MATH. SCAND. 4 (1956), 271–275

SUR L'INTÉGRALE DE DIRICHLET

B. MALGRANGE

Cet article a uniquement pour objet quelques remarques simples sur l'article précédent [2]. Pour simplifier, nous nous bornerons à étudier des intégrales de Dirichlet généralisées sur un ouvert $\Omega \subset R^n$; une étude analogue pourrait être faite sans difficulté sur un espace de Riemann localement euclidien.

Soit donné un entier $m > 0$; nous désignerons par i un système d'entiers $\geqq 0$, $(i_1, \ldots, i_n)$, avec $i_1 + \ldots + i_n = m$; nous poserons

$$D^i = \frac{\partial^m}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}} .$$

Considérons une forme hermitienne

$$Q = \sum_{i,j} a_{ij}(x_1, \ldots, x_n) \xi_i \bar{\xi}_j \qquad (\xi_i \in C);$$

les a_{ij} sont supposés être des fonctions indéfiniment différentiables définies dans Ω; pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$, nous supposons la forme Q définie positive. A la forme hermitienne Q, nous associons l'opérateur différentiel

$$D(f,g) = \sum_{i,j} a_{ij} D^i f \overline{D^j g}$$

et la forme sesquilinéaire

$$(f,g)_m = \int D(f,g)\, \partial x_1 \ldots \partial x_n .$$

Nous poserons

$$\|f\|_m^2 = (f,f)_m .$$

Nous désignerons enfin par $\mathscr{D}_\Omega$ (resp. $\mathscr{D}'_\Omega$) l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact $\subset \Omega$ (resp. des distributions sur Ω).

1. Considérons l'ensemble $B\text{-}L^m{}_\Omega(D)$ des distributions $f \in \mathscr{D}'_\Omega$ qui possèdent les propriétés suivantes:

a) Pour tout i, $D^i f$ est une fonction localement de carré sommable.

b) $D(f,f)$ est une fonction sommable.

Reçu le 18 juillet 1956.

Comme il est bien connu la condition a) entraîne que les f sont des fonctions localement de carré sommable ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre m; d'autre part, il est évident que $B\text{-}L^m{}_\Omega(D)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{D}'_\Omega$. Sur $B\text{-}L^m{}_\Omega(D)$, la fonction $f \to \|f\|_m$ est une semi-norme; les éléments de $B\text{-}L^m{}_\Omega(D)$ qui annulent cette semi-norme sont *les polynomes de degré* $\leqq m-1$; l'espace de ces polynomes sera désigné par P^{m-1}. Désignons par $B\dot{\text{-}}L^m{}_\Omega(D)$ le quotient de $B\text{-}L^m{}_\Omega(D)$ par P^{m-1}.

PROPOSITION 1. *L'espace $B\dot{\text{-}}L^m{}_\Omega(D)$, muni de la norme $\|\cdot\|_m$, est complet.*

Cette proposition se démontre comme [1, III, théorème 2.1]. Dans la suite, $B\dot{\text{-}}L^m{}_\Omega(D)$ sera toujours supposé muni de cette norme.

Désignons maintenant par $\mathscr{L}^m{}_\Omega$ l'espace des fonctions localement de carré sommable ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leqq m$ sur Ω, muni de la topologie de la convergence dans L^2 sur tout compact des fonctions et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre m. D'après le résultat rappelé plus haut, on a

$$B\text{-}L^m{}_\Omega(D) \subset \mathscr{L}^m{}_\Omega, \qquad \text{d'où} \qquad B\dot{\text{-}}L^m{}_\Omega(D) \subset \mathscr{L}^m{}_\Omega/P^{m-1}$$

Par suite, en appliquant la proposition 1 et le théorème du graphe fermé:

PROPOSITION 2. *L'injection $B\dot{\text{-}}L^m{}_\Omega(D) \to L^m{}_\Omega/P^{m-1}$ est continue.*

Notons en passant que la proposition 2 permet, en suivant un schéma indiqué par J. L. Lions [3], de résoudre un problème généralisant le problème de Neumann pour l'opérateur différentiel $\Lambda = \Sigma D^j(a_{ij}D^i\cdot)$ (cf. [3, note ($^{27\,bis}$) en bas de page 244]).

Occupons-nous maintenant du problème de Dirichlet; la fonction $f \to \|f\|_m$ est une *norme* sur l'espace $\mathscr{D}_\Omega$; cet espace, muni de cette norme, sera désigné par $\mathscr{D}^m{}_\Omega(D)$; son complété sera désigné par $\hat{\mathscr{D}}^m{}_\Omega(D)$.

NOTATION. *P désigne l'ensemble des polynomes $p \in P^{m-1}$ qui possèdent la propriété suivante: Il existe une suite de fonctions $\varphi_i \in \mathscr{D}_\Omega$, qui tendent vers zéro dans $\mathscr{D}^m{}_\Omega(D)$ et vers p dans $\mathscr{L}^m{}_\Omega$.*

P est évidemment un sous-espace vectoriel de P^{m-1}.

PROPOSITION 3. *Soit Q un sous-espace vectoriel de P^{m-1}; pour que l'application*

$$\mathscr{D}^m{}_\Omega(D) \to \mathscr{L}^m{}_\Omega/Q$$

(produit de l'injection $\mathscr{D}^m{}_\Omega(D) \to \mathscr{L}^m{}_\Omega$ et de l'application canonique $\mathscr{L}^m{}_\Omega \to \mathscr{L}^m{}_\Omega/Q$) soit continue, il faut et il suffit que l'on ait: $Q \supset P$.

DÉMONSTRATION. a) Montrons que, si l'on a $Q \supset P$, l'application envisagée est continue; il suffit de le démontrer pour $Q = P$; nous nous placerons donc dans ce cas, et nous raisonnerons par l'absurde.

Supposons donc l'application

$$\mathscr{D}^m{}_\Omega(D) \to \mathscr{L}^m{}_\Omega/P$$

non continue; il existe une suite de fonctions $\varphi_i \in \mathscr{D}_\Omega$ qui tendent vers zéro dans $\mathscr{D}^m{}_\Omega(D)$ mais dont les images $\varphi^\cdot{}_i$ dans $\mathscr{L}^m{}_\Omega/P$ ne tendent pas vers zéro; d'après la proposition 2, l'application

$$\mathscr{D}^m{}_\Omega(D) \to \mathscr{L}^m{}_\Omega/P^{m-1}$$

est continue, et, par suite, il existe une suite de polynomes $p_i \in P^{m-1}$, tels que l'image $\varphi^\cdot{}_i + p^\cdot{}_i$ de la suite $\varphi_i + p_i$ dans $\mathscr{L}^m{}_\Omega/P$ tende vers zéro (mais la suite $p^\cdot{}_i$ ne tend pas vers zéro!). En multipliant au besoin les φ_i par des constantes convenables on peut supposer que les $p^\cdot{}_i$ ont un point adhérent $q^\cdot \neq 0$ dans P^{m-1}/P; on peut alors extraire de la suite φ_i une suite ψ_j qui tende vers zéro dans $\mathscr{D}^m{}_\Omega(D)$, et telle que les $\psi^\cdot{}_j + q^\cdot$ tendent vers zéro dans $\mathscr{L}^m{}_\Omega/P$.

Soit q un polynome $\in P^{m-1}$, dont l'image dans P^{m-1}/P soit égale à $q^\cdot$; il existe une suite p'_j de polynomes $\in P$, telle que la suite $\psi_j + p'_j + q$ tende vers zéro dans $\mathscr{L}^m{}_\Omega$; mais en utilisant la définition de P, on construit facilement une suite χ_j de fonctions $\in \mathscr{D}_\Omega$, qui tendent vers zéro dans $\mathscr{D}^m{}_\Omega(D)$, et telles que les $\chi_j - p'_j$ tendent vers zéro dans $\mathscr{L}^m{}_\Omega$. Alors, la suite $\psi_j + \chi_j$ tend vers zéro dans $\mathscr{D}^m{}_\Omega(D)$ et vers $-q$ dans $\mathscr{L}^m{}_\Omega$; donc, on a $q \in P$, ce qui est absurde.

b) Supposons $P \not\subset Q$; il existe alors un $p \in P$, $p \notin Q$. Par définition de P, il existe une suite de fonctions $\varphi_i \in \mathscr{D}_\Omega$ qui tendent vers zéro dans $\mathscr{D}^m{}_\Omega(D)$ et vers p dans $\mathscr{L}^m{}_\Omega$; les images $\varphi^\cdot{}_i$ des fonctions φ_i dans $\mathscr{L}^m{}_\Omega/Q$ ne tendent donc pas vers zéro, et l'application envisagée n'est pas continue.

En notant comme l'habitude par $\langle \varphi, \psi \rangle$, l'intégrale $\int \varphi\psi dx_1 \ldots dx_n$ (et ses généralisations aux distributions), on a le corollaire suivant:

COROLLAIRE. *Pour qu'une fonction $\varphi \in \mathscr{D}_\Omega$ définisse, par l'application $\psi \to \langle \varphi, \psi \rangle$ une forme linéaire continue sur $\mathscr{D}^m{}_\Omega(D)$, il faut et il suffit que l'on ait $\langle \varphi, P \rangle = 0$.*

2. Le principal problème relatif à l'espace $\mathscr{D}^m{}_\Omega(D)$ est le suivant: déterminer P en fonction des propriétés de Ω et des a_{ij} (en particulier, de la croissance des a_{ij} au voisinage du bord de Ω).

Lorsque les a_{ij} sont constants, et que l'on a $\Omega = R^n$, la réponse est obtenue immédiatement par transformation de Fourier:

Si $n > 2m$, *P est réduit à* 0. *Si* $n \leqq 2m$, *P est l'espace* P^k *des polynomes de degré* $\leqq k$, *avec* $k = m - [\frac{1}{2}(n+1)]$ ($[\cdot]$: partie entière).

En dehors de ce cas (pratiquement traité dans [2]), nous n'aborderons pas ce difficile problème, et nous nous contenterons d'examiner la question suivante: *P étant supposé connu, quelles propriétés doit posséder un compact* $K \subset \Omega$ *pour que l'injection*

$$\mathscr{D}^m{}_{\Omega-K}(D) \to \mathscr{L}^m{}_{\Omega-K}$$

soit continue? Lorsque cette dernière condition est vérifiée, nous dirons que « *D admette un noyau de Green dans* $\Omega - K$ ».

Nous nous appuierons sur un lemme analogue au lemme **3** de [2]; appelons $\mathscr{K}^{-m}{}_\Omega$ le dual de $\mathscr{L}^m{}_\Omega$; c'est un espace de distributions à support compact. Soit $\mathscr{K}^{-m}{}_K$ l'espace des distributions $\in \mathscr{K}^{-m}{}_\Omega$ dont le support est contenu dans K.

Lemme. *Pour que D admette un noyau de Green dans* $\Omega - K$, *il faut et il suffit que l'application*

$$\chi \to (p \to \langle \chi, p \rangle), \qquad \chi \in \mathscr{K}^{-m}{}_K, \quad p \in P$$

envoie $\mathscr{K}^{-m}{}_K$ *sur le dual de P.*

Démonstration. Si D admet un noyau de Green dans $\Omega - K$, toute fonction $\varphi \in \mathscr{D}_{\Omega-K}$ définit (par l'application $\psi \to \langle \varphi, \psi \rangle$) une forme linéaire continue sur $\mathscr{D}^m{}_{\Omega-K}(D)$. D'après le théorème de Hahn-Banach, cette forme linéaire se prolonge en une forme linéaire continue $\bar\varphi$ sur $\mathscr{D}^m{}_\Omega(D)$; $\bar\varphi$ est une distribution, qui coïncide avec φ sur $\Omega - K$; et, par suite, on a $\bar\varphi = \varphi - \chi$, χ étant une distribution à support dans K; en particulier, $\bar\varphi$ est une distribution à support compact.

En outre, on a: $\bar\varphi \in \mathscr{K}^{-m}{}_\Omega$ (soit, en effet, α une fonction $\in \mathscr{D}_\Omega$ égale à un au voisinage du support de $\bar\varphi$; l'application $\psi \to \alpha\psi$ de $\mathscr{D}_\Omega$ dans $\mathscr{D}_\Omega$ se prolonge évidemment en une application continue $u: \mathscr{L}^m{}_\Omega \to \hat{\mathscr{D}}^m{}_\Omega(D)$; et $t_u(\bar\varphi)$ est une forme linéaire continue sur $\mathscr{L}^m{}_\Omega$, donc définit un élément de $\mathscr{K}^{-m}{}_\Omega$, qui coïncide avec $\bar\varphi$ en tant que distribution); par suite, on a: $\chi \in \mathscr{K}^{-m}{}_K$.

Ce qui précède, et la définition de P, entraînent immédiatement la formule $\langle \bar\varphi, P \rangle = 0$; pour tout $p \in P$, on a donc $\langle \varphi, p \rangle = \langle \chi, p \rangle$.

Comme toute forme linéaire sur P peut évidemment être réalisée par une application $p \to \langle \varphi, p \rangle$, avec $\varphi \in \mathscr{D}_{\Omega-K}$, toute forme linéaire sur P peut être réalisée par une application $p \to \langle \chi, p \rangle$ avec $\chi \in \mathscr{K}^{-m}{}_K$.

Réciproquement, supposons que l'application $\chi \to (p \to \langle \chi, p \rangle)$ envoie $\mathscr{K}^{-m}{}_K$ sur le dual de P; soit φ une fonction $\in \mathscr{D}_\Omega$; tout revient, d'après le corollaire de la proposition 3, à démontrer que $(\psi \to \langle \varphi, \psi \rangle)$ est une forme linéaire continue sur $\mathscr{D}^m{}_{\Omega-K}(D)$.

Soit $\chi \in \mathcal{K}^{-m}{}_K$ tel que, pour tout $p \subset P$, on ait $\langle \varphi, p \rangle = \langle \chi, p \rangle$; $\psi - \chi$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{L}^m{}_\Omega / P$, donc sur $\mathcal{D}^m{}_\Omega(D)$ (proposition 3), donc sur $\mathcal{D}^m{}_{\Omega-K}(D)$, d'où le lemme.

Je ne sais pas, contrairement à [2], généraliser ce lemme à des K fermés, mais non compacts (il n'est pas possible ici de raisonner par transformation de Fourier).

Voici maintenant quelques compléments aux théorèmes de [2].

Théorème. 1) *Supposons $n < 2m$, et supposons que P soit l'espace P^k des polynomes de degré $\leqq k$ $(0 \leqq k \leqq m-1$; en particulier, P n'est pas réduit à zéro). Alors:*

a) *Si $k \leqq m - [\frac{1}{2}n] - 1$, pour que D admette un noyau de Green dans $\Omega - K$, il faut et il suffit que K ne soit pas vide.*

b) *Si $k = m - [\frac{1}{2}n]$, pour que D admette un noyau de Green dans $\Omega - K$ il faut et il suffit que K contienne $n+1$ points affinement indépendants ou ne soit pas $[\frac{1}{2}n]$-polaire.*

2) *Soit K un compact contenu dans Ω, et possédant la propriété suivante: Pour toute variété algébrique V de degré $\leqq m-1$, il existe une distribution $\in \mathcal{K}^{-m}{}_K$ dont le support n'est pas contenu dans V. Alors, D admet un noyau de Green dans $\Omega - K$.*

Démonstration. 1) se démontre comme [2], théorèmes 2 et 5.

2) Il suffit, d'après le lemme précédent, de montrer que, pour tout $p \in P$, il existe $\chi \in \mathcal{K}^{-m}{}_K$ tel que l'on ait $\langle \chi, p \rangle \neq 0$. Soit alors V la variété des zéros de p; par hypothèse, il existe $\varphi \in \mathcal{K}^{-m}{}_K$ dont le support n'est pas contenu dans V; il existe donc $\alpha \in \mathcal{D}_{\Omega-V}$ tel que $\langle \varphi, \alpha \rangle \neq 0$; $\beta = \alpha / p$ est encore une fonction $\in \mathcal{D}_{\Omega-V}$, et l'on a donc $\langle \varphi, p\beta \rangle = \langle \beta\varphi, p \rangle \neq 0$. Par suite, $\chi = \beta\varphi$ répond à la question, d'où le théorème.

Exemples de compacts vérifiant la condition 2). 1° *Tout compact possédant un point intérieur.* 2° *Si $n < 2m$, tout ensemble fini de points n'appartenant à aucune variété algébrique de degré $\leqq m-1$* (on sait en effet que, si $n < 2m$, la masse $+1$ en un point est dans $\mathcal{K}^{-m}$).

BIBLIOGRAPHIE

1. J. Deny et J. L. Lions, *Les espaces du type de Beppo Levi*, Ann. Inst. Fourier Grenoble 5 (1955), 305–370.
2. L. Hörmander et J. L. Lions, *Sur la complétion par rapport à une intégrale de Dirichlet*, Math. Scand. 4 (1956), 259–270.
3. J. L. Lions, *Sur quelques problèmes aux limites relatifs à des opérateurs différentiels elliptiques*, Bull. Soc. Math. France. 83 (1955), 225–250.

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG, FRANCE