2\pi i)^{-1} \int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} e^{\lambda t} G(P, Q; -\lambda)\, d\lambda, \qquad P \neq Q,\ \varkappa > 0,$$

und es ist ersichtlich, dass die eben erwähnten Sätze in engster Beziehung stehen.

In der vorliegenden Arbeit beweise ich zunächst folgenden

Satz A. *Sei $\theta = \arg\lambda$ und P ein Punkt in D. Dann gilt*

$$\left|G(P,Q;\lambda) - (2\pi)^{-1} K_0\!\left(r_{PQ}(-\lambda)^{\frac12}\right)\right| \leqq m_9 l_P{}^{-\frac32} (\sin\tfrac12\theta)^{-\frac12} |\lambda|^{-\frac14} \exp\!\left(-\tfrac12 l_P \operatorname{Re}(-\lambda)^{\frac12}\right)$$

für jedes θ mit $0 < \theta < 2\pi$ und jedes Q.

Der Rest dieser Arbeit betrifft verschiedene Anwendungen des Satzes A.

1.3. Die Greensche Funktion $G(P, Q; \lambda)$ genügt der Beziehung

$$G(P, Q; \lambda) - G(P, Q; 0) = \lambda \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\Phi_\nu(P)\,\Phi_\nu(Q)}{\lambda_\nu(\lambda_\nu - \lambda)}.$$

Infolgedessen bestehen für jede innerhalb $|\lambda| < x$ reguläre und am Rande $|\lambda| = x$ stetige Funktion $w_x(\lambda)$ sowie jede über D absolut integrierbare Funktion $f(\Pi)$ die Beziehungen

$$(1.1)\qquad \sum_{\lambda_\nu \leqq x} w_x(\lambda_\nu) a_\nu \Phi_\nu(P)$$
$$= -\int_D f(\Pi)\, dF_\Pi\, (2\pi i)^{-1} \oint_{|\lambda| = x} w_x(\lambda) \{G(P, \Pi; \lambda) - G(P, \Pi; 0)\}\, d\lambda,$$

wenn nur $x \neq \lambda_n$, $n = 1, 2, \ldots,$ ist. Dabei sind $a_\nu = \int_D f(\Pi)\,\Phi_\nu(\Pi)\,dF_\Pi$ die Fourierschen Koeffizienten von $f(\Pi)$ in bezug auf $\Phi_\nu(\Pi)$, $\nu = 1, 2, \ldots$.

Auf Grund des Satzes A kann man durch Wahl spezieller $w_x(\lambda)$ die rechte Seite (1.1) für grosse Werte von x abschätzen. (Die Idee, (1.1) zur Behandlung von Entwicklungs- bzw. Summierungsproblemen zu benutzen, ist natürlich nicht neu. Man vergleiche diesbezüglich die Arbeiten von C. Titchmarsh [9].)

1.4. Definition 1. *Die Reihe* $\Sigma \alpha_\nu$ *wird in bezug auf* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ *nach dem* $G_\vartheta^\varkappa$*-Verfahren summierbar zur Summe* A *genannt, wenn*

$$\sum_{\lambda_\nu \leqq x} \left\{1-\exp\left((\lambda_\nu - x)x^{-\vartheta}\right)\right\}^\varkappa \alpha_\nu \to A \quad \text{für} \quad x \to \infty .$$

Ähnlich den Valironschen Verfahren hat auch das $G_\vartheta^\varkappa$-Verfahren die Eigenschaft, bezüglich $0<\vartheta<1$ eine stetige Folge wesentlich verschiedener Verfahren in dem Sinne zu bilden, dass jedem ϑ eine Konvergenzbedingung von der Form $\alpha_\nu = o(\lambda_\nu^{-\vartheta})$ entspricht.

Definition 2. *Eine Funktion* $\alpha(t)$, *die auf jeder endlichen Strecke von beschränkter Schwankung ist, wird nach dem* $G_\vartheta^\varkappa$*-Verfahren summierbar zur Summe* A *genannt, wenn*

$$\int_0^x \left\{1-\exp\left((\lambda_\nu - x)x^{-\vartheta}\right)\right\}^\varkappa d\alpha(t) \to A \quad \textit{für} \quad x \to \infty .$$

1.5. Sei $f(\Pi)$ absolut integrierbar über D und $=0$ längs D'. Nach S. Minakshisundaram [7] ist dann in jedem Stetigkeitspunkt von $f(\Pi)$ die Fouriersche Reihe

$$f(P) \backsim \sum a_\nu \Phi_\nu(P)$$

$(R, \lambda, \varkappa)$-summierbar, wenn nur $\varkappa > \frac{3}{2}$ ist.

Wenn $f(\Pi)$ eine samt ihrem Quadrat über D integrierbare Funktion ist, so gilt nach B. M. Levitan [5] dasselbe sogar für $\varkappa \geqq \frac{1}{2}$, während für $0 \leqq \varkappa < \frac{1}{2}$ die $(R, \lambda, \varkappa)$-Summierbarkeit bekanntlich keine lokale Eigenschaft von $f(\Pi)$ ist. Die vorliegende Arbeit behandelt nun die Frage, für welche Werte von ϑ (und $\varkappa$) die $G_\vartheta^\varkappa$-Summierbarkeit nur von lokalen Eigenschaften der Funktion $f(\Pi)$ abhängt.

Um die Sätze über das $G_\vartheta^\varkappa$-Verfahren einfach aussprechen zu können, seien folgende Abkürzungen eingeführt: r und φ bezeichnen die Polarkoordinaten des Punktes Π, und P sei der Anfangspunkt des Koordinatensystems, so dass $f(\Pi)=f(r,\varphi)$ und $f(P)=f(0,0)$ ist. Ferner sei

$$g(r) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \{f(r,\varphi)-f(0,0)\}\, d\varphi .$$

Dann gelten folgende Sätze:

Satz B. Voraussetzungen: I) *Sei* $f(\Pi)$ *über* D *absolut integrierbar.*
II) *Sei* $\frac{1}{2} < \vartheta < 1$ *und*

$$\varkappa > \tfrac{3}{4}(\vartheta - \tfrac{1}{2})^{-1} . \tag{1.2}$$

Behauptung: *Damit* $\Sigma \alpha_\nu \Phi_\nu(P)$ *zur Summe* $f(P)$ *nach dem* $G_\vartheta^\varkappa$*-Verfahren summierbar ist, ist notwendig und hinreichend, dass*

$$\alpha(t) = t^{\frac{1}{2}} \int_0^\varrho g(r) J_1(rt^{\frac{1}{2}})\, dr$$

für ein $0 < \varrho \leqq l_P$ *nach dem* $G_\vartheta^\varkappa$*-Verfahren zur Summe* 0 *summierbar ist.*

Da $G_\vartheta^\varkappa$ ein reguläres Verfahren ist, so ist auf Grund des Satzes B die Reihe $\Sigma a_\nu \Phi_\nu(P)$ nach dem $G_\vartheta^\varkappa$-Verfahren sicher dann zur Summe $f(P)$ summierbar (und zwar für jedes ϑ mit $\frac{1}{2} < \vartheta < 1$ und $\varkappa > \frac{3}{4}(\vartheta - \frac{1}{2})^{-1}$), wenn $\alpha(t) \to 0$ für $t \to \infty$. Dazu ist hinreichend dass $r^{-a}g(r)$ für ein $0 < a \leqq \frac{1}{2}$ von beschränkter Schwankung ist; denn es gilt bekanntlich der Satz: Wenn $r^{-a}g(r)$ $(0 < a \leqq \frac{1}{2})$ von beschränkter Schwankung ist, so gilt

$$\int_0^\varrho g(r)\, J_1(r\lambda)\, dr = O(\lambda^{-1-a}) \quad \text{für} \quad \lambda \to \infty$$

([11], S. 595, wo dieser Satz für $a = \frac{1}{2}$ bewiesen ist). Andererseits lässt sich zeigen, dass die Voraussetzung »$r^{-a}g(r)$ $(0 < a \leqq \frac{1}{2})$ ist über $< 0, \varrho >$ absolut integrierbar« nicht genügt, um auf $\alpha(t) \to 0$ für $t \to \infty$ schliessen zu können. Es gilt aber der

Satz B 1. Voraussetzungen: I) *Es seien die Voraussetzungen des Satzes* B *erfüllt.*
II) *Sei*

$$a = a(\vartheta, \varkappa) = 2(1 - \vartheta)\varkappa \tag{1.3}$$

und

$$g(r) = o(r^a) \quad \textit{für} \quad r \to 0 . \tag{1.4}$$

Behauptung: $\Sigma a_\nu \Phi_\nu(P)$ *ist nach dem* $G_\vartheta^\varkappa$*-Verfahren zur Summe* $f(P)$ *summierbar.*

Wenn $a \geqq 1$ und $\frac{1}{2} < \vartheta \leqq \frac{4}{5}$ bzw. $\frac{1}{2} < a < 1$ und $\frac{4}{5} < \vartheta \leqq \frac{7}{8}$ bzw. $0 < a \leqq \frac{1}{2}$ und $\frac{7}{8} < \vartheta < 1$, so gibt es wie leicht einzusehen ein $\varkappa > \frac{3}{4}(\vartheta - \frac{1}{2})^{-1}$, so dass $a = 2(1 - \vartheta)\varkappa$ ist.

Diese Sätze sind Analoga der Sätze von G. H. Hardy und J. E. Littlewood [4] über B-Summierbarkeit gewöhnlicher Fourierscher Reihen.

2. Beweis des Satzes A.

a) Ich beweise zunächst nach H. Weyl ([6], Supplementary note), dass

$$\sum \Phi_\nu^2(P)\, e^{-\lambda_\nu t} \leqq (4\pi t)^{-1} \qquad \text{für jedes } t > 0$$

ist. Es sei Q fest, und es werde

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \Phi_\nu(P)\, \Phi_\nu(Q)\, e^{-\lambda_\nu t} = (4\pi t)^{-1} \exp\left(-r_{PQ}^2/4t\right) - U(P, t)$$

gesetzt, so dass $(\Delta - \partial/\partial t)_P U = 0$ ist. Ich habe zu beweisen, dass $U(P,t) \geqq 0$ für jedes $P \in D$ gilt.

Sei $m(t) = \min_{P \in D} U(P, t)$, und es gebe entgegen der Behauptung ein $t_1 > 0$, derart dass $m(t_1) = U(P_1, t_1) < 0$ ist. Wegen $U(P, t) > 0$ für $P \in D'$ und $t > 0$ ist P_1 ein innerer Punkt von D, und wegen $\lim_{t\to\infty} U(P_1, t) = 0$ ist $t_1 < \infty$. Folglich ist $\Delta_P U \geqq 0$ für $P = P_1$, $t = t_1$ und infolgedessen auch $\partial U/\partial t \geqq 0$ für dieselben P und t. Somit gibt es ein $t_1' < t_1$, derart dass $U(P_1, t)$ nicht zunimmt, wenn t von t_1 bis t_1' abnimmt. Wegen $U(P_1, t_1) = m(t_1)$ ist also $U(P_1, t) \leqq m(t_1)$ für $t_1' \leqq t \leqq t_1$. Sei t' das kleinste t_1' von der eben beschriebenen Art. Dann ist $t' = 0$; denn sonst könnte man den ganzen Beweisgang wiederholen. Nun widerspricht $m(0) < 0$ aber $U(P, t) \to 0$ für $t \to 0$.

b) Auf Grund der eben bewiesenen Ungleichung ist für jedes $x > 0$

$$E(Q; x) = \sum_{\lambda_\nu \leqq x} \Phi_\nu^2(Q) \leqq e^{xt} \sum_{\nu=1}^{\infty} \Phi_\nu^2(Q)\, e^{-\lambda_\nu t} \leqq (4\pi t)^{-1} e^{xt}.$$

Wird hier $xt = 1$ gesetzt, so erhält man

$$E(Q; x) \leqq (4\pi)^{-1} e x = m_1 x \qquad \text{für jedes } x > 0. \tag{2.1}$$

c) Bekanntlich ist

$$\int_D |G(\Pi, Q; \lambda)|^2\, dF_\Pi = \frac{G(Q, Q; \lambda) - G(Q, Q; \bar{\lambda})}{\lambda - \bar{\lambda}} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\Phi_\nu^2(Q)}{|\lambda_\nu - \lambda|^2}.$$

Wegen der für jedes θ, $0 < \theta < 2\pi$, gültigen Ungleichung

$$|\lambda_\nu - \lambda| \geqq (\lambda_\nu + |\lambda|) \sin \tfrac{1}{2}\theta$$

und (2.1) ist also

$$\begin{aligned}\int\limits_D |G(\Pi, Q; \lambda)|^2 \, dF_\Pi &\leqq \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{2}\theta} \int\limits_0^\infty \frac{dE(Q; x)}{(x+|\lambda|)^2} = \frac{2}{\sin^2 \frac{1}{2}\theta} \int\limits_0^\infty \frac{E(Q; x)}{(x+|\lambda|)^3} \, dx \\ &\leqq \frac{2m_1}{\sin^2 \frac{1}{2}\theta} \int\limits_0^\infty \frac{x \, dx}{(x+|\lambda|)^3} = \frac{m_2}{|\lambda| \sin^2 \frac{1}{2}\theta} .\end{aligned} \tag{2.2}$$

d) Abkürzend werde $r_{P\Pi} = r$ und $l_P = l$ gesetzt. Offenbar gibt es eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $\xi(r)$, derart dass

$$\xi(r) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 \leqq r \leqq \frac{1}{2}l \\ 0 & \text{für} \quad r \geqq l \end{cases}$$

und ausserdem stets

$$|\xi(r)| \leqq 1, \quad |\xi'(r)| \leqq m_3 r^{-1}, \quad |\xi''(r)| \leqq m_3 r^{-2} \tag{2.3}$$

ist. Sei

$$2\pi\Gamma(P, \Pi; \lambda) = (\Delta+\lambda)_\Pi \xi(r) K_0\big(r(-\lambda)\big)^{\frac{1}{2}} ,$$

also

$$2\pi\Gamma(P, \Pi; \lambda) = \left\{ \xi''(r) + \frac{1}{r} \xi'(r) \right\} K_0\big(r(-\lambda)^{\frac{1}{2}}\big) - 2\xi'(r)(-\lambda)^{\frac{1}{2}} K_1\big(r(-\lambda)^{\frac{1}{2}}\big) ,$$

wobei wie üblich $K_1(x) = -K_0'(x)$ gesetzt ist.

Bekanntlich ist [11, S. 202–203] für $|\arg x| < \frac{1}{2}\pi$

$$|K_i(x)| \leqq m_4 |x|^{-\frac{1}{2}} \exp(-\operatorname{Re} x) .$$

Infolgedessen ergibt sich, wenn noch (2.3) berücksichtigt wird,

$$\begin{aligned}|\Gamma(P, \Pi; \lambda)| &\leqq \left(\frac{1}{r^2} + \frac{|\lambda|^{\frac{1}{2}}}{r} \right) \frac{m_5}{r^{\frac{1}{2}} |\lambda|^{\frac{1}{4}}} \exp\big(-r \operatorname{Re}(-\lambda)^{\frac{1}{2}}\big) \\ &\leqq \frac{m_6 |\lambda|^{\frac{1}{4}}}{l^2 r^{\frac{1}{2}}} \exp\big(-r \operatorname{Re}(-\lambda)^{\frac{1}{2}}\big) \qquad \text{für } \tfrac{1}{2}l \leqq r \leqq l .\end{aligned} \tag{2.4}$$

Ferner ist

$$\Gamma(P, \Pi; \lambda) = 0 \qquad \text{für } 0 \leqq r \leqq \tfrac{1}{2}l \quad \text{und} \quad r \geqq l , \tag{2.5}$$

da stets $(\Delta+\lambda)_\Pi K_0\big(r(-\lambda)^{\frac{1}{2}}\big) = 0$.

Es bezeichne $\varkappa_l$ den Kreisring um P mit den Radien $\frac{1}{2}l$ und l. Dann ist auf Grund von (2.4) und (2.5)

$$\begin{aligned}\int_D |\Gamma(P,\Pi;\lambda)|^2\,dF_\Pi &= \int_{\varkappa_l} |\Gamma(P,\Pi;\lambda)|^2\,dF_\Pi \\ &\leqq \frac{m_7|\lambda|^{\frac{1}{2}}}{l^4}\int_{\frac{1}{2}l}^{l}\exp\left(-2r\operatorname{Re}(-\lambda)^{\frac{1}{2}}\right)dr \\ &\leqq \frac{m_7|\lambda|^{\frac{1}{2}}}{l^3}\exp\left(-l\operatorname{Re}(-\lambda)^{\frac{1}{2}}\right).\end{aligned}\tag{2.6}$$

e) Es werde

$$G(P,\Pi;\lambda) = (2\pi)^{-1}\xi(r)K_0\left(r(-\lambda)^{\frac{1}{2}}\right)-\gamma^*(P,\Pi;\lambda)$$

gesetzt. Dann ist, da $G(P,\Pi;\lambda)$ der Gleichung $(\Delta+\lambda)_\Pi U=0$ genügt,

$$(\Delta+\lambda)_\Pi\gamma^*(P,\Pi;\lambda) = (2\pi)^{-1}(\Delta+\lambda)_\Pi\xi(r)K_0\left(r(-\lambda)^{\frac{1}{2}}\right) = \Gamma(P,\Pi;\lambda)$$

und somit

$$\gamma^*(P,Q;\lambda) = -\int_D G(\Pi,Q;\lambda)\Gamma(P,\Pi;\lambda)\,dF_\Pi\,.$$

Wegen (2.2) und (2.6) ist also

$$\begin{aligned}|\gamma^*(P,Q;\lambda)| &\leqq \left(\int_D |G(\Pi,Q;\lambda)|^2\,dF_\Pi\int_D|\Gamma(P,\Pi;\lambda)|^2\,dF_\Pi\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqq \frac{m_8}{l^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}l\operatorname{Re}(-\lambda)^{\frac{1}{2}}\right)}{|\lambda|^{\frac{1}{4}}\sin\frac{1}{2}\theta}.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Nun ist, falls

$$G(P,Q;\lambda) = (2\pi)^{-1}K_0\left(r_{PQ}(-\lambda)^{\frac{1}{2}}\right)-\gamma(P,Q;\lambda)$$

gesetzt wird,

$$\gamma(P,Q;\lambda) = (2\pi)^{-1}\left(1-\xi(r_{PQ})\right)K_0\left(r_{PQ}(-\lambda)^{\frac{1}{2}}\right)+\gamma^*(P,Q;\lambda)$$

und somit wegen (2.7)

$$|\gamma(P,Q;\lambda)| \leqq \frac{m_9}{l^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}l\operatorname{Re}(-\lambda)^{\frac{1}{2}}\right)}{|\lambda|^{\frac{1}{4}}\sin\frac{1}{2}\theta}\,.\tag{2.8}$$

3. Beweis der Sätze B und B1.

3.1. Ich beweise zunächst folgende Hilfssätze:

HILFSSATZ 1. *Sei* $\vartheta>0$, $\varkappa>0$ *und*

$$h(r;x) = (2\pi i)^{-1}\oint_{|\lambda|=x}\left\{1-\exp\left((\lambda-x)x^{-\vartheta}\right)\right\}^{\varkappa}K_0\left(r(-\lambda)^{\frac{1}{2}}\right)(2\pi)^{-1}\,d\lambda\,.\tag{3.1}$$

Dann ist

$$(3.2)\qquad h(r;x) = -(2\pi r)^{-1}\int_0^x \{1-\exp((t-x)x^{-\vartheta})\}^{\varkappa}\, d\{t^{\frac12}J_1(rt^{\frac12})\}\,.$$

HILFSSATZ 2. *$h(r;x)$ habe dieselbe Bedeutung wie in Hilfssatz* 1. *Dann ist*

$$(3.3)\qquad |h(r;x)| \leqq m_{10}\, r^{-\varkappa-\frac32}\, x^{\frac14+(\frac12-\vartheta)\varkappa}.$$

Ferner gilt: wenn K_ϱ den Kreis um P vom Radius ϱ bedeutet, so ist

$$(3.4)\qquad \int_{K_\varrho} h(r_{P\Pi};x)\, dF_\Pi = -1+o(\varrho^{-\frac32}x^{-\frac14}) \quad \textit{für} \quad x\to\infty\,.$$

HILFSSATZ 3. (Anwendung des Satzes A). *Sei $\vartheta>0$, $\varkappa>0$,*

$$\gamma(P,\Pi;\lambda) = (2\pi)^{-1}K_0(r_{P\Pi}(-\lambda)^{\frac12}) - G(P,\Pi;\lambda)$$

und

$$h^*(P,\Pi;\lambda) = (2\pi i)^{-1}\oint_{|\lambda|=x} \{1-\exp((\lambda-x)x^{-\vartheta})\}^{\varkappa}\gamma(P,\Pi;\lambda)\, d\lambda\,,$$

wo P ein fester Punkt ist.

Dann ist

$$(3.5)\qquad |h^*(P,\Pi;\lambda)| \leqq C_1\, x^{\frac34+(\frac12-\vartheta)\varkappa}\,.$$

BEWEIS DES HILFSSATZES 1. Mit Hilfe der Formel

$$K_0(r(-\lambda)^{\frac12}) = -J_0(r\lambda^{\frac12})\log(-\lambda)+K(\lambda)\,,$$

wo $K(\lambda)$ eine ganze Funktion ist, erhält man durch Konturintegration in der längs der positiven reellen Achse aufgeschnittenen λ-Ebene

$$h(r;x) = -(4\pi)^{-1}\int_0^x \{1-\exp((t-x)x^{-\vartheta})\}^{\varkappa} J_0(rt^{\frac12})\, dt\,.$$

Wegen $xJ_0(x)=\dfrac{d}{dx}\{xJ_1(x)\}$ folgt daraus die Behauptung (3.2).

BEWEIS DES HILFSSATZES 2. a) Es ist leicht zu sehen, dass

$$(3.6)\qquad \left|1-\exp(x^{1-\vartheta}(e^{i\theta}-1))\right| \leqq 6x^{1-\vartheta}\sin\tfrac12\theta\,.$$

Nun ist wegen (3.1)

$$h(r;x) = x(4\pi^2 i)^{-1} \int_0^{2\pi} \{1-\exp\big(x^{1-\vartheta}(e^{i\theta}-1)\big)\}^\varkappa K_0\big(r(-xe^{i\theta})^{\frac{1}{2}}\big)\, e^{i\theta}\, d\theta$$

und wie bekannt ([11], S. 202–203)

$$\big|K_0\big(r(-\lambda)^{\frac{1}{2}}\big)\big| \leqq m_4 r^{-\frac{1}{2}}|\lambda|^{-\frac{1}{4}} \exp\big(-r\,\mathrm{Re}(-\lambda)^{\frac{1}{2}}\big)$$

für $0 \leqq \arg\lambda \leqq 2\pi$. Also ist

$$\begin{aligned}
|h(r;x)| &\leqq m_{11} r^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{4}+(1-\vartheta)\varkappa} \int_0^{2\pi} \sin^\varkappa \tfrac{1}{2}\theta \exp(-rx^{\frac{1}{2}} \sin\tfrac{1}{2}\theta)\, d\theta \\
&\leqq 4 m_{11} r^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{4}+(1-\vartheta)\varkappa} \int_0^1 u^\varkappa \exp(-rx^{\frac{1}{2}}u)(1-u^2)^{-\frac{1}{2}}\, du \\
&\leqq m_{12} r^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{4}+(1-\vartheta)\varkappa} \left(\int_0^{2^{-\frac{1}{2}}} + \int_{2^{-\frac{1}{2}}}^1 \right) \\
&\leqq m_{12}\, 2^{\frac{1}{2}} r^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{4}+(1-\vartheta)\varkappa} \int_0^\infty u^\varkappa \exp(-rx^{\frac{1}{2}}u)\, du \\
&\quad + m_{12}\, 2^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{4}+(1-\vartheta)\varkappa} \exp(-r2^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}) \int_{2^{-\frac{1}{2}}}^1 u^\varkappa (1-u^2)^{-\frac{1}{2}}\, du\,,
\end{aligned}$$

woraus sich die Behauptung nach kurzer Rechnung ergibt.

b) Wird $\int_{K_\varrho} h(r_{P\Pi};x)\, dF_\Pi$ auf Polarkoordinaten umgerechnet, so erhält man wegen (3.2)

$$\begin{aligned}
&\int_{K_\varrho} h(r_{P\Pi};x)\, dF_\Pi \\
&\quad = -(2\pi)^{-1} \int_0^x \{1-\exp\big((t-x)x^{-\vartheta}\big)\}^\varkappa dt \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\varrho \frac{d}{dt}\{rt^{\frac{1}{2}} J_1(rt^{\frac{1}{2}})\}\, r^{-1}\, dr \\
&\quad = -\tfrac{1}{2} \int_0^x \{1-\exp\big((t-x)x^{-\vartheta}\big)\}^\varkappa t^{-1}\, dt \int_0^{\varrho t^{\frac{1}{2}}} d\{uJ_1(u)\}\,.
\end{aligned}$$

Durch gliedweise Integration erhält man daraus

$$\begin{aligned}
&\int_{K_\varrho} h(r_{P\Pi};x)\, dF_\Pi \\
&\quad = -\varkappa x^{-\vartheta} \int_0^x \{1-\exp\big((t-x)x^{-\vartheta}\big)\}^{\varkappa-1} \exp\big((t-x)x^{-\vartheta}\big)\, dt \int_0^{\varrho t^{\frac{1}{2}}} J_1(u)\, du\,,
\end{aligned}$$

also wegen $J_1(u) = -d\{J_0(u)\}/du$ und $J_0(0)=1$

$$= -\varkappa x^{-\vartheta}\int_0^x \{1-\exp((t-x)x^{-\vartheta})\}^{\varkappa-1}\exp((t-x)x^{-\vartheta})\{1-J_0(\varrho t^{\frac{1}{2}})\}\,dt$$

$$= -\{1-\exp(-x^{1-\vartheta})\}^{\varkappa}$$

$$+\varkappa x^{-\vartheta}\int_0^x \{1-\exp((t-x)x^{-\vartheta})\}^{\varkappa-1}\exp((t-x)x^{-\vartheta})J_0(\varrho t^{\frac{1}{2}})\,dt\,.$$

Daraus folgt (3.4), da $J_0(x) = o(x^{-\frac{1}{4}})$ für $x \to \infty$.

Beweis des Hilfssatzes 3. Wird in

$$h^*(P, \Pi; x) = x(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}\{1-\exp(x^{1-\vartheta}(e^{i\theta}-1))\}^{\varkappa}\gamma(P, \Pi; xe^{i\theta})\,e^{i\theta}\,d\theta$$

$\gamma(P, \Pi; \lambda) = (2\pi)^{-1}K_0(r_{P\Pi}(-\lambda)^{\frac{1}{2}}) - G(P, \Pi; -\lambda)$ mittels der Ungleichung des Satzes A majorisiert, so ergibt sich wegen (3.6)

$$|h^*(P, \Pi; \lambda)| \leqq C_2\, x^{\frac{3}{4}+(1-\vartheta)\varkappa}\int_0^{2\pi}\sin^{\varkappa-1}\tfrac{1}{2}\theta\,\exp(-\tfrac{1}{2}l_p x^{\frac{1}{2}}\sin\tfrac{1}{2}\theta)\,d\theta$$

mit $C_2 = m_9 l_p{}^{-\frac{3}{2}}$. Wie beim Beweis unter a) (Hilfssatz 2) schliesst man, dass

$$|h^*(P, \Pi; x)| \leqq C_1 x^{\frac{3}{4}+(\frac{1}{2}-\vartheta)\varkappa}$$

ist.

3.2. Beweis des Satzes B. a) Wird in (1.1)

$$w_x(\lambda) = \{1-\exp[(\lambda-x)x^{-\vartheta}]\}^{\varkappa}$$

und

$$G(P, \Pi; \lambda) = (2\pi)^{-1}K_0(r_{P\Pi}(-\lambda)^{\frac{1}{2}}) - \gamma(P, \Pi; -\lambda)$$

gesetzt, so ist für jedes $x \neq \lambda_n$, $n = 1, 2, \ldots,$ und $0 < \varrho \leqq l_P$

$$F(x) = \sum_{\lambda_\nu \leqq x}\{1-\exp((\lambda_\nu - x)x^{-\vartheta})\}^{\varkappa}a_\nu\Phi_\nu(P)$$

$$= -f(P)\int_{K_\varrho} h(r_{P\Pi}; x)\,dF_\Pi + \int_{K_\varrho}\{f(P)-f(\Pi)\}h(r_{P\Pi}; x)\,dF_\Pi$$

$$-\int_{D-K_\varrho} f(\Pi)h(r_{P\Pi}; x)\,dF_\Pi + \int_D f(\Pi)h^*(P, \Pi; x)\,dF_\Pi$$

$$= -f(P)H_0 + H_1 + H_2 + H_3\,.$$

b) Die Beziehung (3.4) besagt, dass

$$H_0 = -1 + o(\varrho^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{4}}) \quad \text{für} \quad x \to \infty$$

ist.

Wegen (3.3) ist

$$|H_2| \leqq m_{10}\, \varrho^{-\varkappa-\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{4}+(\frac{1}{2}+\vartheta)\varkappa} \int\limits_{D-K_\varrho} |f(\Pi)|\, dF_\Pi \leqq c_3\, \varrho^{-\varkappa-\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{4}+(\frac{1}{2}-\vartheta)\varkappa}$$

und wegen (3.5)

$$|H_3| \leqq c_1 x^{\frac{3}{4}+(\frac{1}{2}-\vartheta)\varkappa} \int\limits_D |f(\Pi)|\, dV_\Pi \leqq c_4\, x^{\frac{3}{4}+(\frac{1}{2}-\vartheta)\varkappa}\,.$$

c) Aus a), b) und den Voraussetzungen $\frac{1}{2} < \vartheta < 1$ und $\varkappa > \frac{3}{4}(\vartheta - \frac{1}{2})^{-1}$ erhält man

$$F(x) = f(P) + H_1 + o(1) \quad \text{für} \quad x \to \infty\,.$$

Folglich gilt: Damit $\Sigma a_\nu \Phi_\nu(P)$ nach dem $G_\vartheta^\varkappa$-Verfahren $\big($mit $\frac{1}{2} < \vartheta < 1$ und $\varkappa > \frac{3}{4}(\vartheta - \frac{1}{2})^{-1}\big)$ zur Summe $f(P)$ summierbar ist, ist notwendig und hinreichend, dass $H_1 \to 0$ für $x \to \infty$.

d) Wird das Integral H_1 auf Polarkoordinaten umgerechnet und (3.2) berücksichtigt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} H_1 &= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\varrho} \{f(r,\varphi) - f(0,0)\}(2\pi)^{-1}\, dr \int\limits_0^x \big\{1 - \exp\big((t-x)x^{-\vartheta}\big)\big\}^\varkappa\, d\{t^{\frac{1}{2}} J_1(rt^{\frac{1}{2}})\} \\ &= \int\limits_0^x \big\{1 - \exp\big((t-x)x^{-\vartheta}\big)\big\}^\varkappa d\left[t^{\frac{1}{2}} \int\limits_0^{\varrho} J_1(rt^{\frac{1}{2}})(2\pi)^{-1}\, dr \int\limits_0^{2\pi} \{f(r,\varphi) - f(0,0)\}\, d\varphi\right] \qquad (3.7) \\ &= \int\limits_0^x \big\{1 - \exp\big((t-x)x^{-\vartheta}\big)\big\}^\varkappa\, d\alpha(t)\,, \end{aligned}$$

womit Satz B bewiesen ist.

3.3. Beweis des Satzes B 1. Werden die Bezeichnungen aus 3.2 benutzt, so ist wegen des Satzes B und der Bezeichnung (3.7) nur folgendes zu beweisen: Wenn $g(r) = o(r^a)$ für $r \to 0$ mit $a = 2(1-\vartheta)\varkappa$, so gilt $H_1 \to 0$ für $x \to \infty$.

Mittels teilweiser Integration erhält man

$$h(r;x) = -\varkappa(2\pi r)^{-1} x^{-\vartheta} \int\limits_0^x \big\{1 - \exp\big((t-x)x^{-\vartheta}\big)\big\}^\varkappa \exp\big((t-x)x^{-\vartheta}\big)\, t^{\frac{1}{2}} J_1(rt^{\frac{1}{2}})\, dt \qquad (3.8)$$

und

$$H_1 = \varkappa x^{-\vartheta} \int\limits_0^x \big\{1 - \exp\big((t-x)x^{-\vartheta}\big)\big\}^\varkappa \exp\big((t-x)x^{-\vartheta}\big)\, \alpha(t)\, dt\,.$$

Wird im letzten Integral die Integrationsfolge vertauscht, so erhält man, falls noch (3.8) beachtet wird,

$$H_1 = -2\pi \int_0^{\varrho} r g(r) h(r; x)\, dr .$$

Es werde

$$-H_1 = \int_0^{x^{-\frac{1}{2}}} + \int_{x^{-\frac{1}{2}}}^{\varrho} = I_1 + I_2$$

gesetzt. Wegen $|J_1(x)| \leqq m_{13} x$ ist $|h(r; x)| \leqq m_{14} x$. Auf Grund der Voraussetzung (1.4), d.h. $|g(r)| r^{-a} \leqq \varepsilon(\eta)$ (für $r \leqq \eta$) mit $\varepsilon(\eta) \to 0$ für $\eta \to 0$, ist also

$$|I_1| \leqq 2\pi m_{14} \varepsilon(x^{-\frac{1}{2}})\, x \int_0^{x^{-\frac{1}{2}}} r^{1+a}\, dr \leqq m_{15}(x^{-\frac{1}{2}})$$

und wegen (3.3) und der Voraussetzungen (1.3) und (1.4)

$$|I_2| \leqq 2\pi m_{10} \varepsilon(\varrho) x^{\frac{1}{4}+(\frac{1}{2}-\vartheta)\varkappa} \int_{x^{-\frac{1}{2}}}^{\varrho} r^{a+\varkappa-\frac{1}{2}}\, dr \leqq m_{16} \varepsilon(\varrho) .$$

Zusammenfassend ergibt sich

$$\limsup_{x=\infty} |H_1| \leqq m_{16} \varepsilon(\varrho) ,$$

womit Satz B 1 bewiesen ist, da ϱ beliebig klein gewählt werden kann.

LITERATURVERZEICHNIS

1. V. G. Avakumović, *Bemerkung über einen Satz des Herrn T. Carleman*, Math. Z. 53 (1950), 53–58.
2. V. G. Avakumović, *Über die Eigenfunktionen der Schwingungsgleichung*, Publ. Math. Inst. Math. Acad. Serbe Sci. 4 (1952), 95–96.
3. T. Carleman, *Propriétés asymptotiques des fonctions fondamentales des membranes vibrantes*. C. R. 8e Congr. Mathém. Scand. Stockholm 1934, 34–44.
4. G. H. Hardy & J. E. Littlewood, *Notes on the theory of series* (XVII). *Some new convergence criteria for Fourier series*, J. London Math. Soc. 7 (1932), 252–256.
5. B. M. Levitan, *Über Entwicklungen nach den Eigenfunktionen des Laplaceschen Operators*, Dokladi Akad. Nauk SSSR 90 (1953), 133–135 (Russisch).
6. S. Minakshisundaram, *A generalization of Epstein zeta functions* (With supplementary note by H. Weyl), Canadian J. Math. 1 (1949), 320–327.
7. S. Minakshisundaram, *On expansion in eigenfunctions of boundary value problems* III, J. Indian Math. Soc. 6 (1942), 153–167.
8. Å. Pleijel, *Propriétés asymptotiques des fonctions et valeurs propres de certains problèmes de vibrations*, Ark. Mat. Astr. Fys. 27 Nr. 13 (1940), 1–100.

9. E. C. Titchmarsh, *Eigenfunction expansions associated with second order differential equations*, Oxford, 1946.
10. E. C. Titchmarsh, *Eigenfunction expansions for a finite two-dimensional region*, Quart. J. Math., Oxford Ser. 20 (1949), 238–253.
11. G. N. Watson, *A treatise of the theory of Bessel functions*, Cambridge, 1944.
12. H. Weyl, *Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen*, Math. Ann. 71 (1911), 441–479.
13. H. Weyl, *Ramifications, old and new, of the eigenvalue problem*, Bull. Amer. Math. Soc. 56 (1950), 115–139.

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE SERBE DES SCIENCES,
BELGRADE, YOUGOSLAVIE