MATH. SCAND. 4 (1956), 259–270

SUR LA COMPLÉTION PAR RAPPORT À UNE INTÉGRALE DE DIRICHLET

L. HÖRMANDER et J. L. LIONS

Introduction. Soit Ω un ouvert quelconque de R^n et $\mathscr{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω, à support compact, à valeurs complexes, muni de la topologie de Schwartz [3]; soit $\mathscr{D}'(\Omega)$ le dual de $\mathscr{D}(\Omega)$, espace des distributions sur Ω. Dans l'étude du problème de Dirichlet pour Δ^m (où Δ est le Laplacien) on est conduit à compléter $\mathscr{D}(\Omega)$ pour la norme $\|u\|_m$ définie par

$$(1) \qquad \|u\|_m{}^2 = \sum_{q_j=1}^{n} \int_\Omega |\partial^m u/\partial x^{q_1} \ldots \partial x^{q_m}|^2 dx = \sum_{|q|=m} \int_\Omega |D^q u|^2 dx$$

(intégrale de Dirichlet d'ordre m).

Le problème de Dirichlet sur Ω pour Δ^m peut être résolu *si le complété* $\hat{\mathscr{D}}^m(\Omega)$ *de* $\mathscr{D}(\Omega)$ *pour* $\|u\|_m$ *peut s'identifier à un sous-espace de* $\mathscr{D}'(\Omega)$ (on écrira en abrégé, si $\hat{\mathscr{D}}^m(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$).

Si $m=1$ la situation est la suivante (cf. Deny Lions [2]):

a) si la dimension $n \geqq 3$, on a toujours $\hat{\mathscr{D}}^1(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$;

b) si $n=2$, on a $\hat{\mathscr{D}}^1(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$ si et seulement si $\complement\Omega$ n'est pas de capacité nulle.

On va dans cet article généraliser ce résultat; les applications aux problèmes de Dirichlet (non fins) et à la décomposition canonique de $BL_m(\Omega)$ (espace de Beppo Levi d'ordre m) que l'on traite comme dans Deny et Lions [2], ne sont pas données ici.

1. Lemmes préliminaires.

LEMME 1. *Une condition nécessaire et suffisante pour que*

$$\hat{\mathscr{D}}^m(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$$

est que, pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, *la forme linéaire*

Reçu le 10 avril 1956.

$$u \to \int_\Omega u\bar{\psi}\,dx \tag{2}$$

soit continue sur $\mathscr{D}(\Omega)$ pour la norme $\|u\|_m$.

Démonstration. Toute suite de Cauchy dans $\mathscr{D}(\Omega)$ pour $\|u\|_m$ doit converger dans $\mathscr{D}'(\Omega)$ d'où la nécessité. Réciproquement supposons que la forme (2) soit continue sur $\mathscr{D}(\Omega)$ pour $\|u\|_m$. On a alors une injection de $\hat{\mathscr{D}}^m(\Omega)$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$ et cette injection est biunivoque; en effet si u_k est une suite de Cauchy telle que $u_k \to 0$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$, alors $u_k \to 0$ dans $\hat{\mathscr{D}}^m(\Omega)$, puisque, pour tout $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$, on a

$$\sum_{|q|=m} \int_\Omega D^q u_k D^q \bar{\psi}\,dx = (-1)^m \sum_{|q|=m} \int_\Omega u_k D^q D^q \bar{\psi}\,dx \to 0\,.$$

Pour utiliser le Lemme 1 il nous faut décrire les formes linéaires continues pour $\|u\|_m$ sur $\mathscr{D}(R^n)$. Si $f \in \mathscr{D}(R^n)$, posons

$$\mathscr{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int f(x) \exp(-i\langle x, \xi\rangle)\,dx\,,$$

($\hat{f}$ = transformée de Fourier de f), $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in R^n$. On désigne, avec Schwartz [3, t. II], par $\mathscr{S}$ (resp. $\mathscr{S}'$) l'espace des fonctions à décroissance rapide (resp. des distributions tempérées); Schwartz a démontré que $\mathscr{F}$ se prolonge en un isomorphisme de $\mathscr{S}'$ sur lui même; si $T \in \mathscr{S}'$, on pose encore $\mathscr{F}T = \hat{T}$. Ceci rappelé, montrons le

Lemme 2. *Les formes linéaires sur $\mathscr{D}(R^n)$ continues pour $\|u\|_m$ peuvent s'écrire d'une façon et d'une seule sous la forme*

$$u \to \langle u, \bar{T}\rangle\,,$$

où $T \in \mathscr{S}'$, avec

$$\hat{T}|\xi|^{-m} \in L^2(R^n)\,.$$

Réciproquement une telle forme est continue.

Le crochet désigne la dualité entre $\mathscr{D}(R^n)$ et $\mathscr{D}'(R^n)$; $L^2(R^n)$ est l'espace des (classes de) fonctions de carré sommable sur R^n.

Démonstration. Soit A l'image de $\mathscr{D}(R^n)$ par $\mathscr{F}$; on a

$$\|u\|_m = \|\hat{u}\|_A = \left\{\int |\xi|^{2m} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Dire que L est une forme linéaire continue sur $\mathscr{D}(R^n)$ pour $\|u\|_m$ équivaut à dire que $L \circ \mathscr{F}^{-1}$ est une forme linéaire continue sur A pour $\|\hat{u}\|_A$, donc

$$L\circ\mathscr{F}^{-1}(\hat{u}) = \int |\xi|^{2m}\hat{u}(\xi)\overline{f(\xi)}\,d\xi, \qquad |\xi|^m f\in L^2(R^n)\,.$$

Si l'on pose $S=|\xi|^{2m}f$, on a $S\in\mathscr{S}'$, donc $S=\hat{T}$, $T\in\mathscr{S}'$, et $L(u)=\langle\hat{u},\overline{\hat{T}}\rangle=\langle u,\overline{T}\rangle$; comme $|\xi|^{-m}\hat{T}=|\xi|^m f\in L^2(R^n)$, et comme T est unique, le lemme est démontré.

On peut maintenant démontrer le lemme fondamental pour la suite:

Lemme 3. *Une condition nécessaire et suffisante pour que*

$$\hat{\mathscr{D}}^m(\Omega)\subset\mathscr{D}'(\Omega)$$

est que, pour tout $\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$, il existe $T\in\mathscr{S}'$, à support dans $\complement\Omega$, telle que

$$(\hat{\varphi}-\hat{T})|\xi|^{-m}\in L^2(R^n)\,. \tag{3}$$

Démonstration. On va écrire (Lemme 1) que la forme (2) est continue sur $\mathscr{D}(\Omega)$. Identifions $\mathscr{D}(\Omega)$ à un sous-espace de $\mathscr{D}(R^n)$ en prolongeant les fonctions par 0 hors de Ω; d'après le théorème de Hahn-Banach on peut prolonger la forme (2) en une forme linéaire continue sur $\mathscr{D}(R^n)$ pour $\|u\|_m$. D'après le Lemme 2 celle ci est de la forme

$$u\to\langle u,\overline{S}\rangle,\qquad S\in\mathscr{S}',\quad \hat{S}|\xi|^{-m}\in L^2(R^n)\,. \tag{4}$$

Comme cette forme prolonge (2) on a $S=\varphi$ sur Ω, donc $S=\varphi-T$, T à support dans $\complement\Omega$. On a donc (3). Réciproquement si (3) a lieu, alors (4) où $S=\varphi-T$ est continue sur $\mathscr{D}(R^n)$, donc sur $\mathscr{D}(\Omega)$, où elle coïncide avec (2). Le lemme est démontré.

2. Le cas $\Omega=R^n$.

Théorème 1. *Une condition nécessaire et suffisante pour que*

$$\hat{\mathscr{D}}^m(R^n)\subset\mathscr{D}'(R^n)$$

est que $n\geqq 2m+1$.

Démonstration. Grâce aux Lemmes 1 et 2 une condition nécessaire et suffisante est que, pour tout $\varphi\in\mathscr{D}(R^n)$, on ait $\hat{\varphi}|\xi|^{-m}\in L^2(R^n)$; il en est toujours ainsi à l'infini; comme il existe φ avec $\hat{\varphi}(0)=1$, une condition nécessaire et suffisante est donc que $|\xi|^{-m}$ soit L^2 au voisinage de l'origine, soit $n\geqq 2m+1$, ce qui démontre le théorème.

Corollaire 1. *Une condition nécessaire et suffisante pour que*

$$\hat{\mathscr{D}}^m(\Omega)\subset\mathscr{D}'(\Omega)\qquad\textit{pour tout}\quad\Omega$$

est que $n\geqq 2m+1$.

Il est en effet évident que si $\hat{\mathscr{D}}^m(\Omega)\subset\mathscr{D}'(\Omega)$ et si $\Omega'\subset\Omega$, alors $\hat{\mathscr{D}}^m(\Omega')\subset\mathscr{D}'(\Omega')$.

Remarque. Dans Deny et Lions [2], le Théorème 1, pour $m=1$, était démontré sans utilisation de la transformation de Fourier, par un contre exemple si $n=2$, et si $n\geqq 3$ par un théorème de Sobolev [4]; on peut ici encore utiliser le théorème de Sobolev pour montrer que la condition est suffisante; on obtient ainsi des indications sur la croissance globale des éléments de $\hat{\mathscr{D}}^m(\Omega)$. Ceci sera fait au N° 6.

On va maintenant étudier le problème pour $n\leqq 2m$.

3. Le cas « n impair, $<2m$ ».

Théorème 2. *Si $n=2m-2k-1$, $k\geqq 0$ entier, une condition nécessaire et suffisante pour que*

$$\hat{\mathscr{D}}^m(\Omega)\subset\mathscr{D}'(\Omega)$$

est que $\complement\Omega$ ne soit pas vide.

Démonstration. La condition est nécessaire: si $\complement\Omega$ est vide alors $\Omega=R^n$ et $\hat{\mathscr{D}}^m(R^n)$ n'est pas un sous-espace de l'espace des distributions (Théorème 1).

La condition est suffisante: on peut supposer que $0\notin\Omega$; soit $\psi\in\mathscr{D}(\Omega)$ et soit $\hat{T}$ la somme des termes de degré $\leqq k$ dans le développement de Taylor de $\hat{\psi}$ à l'origine. Alors $\hat{T}$ est transformée de Fourier de T à support $\{0\}$, donc à support dans $\complement\Omega$. On a $\hat{\psi}-\hat{T}=O(|\xi|^{k+1})$ au voisinage de l'origine, et $\hat{\psi}-\hat{T}$ est $O(|\xi|^k)$ lorsque $|\xi|\to\infty$; comme $n=2m-2k-1$, $k\geqq 0$, il en résulte que (3) a lieu, d'où le théorème grâce au Lemme 3.

Il nous reste à examiner les cas $n\leqq 2m$, *n pair*, ce qui nécessite des notions supplémentaires, introduites au N° 4.

4. Ensembles p-polaires.

Soit p un entier >0 et soit

$$|||u|||_p=\left\{\sum_{|q|\leqq p}\int|D^q u|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}},\quad u\in\mathscr{D}(R^n). \tag{5}$$

On a

$$|||u|||_p{}^2=\int|\hat{u}(\xi)|^2(1+\xi^2)^p\,d\xi, \tag{5)'$$

avec $\xi^2=\xi_1{}^2+\ldots+\xi_n{}^2$. Mais cette dernière formule (5)′ a un sens *pour tout p réel*, de signe quelconque, entier ou non.

Définition 1. *On désigne par $\mathscr{D}^p$ l'espace de Hilbert complété de $\mathscr{D}(R^n)$ pour $|||u|||_p$ défini par* (5)′.

On a aussitôt:

LEMME 4. *Une condition nécessaire et suffisante pour que* $T \in \mathscr{D}^p$ *est que* $T \in \mathscr{S}'$ *et que l'on ait*

$$(1+\xi^2)^{p/2}\hat{T} \in L^2(R^n) .$$

Ou encore: l'application $T \to (1+\xi^2)^{p/2}\hat{T}$ est un isomorphisme isométrique de $\mathscr{D}^p$ sur $L^2(R^n)$. Comme conséquence:

LEMME 5. *Le dual de* $\mathscr{D}^p$ *est* $\mathscr{D}^{-p}$.

Si $p>0$ on écrira $\mathscr{D}'^p$ au lieu de $\mathscr{D}^{-p}$.

DÉFINITION 2. *Un ensemble fermé* E *de* R^n *est dit « p-polaire »* ($p>0$) *si l'espace des distributions de* $\mathscr{D}'^p$ *à support dans* E *est réduit à* $\{0\}$.

Si $p=1$, on voit à l'aide de Deny [1] que les ensembles 1-polaires coïncident avec les ensembles usuels de capacité nulle (dont on a ainsi une définition indépendante de la dimension).

Notons qu'un ensemble p-polaire est q-polaire si $q<p$. Par ailleurs du Lemme 4 résulte que si $p>n/2$, les masses de Dirac sont dans $\mathscr{D}'^p$, donc tout ensemble p-polaire est vide si $p>n/2$.

LEMME 6. *Soit* p *un nombre réel quelconque. Pour tout* $T \in \mathscr{D}^p$ *et pour tout* $\varphi \in \mathscr{D}(R^n)$ *(et même* $\varphi \in \mathscr{S}$*),* φT *est dans* $\mathscr{D}^p$ *et l'application* $T \to \varphi T$ *est continue.*

DÉMONSTRATION. Si p est entier positif, le résultat est immédiat. Donnons une démonstration valable pour tout p; par transposition et avec le Lemme 5, on peut toujours supposer $p>0$. Montrons que l'application $u \to \varphi u$ est continue de $\mathscr{D}(R^n)$ pour $|||u|||_p$ dans $\mathscr{D}^p$. Posons $\Phi=(2\pi)^{-n/2}\hat{\varphi}$ et $U=\hat{u}$. On a

$$|||\varphi u|||_p = \left(\int |\Phi \star U|^2 (1+\xi^2)^p \, d\xi\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Mais

$$|\Phi \star U(\xi)|^2 \leqq c \int |U(\xi-\eta)|^2 |\Phi(\eta)| \, d\eta \,, \qquad c = \int |\Phi(\eta)| \, d\eta \,,$$

donc

$$|||\varphi u|||_p{}^2 \leqq c \iint |U(\xi-\eta)|^2 |\Phi(\eta)| \, (1+\xi^2)^p \, d\xi \, d\eta \,. \tag{6}$$

Mais de $|\xi| \leqq |\xi-\eta|+|\eta|$ on déduit $|\xi|^2 \leqq 2(|\xi-\eta|^2+|\eta|^2)$, donc

$$1+\xi^2 \leqq 2(1+|\xi-\eta|^2)(1+\eta^2) .$$

Donc

$$\int |U(\xi-\eta)|^2(1+\xi^2)^p d\xi \leqq 2^p(1+\eta^2)^p \int |U(\xi-\eta)|^2\big(1+(\xi-\eta)^2\big)^p d\xi$$
$$= 2^p(1+\eta^2)^p \, |||u|||_p{}^2.$$

Portant dans (6) et comme Φ est à décroissance rapide on obtient

$$|||\varphi u|||_p \leqq c_1 |||u|||_p, \qquad c_1 = \text{constante}\,.$$

Corollaire 2. *Si E est un ensemble fermé non p-polaire, alors il existe $T \in \mathscr{D}'^p$, à support compact dans E, avec $\langle T, 1\rangle = 1$.*

En effet il existe par hypothèse $S \in \mathscr{D}'^p$, non nulle, à support dans E; soit $\varphi \in \mathscr{D}(R^n)$ avec $\langle S, \varphi\rangle = 1$; alors $T = \varphi S$ est dans $\mathscr{D}'^p$ (Lemme 6) et vérifie les conditions du corollaire.

Corollaire 3. *Toute réunion finie d'ensembles p-polaires est p-polaire.*

Montrons maintenant le résultat essentiel:

Théorème 3. *Soit E un ensemble fermé de R^n, contenu dans un sous-espace $R^{n-\nu}$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes:*
(i) *E n'est pas p-polaire dans R^n.*
(ii) *$p > \nu/2$, E n'est pas $(p-\nu/2)$-polaire dans $R^{n-\nu}$.*

Démonstration. Il suffit de démontrer le théorème lorsque $\nu = 1$ et $R^{n-\nu}$ est l'hyperplan $x^1 = 0$.

(ii) entraine (i): en effet supposons que E ne soit pas $(p-\frac{1}{2})$-polaire dans R^{n-1}. Il existe alors S, distribution dans l'hyperplan $x^1 = 0$, non nulle, à support dans E, telle que

$$I = \int |\hat{S}(\xi_2, \ldots, \xi_n)|^2(1+\xi_2{}^2+\ldots+\xi_n{}^2)^{-(p-\frac{1}{2})} d\xi_2 \ldots d\xi_n < \infty\,.$$

Soit δ la masse de Dirac à l'origine sur l'axe des x^1; la distribution $T = (2\pi)^{\frac{1}{2}}\delta \otimes S$ a son support dans E; $\hat{T}(\xi) = \hat{S}(\xi_2, \ldots, \xi_n)$ et

$$\int |\hat{T}(\xi)|^2(1+\xi^2)^{-p} d\xi = I \int_{-\infty}^{+\infty} (1+t^2)^{-p} dt$$

est fini car $p > \frac{1}{2}$, donc on a (i).

(i) entraîne (ii): supposons donc E non p-polaire dans R^n; alors (Corollaire 2) il existe $T \in \mathscr{D}'(R^n)$, à support compact dans E, avec $\langle T, 1\rangle = 1$ et $\hat{T}(1+\xi^2)^{-p/2} \in L^2(R^n)$.

Comme T est à support compact, on peut écrire (Schwartz [3, t. II, p. 101]):

$$T = \sum_{k=0}^{N} (-i\,\partial/\partial x^1)^k (2\pi)^{\frac{1}{2}} \delta \otimes S_k\,,$$

où les S_k sont des distributions dans l'hyperplan $x^1 = 0$, à support compact dans E. On a

$$\hat{T}(\xi) = \sum_{k=0}^{N} \xi_1{}^k \hat{S}_k(\xi_2, \ldots, \xi_n)$$

et $\hat{S}_0(0) = \hat{T}(0) \neq 0$ car $\langle T, 1 \rangle$ n'est pas nul. Le point essentiel est le

LEMME 7. $\hat{S}_0(1+\xi^2)^{-p/2} \in L^2(R^n)$.

Admettons un instant ce lemme. Il en résulte d'abord que $p > \frac{1}{2}$ puis en intégrant en ξ_1:

$$\int |\hat{S}_0(\xi_2, \ldots, \xi_n)|^2 (1+\xi_2{}^2 + \ldots + \xi_n{}^2)^{-p+\frac{1}{2}} d\xi_2 \ldots d\xi_n < \infty \; ;$$

donc E n'est pas $(p-\frac{1}{2})$-polaire dans R^{n-1}, donc (ii) est démontré. Reste seulement à démontrer le Lemme 7.

Soit $\beta_0, \ldots, \beta_N$ des nombres donnés distincts avec $0 < \beta_j < 1$. La formule d'interpolation de Lagrange montre qu'il existe des constantes $\alpha_0, \ldots, \alpha_N$ telles que pour tout polynome $P(t)$ de degré au plus N on ait

$$P(0) = \sum_{j=0}^{N} \alpha_j P(\beta_j) \, .$$

Prenons $P(t) = \hat{T}(t\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. On a donc

$$\hat{S}_0(\xi_2, \ldots, \xi_n) = \sum_{j=0}^{N} \alpha_j \hat{T}(\beta_j \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \, . \tag{7}$$

Il est élémentaire de vérifier que, $\hat{T}(1+\xi^2)^{-p/2}$ étant dans $L^2(R^n)$, il en est de même de la fonction

$$\xi \to \hat{T}(\beta_j \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)(1+\xi^2)^{-p/2} \, .$$

Le lemme résulte alors de (7). Le Théorème 3 est complètement démontré.

COROLLAIRE 4. *Soit E fermé dans R^n, contenu dans $R^{n-\nu}$; si $p \leqq \nu/2$ l'ensemble E est p-polaire.*

COROLLAIRE 5. *Soit E fermé dans R^n, $E \subset R^\nu$. Alors E est $n/2$-polaire dans R^n si et seulement si il est $\nu/2$-polaire dans R^ν.*

5. Le cas « n pair, $\leqq 2m$ ».

THÉORÈME 4. *Si $n = 2m$, une condition nécessaire et suffisante pour que*

$$\hat{\mathscr{D}}^m(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$$

est que $\complement \Omega$ ne soit pas $n/2$-polaire.

DÉMONSTRATION. La condition est nécessaire : en effet si $\hat{\mathscr{D}}^m(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$, on sait (Lemme 3) que pour tout $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$, il existe T à support dans $\complement\Omega$ avec $(\hat{\psi} - \hat{T})|\xi|^{-m} \in L^2(R^n)$. Comme $|\xi|^{-m}$ n'est pas L^2 au voisinage de l'origine, T n'est pas nulle si on prend ψ avec $\hat{\psi}(0) \neq 0$. Comme $\hat{\psi}$ est à décroissance rapide, il en résulte que $\hat{T}(1+\xi^2)^{-m/2} \in L^2(R^n)$, donc $\complement\Omega$ n'est pas m-polaire.

La condition est suffisante: puisque $\complement\Omega$ n'est pas m-polaire, il existe $S \in \mathscr{D}'^m$, à support compact dans $\complement\Omega$, avec $\hat{S}(0) = 1$ (Corollaire 2). Soit $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$; prenons $T = \hat{\psi}(0)S$. Alors $\hat{\psi} - \hat{T}$ est $O(|\xi|)$ lorsque $|\xi| \to 0$, donc $(\hat{\psi} - \hat{T})|\xi|^{-m}$ est L^2 au voisinage de l'origine; à l'infini $\hat{\psi}|\xi|^{-m}$ est toujours L^2 et il en est de même pour $\hat{T}|\xi|^{-m}$ puisque $T \in \mathscr{D}'^m$. Donc $(\hat{\psi} - \hat{T})|\xi|^{-m} \in L^2(R^n)$, ce qui montre que $\hat{\mathscr{D}}^m(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$ grâce au Lemme 3.

Le dernier cas à étudier est résolu par le

THÉORÈME 5. *Soit $n = 2m - 2k$, k entier > 0. Une condition nécessaire et suffisante pour que*

$$\hat{\mathscr{D}}^m(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$$

est que ou bien $\complement\Omega$ n'est pas contenu dans un sous-espace propre de R^n; ou bien $\complement\Omega$ n'est pas $n/2$-polaire.

DÉMONSTRATION. La condition est *nécessaire*: il faut montrer que si $E = \complement\Omega$ est contenu dans un sous-espace propre R^{n-1} (que l'on peut supposer être l'hyperplan $x^1 = 0$), E n'est pas $n/2$-polaire, ou encore (Corollaire 5) que E n'est pas $(n-1)/2$-polaire dans R^{n-1}. Soit $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$. On sait (Lemme 3) qu'il existe T tempérée, à support dans E, telle que $(\hat{\psi} - \hat{T})|\xi|^{-m} \in L^2(R^n)$. Alors $T \in \mathscr{D}'^m$. Par adaptation facile de Schwartz [3, t. I, p. 101], on voit que

$$T = \sum_{j=0}^{m} (-i\,\partial/\partial x^1)^j (2\pi)^{\frac{1}{2}} \delta \otimes S_j = \sum_{j=0}^{m} T_j\,,$$

où $S_j \in \mathscr{D}'^m$ dans le plan $x^1 = 0$ et est à support dans E. On a

$$\hat{T}(\xi) = \sum_{j=0}^{m} \xi_1{}^j \hat{S}_j(\xi_2, \ldots, \xi_n) = \sum_{j=0}^{m} \hat{T}_j(\xi)\,.$$

Soit $\beta_0, \ldots, \beta_m$ des nombres réels distincts, $0 < \beta_j < 1$; la formule de Lagrange montre qu'il existe des constantes $\gamma_0, \ldots, \gamma_m$ telles que pour tout polynome $P(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_m t^m$ de degré $\leqq m$, on ait

$$a_k = \sum_{j=0}^{m} \gamma_j P(\beta_j)\,.$$

Si $P(t) = t^k$, on en déduit

(8) $$1 = \sum_{j=0}^{m} \gamma_j \beta_j^{k}.$$

Appliquons ceci au polynome $\hat{T}(t\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, dont le coefficient de t^k est $\hat{T}_k(\xi)$; posons

$$\varphi(\xi) = \sum_{j=0}^{m} \gamma_j \hat{\psi}(\beta_j \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n);$$

on a

$$\hat{T}_k(\xi) - \varphi(\xi) = \sum_{j=0}^{m} \gamma_j \big(\hat{T}(\beta_j \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) - \hat{\psi}(\beta_j \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\big).$$

Comme $(\hat{T} - \hat{\psi})|\xi|^{-m}$ est dans $L^2(R^n)$, on en déduit

(9) $$(\hat{T}_k - \varphi)|\xi|^{-m} \in L^2(R^n)$$

(cf. la démonstration du Lemme 7). Choisissons, ce qui est loisible, ψ avec $\hat{\psi}(\xi) = \xi_1^k + O(|\xi|^{k+1})$ lorsque $|\xi| \to 0$. Avec (8) on en déduit: $\varphi(\xi) = \xi_1^k + O(|\xi|^{k+1})$; donc $\varphi|\xi|^{-m}$ n'est pas L^2 au voisinage de l'origine, *donc T_k n'est pas nulle*. Comme φ est à décroissance rapide, (9) entraîne $(1+\xi^2)^{-m/2}\hat{T}_k \in L^2(R^n)$, ou $\xi_1^k(1+\xi^2)^{-m/2}\hat{S}_k \in L^2(R^n)$. Intégrant en ξ_1, on obtient

$$\int |\hat{S}_k(\xi_2, \ldots, \xi_n)|^2 (1+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2)^{k+\frac{1}{2}-m} d\xi_2 \ldots d\xi_n < \infty .$$

Comme $k+\frac{1}{2}-m = -(n-1)/2$, comme $S_k \neq 0$ et est à support dans E, on voit que E n'est pas $(n-1)/2$-polaire, ce qui démontre le théorème.

La condition du théorème est *suffisante*: il y a deux choses à démontrer:

a) si E n'est pas contenu dans un sous-espace propre, alors

$$\hat{\mathscr{D}}^m(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega);$$

b) si E est contenu dans l'hyperplan $x^1 = 0$ et n'est pas $n/2$-polaire, alors $\hat{\mathscr{D}}^m(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$.

Démonstration de a). On suppose donc que E contient $n+1$ points affinement indépendants, soient $0, a_1, \ldots, a_n$. Soit $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Il faut (Lemme 3) construire T à support les $n+1$ points précédents, donc

$$\hat{T}(\xi) = P_0(\xi) + P_1(\xi)\exp(-i\langle a_1, \xi\rangle) + \ldots + P_n(\xi)\exp(-i\langle a_n, \xi\rangle),$$

où les P_j sont des polynomes, avec la condition $(\hat{\psi} - \hat{T})|\xi|^{-m} \in L^2(R^n)$. Prenons à priori les polynomes de degré $<k$. Alors $(\hat{\psi} - \hat{T})|\xi|^{-m}$ est dans L^2 à l'infini. On aura donc le résultat si l'on peut choisir les P_j de façon que

(10) $$\hat{\psi} - \hat{T} = O(|\xi|^{k+1}), \qquad |\xi| \to 0 .$$

Si nous prenons les P_j homogènes de degré $k-1$, $j \geq 1$, on a

$$\hat{T}(\xi) = Q(\xi) + O(|\xi|^{k+1}),$$

avec

$$Q(\xi) = P_0(\xi) + P_1(\xi) + \ldots + P_n(\xi) - i\big(\langle a_1, \xi\rangle P_1(\xi) + \ldots + \langle a_n, \xi\rangle P_n(\xi)\big).$$

Soit $\hat{\varphi}(\xi) = R(\xi) + O(|\xi|^{k+1})$ avec R de degré $\leqq k$. On aura (10) si l'on peut choisir les P_j de façon que

$$Q = R. \tag{11}$$

Comme les formes $\langle a_j, \xi\rangle$ sont indépendantes, on peut choisir les polynomes $P_1, \ldots, P_n$ de façon que

$$-i(\langle a_1, \xi\rangle P_1 + \ldots + \langle a_n, \xi\rangle P_n) = r,$$

où r est la partie homogène de degré k de R. Prenons alors

$$P_0 = -(P_1 + \ldots + P_n) + (R - r);$$

le polynome P_0 est bien de degré $< k$; on a (11), donc le a) est démontré.

Démonstration de b). D'après l'hypothèse et le Corollaire 5, E n'est pas $(n-1)/2$-polaire dans $x^1 = 0$. Donc il existe S, tempérée dans cet hyperplan, à support compact dans E, avec $\hat{S}(0) = 1$, et

$$\int |\hat{S}(\xi_2, \ldots, \xi_n)|^2 (1 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2)^{-(n-1)/2} d\xi_2 \ldots d\xi_n < \infty. \tag{12}$$

La distribution $T_0 = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \delta \otimes S$ et ses dérivées $T_q = i^{-|q|} D^q T_0$ sont à support compact dans E. Si $|q| \leqq k$, on a

$$\hat{T}_q (1 + \xi^2)^{-m/2} \in L^2(R^n). \tag{13}$$

En effet, si D^q est une dérivée d'ordre α_j par rapport à x^j,

$$\int |\hat{T}_q|^2 (1 + \xi^2)^{-m} d\xi = \int |\hat{S}|^2 \xi_1^{2\alpha_1} \ldots \xi_n^{2\alpha_n} (1 + \xi^2)^{-m} d\xi = I_1 I_2$$

où

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2\alpha_1} (1 + t^2)^{-m} dt$$

et

$$I_2 = \int |\hat{S}(\xi_2, \ldots, \xi_n)|^2 |\xi_2^{\alpha_2} \ldots \xi_n^{\alpha_n}|^2 (1 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2)^{-m+\alpha_1+\frac{1}{2}} d\xi_2 \ldots d\xi_n$$

sont finis grâce à (12) et $-m + |\alpha| + \frac{1}{2} \leqq -m + k + \frac{1}{2} = -(n-1)/2$. Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. On choisit des constantes a_q, $|q| \leqq k$, telles que

$$\sum_{|q| \leqq k} a_q \hat{T}_q(\xi) - \hat{\varphi}(\xi) = O(|\xi|^{k+1}); \tag{14}$$

ce choix est possible; en effet, $\hat{T}_q(\xi) = \xi^q \hat{T}_0(\xi)$, donc a_q = coefficient

« d'ordre q » du développement de Taylor de $\hat{\psi}/\hat{T}_0$ à l'origine (notons que $\hat{T}_0(0) \neq 0$). Donc si l'on pose

$$T = \sum_{|q| \leq k} a_q T_q ,$$

de (13) et (14) résulte que $(\hat{\psi}-\hat{T})|\xi|^{-m} \in L^2(R^n)$, donc on a le b), grâce au Lemme 3.

Le Théorème 5 est complètement démontré.

6. Propriétés de $\hat{\mathscr{D}}^m(\Omega)$. Supposons que nous soyons dans l'un des cas où $\hat{\mathscr{D}}^m(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$. Les démonstrations des théorèmes ci-dessus montrent même que la forme (2) est alors continue sur $\mathscr{D}(\Omega)$ pour tout $\psi \in \mathscr{S}$; donc on peut identifier $\hat{\mathscr{D}}^m(\Omega)$ à un sous-espace de $\mathscr{S}'$. En faisant cette identification nous allons dans ce N° examiner de plus près les propriétés des éléments de $\hat{\mathscr{D}}^m(\Omega)$.

THÉORÈME 6. *On suppose que $\hat{\mathscr{D}}^m(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$. Soit u quelconque dans $\hat{\mathscr{D}}^m(\Omega)$. On a:*

1° *$D^q u \in L^p(R^n)$, avec $1/p = 1/2 - (m-|q|)/n$, si $0 \leq m - |q| < n/2$.*

2° *$D^q u$ est localement de puissance $p^{\text{ème}}$ sommable pour tout p fini si $m-|q| = n/2$.*

3° *$D^q u$ est une fonction continue si $m-|q| > n/2$.*

DÉMONSTRATION. Dans le cas 1°, en vertu des inégalités de Sobolev [4], il existe une constante C telle que

$$\left\{\int |D^q u|^p \, dx\right\}^{1/p} \leq C \|u\|_m ,$$

pour tout $u \in \mathscr{D}(R^n)$, donc pour tout $u \in \mathscr{D}(\Omega)$. Par conséquent, si u_k est une suite de Cauchy pour $\|u\|_m$, la suite $D^q u_k$ converge dans $L^p(R^n)$, ce qui démontre le théorème dans le cas 1°. Dans les cas 2° et 3° le théorème est également une conséquence des résultats de Sobolev [4][5], si l'on note que $D^q u \in L^2$ quand $|q| = m$ (voir aussi Schwartz [3, Chap. VI]).

Dans les cas 2° et 3°, le résultat précédent est seulement local. Pour n impair, une évaluation globale est donnée par le théorème suivant.

THÉORÈME 7. *On suppose n impair, $n < 2m$, et $\complement\Omega$ non vide. On pose*

$$\varrho(x) = \inf_{a \in \complement\Omega} |x-a| .$$

Soit q avec $m-|q| > n/2$. Il existe une constante C, indépendante de Ω telle que, pour tout $u \in \hat{\mathscr{D}}^m(\Omega)$, on ait

$$|D^q u(x)| \leq C \varrho(x)^{m-|q|-n/2} \|u\|_m . \tag{15}$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de démontrer (15) lorsque $\complement\Omega=\{0\}$ et $u\in\mathscr{D}(\Omega)$. Posons

$$\chi = D^q\varepsilon, \qquad \varepsilon = \text{mesure de Dirac au point } x\,.$$

Soit k défini par $n=2m-1-2k$; soit $\hat{T}(\xi)$ la somme des termes de degré $\leqq k$ dans le développement de Taylor de $\hat{\chi}$ à l'origine. Alors $\hat{T}$ est transformée de Fourier de T à support $\{0\}$; donc

$$|D^q u(x)| = |\langle D^q\varepsilon, \bar{u}\rangle| = |\langle \chi - T, \bar{u}\rangle| = |\langle \hat{\chi} - \hat{T}, \bar{\hat{u}}\rangle|\,. \tag{16}$$

Mais on voit facilement que

$$\int |\hat{\chi} - \hat{T}|^2 |\xi|^{-2m} d\xi = C^2 |x|^{2(m-|q|)-n}. \tag{17}$$

Alors (15) résulte de (16), (17) et Cauchy Schwarz.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. Deny, *Les potentiels d'énergie finie*, Acta Math. 82 (1950), 107–183.
2. J. Deny et J. L. Lions, *Les espaces du type de Beppo Levi*, Ann. Inst. Fourier Grenoble 5 (1955), 305–370.
3. L. Schwartz, *Théorie des distributions* I *et* II (Actualités Sci. Ind. 1091 et 1122 = Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg 9 et 10), Paris, 1950 et 1951.
4. S. L. Sobolev, *Sur un théorème d'analyse fonctionnelle*, Mat. Sbornik 4 (46) (1938), 471–497.
5. S. L. Sobolev, *Sur certaines applications de l'analyse fonctionnelle à la physique mathématique*, Léningrad, 1950. (En russe.)

UNIVERSITÉ DE LUND, SUÈDE
ET
UNIVERSITÉ DE NANCY, FRANCE