MATH. SCAND. 5 (1957), 285–290

EINE BEMERKUNG ZUR ASYMPTOTISCHEN DARSTELLUNG VON ORTHOGONALPOLYNOMEN

G. FREUD

Es sei $f(\theta) \in \mathscr{L}$ eine nach 2π periodische nichtnegative Gewichtsfunktion, $\log f(\theta) \in \mathscr{L}$. Mit den Bezeichnungen von G. Szegö [3] sei $k(z) \equiv k(f; z)$ die im Einheitskreise reguläre analytische Funktion mit $k(0) > 0$, deren Realteil für $|z| = 1$ fast überall die Randwerte

$$\lim_{z \to 1-0} \operatorname{Re} k(re^{i\theta}) = \log f(\theta)$$

besitzt, und

$$D(f; z) = \exp\{\tfrac{1}{2}k(z)\} .$$

Das Orthogonalpolynom n-ten Grades $\Phi_n(f; z) = K_n(f) z^n + \ldots$ ist durch die Bedingungen

$$\text{a)} \quad K_n(f) > 0, \qquad \text{b)} \quad \int_{-\pi}^{+\pi} |\Phi_n(f; e^{i\theta})|^2 f(\theta)\, d\theta = 1 ,$$

$$\text{c)} \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \Phi_n(f; e^{i\theta})\, \overline{\pi(e^{i\theta})}\, f(\theta)\, d\theta = 0 ,$$

für jedes Polynom $\pi(z)$, dessen Grad niedriger als n ist, bestimmt.

Aus den Untersuchungen von S. N. Bernstein und G. Szegö ist bekannt, dass unter geeigneten Bedingungen die asymptotische Formel

$$\Phi_n(f; e^{i\theta}) = e^{in\theta}\{\overline{D(f; e^{i\theta})}\}^{-1} + o(1) \tag{1}$$

besteht (vgl. G. Szegö [3]).

Verfasser konnte in einer demnächst erscheinenden Arbeit [2] zeigen, dass folgende Bedingungen für die Gültigkeit von (1) an einer einzigen Stelle $\theta = \gamma$ hinreichend sind:

$$\alpha) \quad 0 < m \leqq f(\theta) \leqq M, \qquad -\pi \leqq \theta \leqq +\pi ,$$

$$\beta) \quad f(\theta) - f(\gamma) = O(|\theta - \gamma|) .$$

Dieses Resultat ergänzend, beweisen wir im Folgenden den

Eingegangen am 20. Juni 1957.

SATZ. *Es sei $f(\theta)$ von beschränkter Schwankung, und α) sei erfüllt; dann gilt* (1) *an jeder Stelle $\theta=\gamma$, wo*

$$\overline{\log f(\gamma)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\log f(\theta)\cot\tfrac{1}{2}(\gamma-\theta)\,d\theta \tag{2}$$

im Sinne eines Cauchyschen Hauptwertes existiert, und es gilt gleichmässig in θ und n

$$\Phi_n(f;\, e^{i\theta}) = O(1)\,. \tag{3}$$

Da an den übrigen Stellen die rechte Seite von (1) nicht definiert ist, haben wir damit eine vollständige Charakterisierung der Punkte θ gegeben, für welche (1) besteht. Nach dem Satze von Privaloff umfassen sie fast alle Punkte von $[-\pi, +\pi]$; das kann aber schon aus dem oben zitierten Satze gefolgert werden, da eine Funktion beschränkter Schwankung fast überall differenzierbar ist.

Wir erwähnen eine Reihe von Resultaten von G. Szegö [3], welche wir zum Beweise benötigen:

Es sei

$$s_n(f;\, a, z) \equiv \sum_{k=0}^{n}\overline{\Phi_k(a)}\,\Phi_k(z)\,. \tag{4}$$

Ist $f_1 \leqq f_2$ für jedes θ, so gilt

$$s_n(f_1;\, a, a) \geqq s_n(f_2;\, a, a) \tag{5}$$

und

$$K_n(f_1) \geqq K_n(f_2)\,. \tag{6}$$

Ist speziell $f(\theta) \geqq m > 0$ für jedes θ, so besteht gleichmässig in n und θ die Ungleichung

$$s_n(f;\, e^{i\theta}, e^{i\theta}) \leqq m^{-1}(n+1)\,. \tag{7}$$

Ist ferner $f_1 \leqq f_2$ für jedes θ, so besteht die Ungleichung

$$\begin{aligned} &|K_n(f_1)\,\Phi_n(f_1;\, e^{i\theta}) - K_n(f_2)\,\Phi_n(f_2;\, e^{i\theta})| \\ &\qquad \leqq |K_n^2(f_1)-K_n^2(f_2)|\;|s_n(f_1;\, e^{i\theta}, e^{i\theta})-s_n(f_2;\, e^{i\theta}, e^{i\theta})|\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Ist die Gewichtsfunktion von der Form $f \equiv T_m^{-1}$, wo T_m ein nichtnegatives trigonometrisches Polynom m-ter Ordnung bedeutet, so erhält man die Identitäten

$$\Phi_n(T_m^{-1};\, e^{i\theta}) \equiv e^{in\theta}\{\overline{D(T_m^{-1};\, e^{i\theta})}\}^{-1} \qquad \text{für} \quad n \geqq m \tag{9}$$

und

(10) $$K_n(T_m^{-1}) = \exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\log T_m(\theta)\,d\theta\right\} \quad \text{für} \quad n \geqq m\,.$$

Infolge α) ist mit $f(\theta)$ auch $F(\theta)=f^{-1}(\theta)$ von beschränkter Variation, und aus der Existenz von (2) folgt die Stetigkeit von $F(\theta)$ an der Stelle $\theta=\gamma$. Somit gibt es infolge eines Satzes von T. Ganelius und dem Verfasser ([2], Satz 1, und Bemerkung dazu), eine Folge trigonometrischer Polynome $\{W_n(\theta)\}$, wo $W_n(\theta)$ von höchstens n-ter Ordnung ist, derart dass

(11) $$M_1 \geqq W_n(\theta) \geqq F(\theta)\,,$$

(12) $$\int_{-\pi}^{+\pi}|W_n(\theta)-F(\theta)|\,d\theta = O(n^{-1})\,;$$

und ferner gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein δ und ein N, so dass

(13) $$|W_n(\theta)-F(\gamma)| \leqq \varepsilon \quad \text{für} \quad |\theta-\gamma| \leqq \delta, \quad n \geqq N\,.$$

Aus (12) und $W_n(\theta) \geqq F(\theta) \geqq M^{-1}$ erhält man

(14) $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(\theta)\,W_n(\theta)\,d\theta = 1 + O(n^{-1})\,.$$

Bekanntlich ist

$$K_n^{-2}(f) = \min\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|z^n+a_1z^{n-1}+\ldots|^2 f(\theta)\,d\theta, \qquad z = e^{i\theta}$$

(vgl. z. B. G. Szegö [3, S. 38]). Setzt man hier

$$z^n + a_1\,z^{n-1} + \ldots = \{K_n(W_n^{-1})\}\,\Phi_n(W_n^{-1}; z)\,,$$

so ergibt sich wegen (9) und (14)

(15)
$$K_n^{-2}(f) \leqq K_n^{-2}(W_n^{-1})\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}W_n(\theta)f(\theta)\,d\theta = K_n^{-2}(W_n^{-1})[1+O(n^{-1})]\,.$$

Infolge (6) ist $K_n(W_n^{-1}) \geqq K_n(f)$, und infolge (10) ist

$$\mu_1 \geqq K_n(W_n^{-1}) \geqq \mu_2 > 0$$

mit von n unabhängigen μ_1 und μ_2. Somit ergibt sich aus (14)

(16) $$K_n^2(W_n^{-1}) - K_n^2(f) = O(n^{-1})\,.$$

Aus $f(\theta) \geqq W_n^{-1}(\theta) \geqq M_1^{-1}$ erhält man wegen (7)

$$s_n(W_n^{-1}; e^{i\theta}, e^{i\theta}) = O(n), \qquad s_n(f; e^{i\theta}, e^{i\theta}) = O(n)\,,$$

und hieraus ergibt sich mit Hilfe von (8)

$$K_n(W_n{}^{-1})\,\Phi_n(W_n{}^{-1};\,e^{i\theta}) - K_n(f)\,\Phi_n^*(f;\,e^{i\theta}) = O(1)\,.$$

Beachtet man, dass infolge (9) und der Definition von $D(f;\,z)$

$$|\Phi_n(W_n{}^{-1};\,e^{i\theta})|^2 = W_n(\theta) = O(1)$$

ist, so schliesst man hieraus, dass die Folge $\{\Phi_n(f;\,e^{i\theta})\}$ gleichmässig in θ und f beschränkt bleibt.

Es sei $\varepsilon > 0$, und δ, N seien durch (13) bestimmt. Wir betrachten ein trigonometrisches Polynom $\psi(\theta)$, für welches die Ungleichungen

$$\text{(17)}\qquad \begin{aligned} &\text{a)}\ F(\gamma)+2\varepsilon \geqq \psi(\theta), && \theta \in (\gamma-\tfrac{1}{2}\delta,\, \gamma+\tfrac{1}{2}\delta)\,,\\ &\text{b)}\ \psi(\theta) \geqq F(\gamma)+\varepsilon, && \theta \in (\gamma-\delta,\, \gamma+\delta)\,,\\ &\text{c)}\ 2M_1 \geqq \psi(\theta) \geqq M_1, && \theta \notin (\gamma-\delta,\, \gamma+\delta)\,, \end{aligned}$$

befriedigt sind. Für $M \geqq N$ wird dann

$$\psi(\theta) \geqq W_n(\theta)\,,$$

und infolge dessen (vgl. (5)) ist

$$\begin{aligned} s_n(W_n{}^{-1};\,e^{i\gamma},\,e^{i\gamma}) &\leqq s_n(\psi^{-1};\,e^{i\gamma},\,e^{i\gamma})\\ &\equiv \psi(\gamma)\left\{n+1+2\,\mathrm{Re}\left[e^{i\gamma}\frac{D'(\psi^{-1};\,e^{i\gamma})}{D(\psi^{-1};\,e^{i\gamma})}\right]\right\}, \end{aligned}$$

falls n die Ordnung von $\psi(\theta)$ übersteigt (vgl. G. Szegö [3, S. 300]). Wegen (17 a) erhält man hieraus für genügend grosses n

$$\text{(18)}\qquad s_n(f;\,e^{i\gamma},\,e^{i\gamma}) \leqq s_n(W_n{}^{-1};\,e^{i\gamma},\,e^{i\gamma}) \leqq \big(f^{-1}(\gamma)+3\varepsilon\big)(n+1)\,.$$

Hilfssatz. *Es gilt*

$$\text{(19)}\qquad s_n{}^{-1}(f;\,e^{i\gamma},\,e^{i\gamma}) \leqq (n+1)^{-1}\,\mathfrak{F}_n(f;\,\gamma)\,,$$

wo $\mathfrak{F}_n(f,\,\theta)$ *das* n*-te arithmetische Mittel der Fourierschen Reihe von* $f(\theta)$ *bedeutet.*

Beweis. Nach G. Szegö [3, S. 283] ist $s_n{}^{-1}(f;\,e^{i\gamma},\,e^{i\gamma})$ das Minimum des Integrals

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |\pi_n(e^{i\theta})|^2 f(\theta)\,d\theta\,,$$

wenn $\pi_n(z)$ die Polynome höchstens n-ten Grades durchläuft, für welche $|\pi_n(e^{i\gamma})| = 1$ ist. Setzt man hier

$$\pi_n(z) = \sum_{k=0}^{n} e^{-ik\gamma} z^k ,$$

so ergibt sich sofort (19).

Aus (19) und dem Satze von Fejér schliesst man, dass

$$s_n(f; e^{i\gamma}, e^{i\gamma}) \geqq (f^{-1}(\gamma) - \varepsilon)(n+1) \tag{20}$$

für genügend grosses n.

Indem man in (8) $f_1 = W_n^{-1}$, $f_2 = f$ setzt und (16), (18) und (20) beachtet, erhält man

$$\lim_{n=\infty} \{K_n(W_n^{-1})\, \Phi_n(W_n^{-1}; e^{i\gamma}) - K_n(f)\, \Phi_n(f; e^{i\gamma})\} = 0$$

und, indem man (16), $K_n(W_n^{-1}) \geqq \mu_2$, $\Phi_n(f; e^{i\gamma}) = O(1)$ und (9) berücksichtigt,

$$\lim_{n=\infty} \{e^{in\gamma}[\overline{D(W_n^{-1}; e^{i\gamma})}]^{-1} - \Phi_n(f; e^{i\gamma})\} = 0 . \tag{21}$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass

$$\lim_{n=\infty} D(W_n^{-1}; e^{i\gamma}) = D(f; e^{i\gamma})$$

gilt, und dazu ist wieder hinreichend, dass

$$\widetilde{\log W_n(\gamma)} \to -\widetilde{\log f(\gamma)} ,$$

das heisst

$$\lim_{n=\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} [\log W_n(\theta) + \log f(\theta)] \cot \tfrac{1}{2}(\gamma - \theta)\, d\theta = 0 \tag{22}$$

gilt.

Infolge (13) ist

$$\left| \frac{W_n(\theta + h) - W_n(\theta - h)}{\sin h} \right| \leqq O(1)\, |h|^{-1} \varepsilon \qquad \text{für} \qquad |\theta - \gamma| \leqq \tfrac{1}{2}\delta .$$

Auf der linken Seite steht ein trigonometrisches Polynom niedrigerer als n-ter Ordnung in h. Nach der Bernsteinschen Ungleichung kann es in einem Intervall der Länge n^{-1} um die Maximumstelle seines Betrages keinen dem Betrage nach kleineren Wert als die Hälfte des Maximums annehmen. Die rechte Seite nimmt aber in jedem solchen Intervall höchstens den Wert $O(n\varepsilon)$ an. Hieraus erhält man

$$|U_n'(\theta)| \leqq Kn\varepsilon \qquad \text{für} \qquad |\theta - \gamma| \leqq \tfrac{1}{2}\delta .$$

Somit wird

$$\int_{\gamma-n^{-1}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}^{\gamma+n^{-1}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}} \log W_n(\theta) \cot \tfrac{1}{2}(\gamma-\theta)\, d\theta \tag{23}$$
$$= \int_{\gamma-n^{-1}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}^{\gamma+n^{-1}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}} [\log W_n(\theta) - \log W_n(\gamma)] \cot \tfrac{1}{2}(\gamma-\theta)\, d\theta$$
$$= \int_{\gamma-n^{-1}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}^{\gamma+n^{-1}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}} \varepsilon O(n)\, d\theta = \varepsilon^{\frac{1}{2}} O(1) .$$

Andererseits ist infolge der Existenz von (2)

$$\lim_{n=\infty} \int_{\gamma-n^{-1}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}^{\gamma+n^{-1}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}} \log f(\theta) \cot \tfrac{1}{2}(\gamma-\theta)\, d\theta = 0 . \tag{24}$$

Aus (12) ergibt sich wegen $W_n(\theta) \geqq f^{-1}(\theta) \geqq M^{-1}$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} [\log f(\theta) + \log W_n(\theta)]\, d\theta = O(n^{-1}) ,$$

und hieraus erhält man

$$\left| \int_{\gamma+n^{-1}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}^{2\pi+\gamma-n^{-1}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}} [\log f(\theta) + \log W_n(\theta)] \cot \tfrac{1}{2}(\gamma-\theta)\, d\theta \right| \tag{25}$$
$$\leqq 2n\varepsilon^{\frac{1}{2}} O(n^{-1}) = \varepsilon^{\frac{1}{2}} O(1) .$$

Aus (23), (24) und (25) folgt (22), was zu beweisen war.

LITERATUR

1. G. Freud and T. Ganelius, *Some remarks on one-sided approximation*, Math. Scand. 5 (1957), 276–284.
2. G. Freud, *Über die Asymptotik orthogonaler Polynome*, Publ. Inst. Math. Beograd, im Erscheinen.
3. G. Szegö, *Orthogonal Polynomials* (Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 23), New York, 1939.

MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN, BUDAPEST, UNGARN