MATH. SCAND. 10 (1962), 108–110

"ON AN ABSOLUTE CONSTANT PERTAINING TO CAUCHY'S 'PRINCIPAL MODULI' IN BOUNDED POWER SERIES"

GÜNTHER SCHLENSTEDT

Prof. Wintners obengenannte Arbeit erschien in der Math. Scand. 4 (1956), 108–112. Beim Beweis einer Behauptung unterlief Herrn Prof. Wintner ein Rechenfehler. Wie aus dem Folgenden hervorgeht, kann man mit einfachen Mitteln beweisen, dass die betreffende beste Schranke nicht $\frac{1}{3}$ sondern 1 ist.

1.

Ich zitiere aus dem Anfang von Prof. Wintners Arbeit:

»Let $f(z)$ be a function which is regular within the unit circle and satisfies the inequality

$$(1) \qquad |f(z)| < 1 \qquad \text{for} \qquad |z| < 1 .$$

For $|z| < 1$, let an other function, $g(z)$, be defined by placing

$$(2) \qquad g(z) = \sum_0^\infty |c_n| z^n \qquad \text{if} \qquad f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n .$$

It follows from (1) by Parseval's relation that

$$(3) \qquad \sum_0^\infty |c_n|^2 < 1, \qquad \text{hence} \qquad |c_n| < 1 .$$

. . . .

It is clear from (1) that

$$(4) \qquad \sup_{|z|<1} |z/f(z)| \geqq 1$$

(the sup can be ∞) and that, in view of the example $f(z) = z$, the lower bound 1 cannot be improved to any greater absolute constant. In what follows, the corresponding question will be considered for the case in which $f(z)$ is replaced by $g(z)$. The result will be that

Eingegangen am 10. Januar 1962.

$$\sup_{|z|<1} |z/g(z)| > \tfrac{1}{3} \tag{5}$$

holds by virtue of (1), and that $\frac{1}{3}$ is the best absolute constant here.«

2.

Es läßt sich jedoch beweisen, daß stets gilt

$$\sup_{|z|<1} |z/g(z)| \geqq 1 . \tag{6}$$

Das widerspricht der Behauptung, $\frac{1}{3}$ sei die beste absolute Konstante in (5).

Zum Beweis sind drei Fälle zu unterscheiden.

(a) $g(z)/z$ hat eine Nullstelle in $|z| < 1$,

(b) $g(z) \neq 0$ in $|z| < 1$,

(c) $g(0) = 0$, $g(z)/z \neq 0$ in $|z| < 1$.

Beweis zu (a):

$$\sup_{|z|<1} |z/g(z)| = \infty .$$

Beweis zu (b): $z/g(z)$ ist regulär in $|z| < 1$. Es kann also das Maximumprinzip angewandt werden. Folglich gilt für $0 < r < 1$

$$\begin{aligned} \max_{|z|\leqq r} |z/g(z)| &= \max_{|z|=r} |z/g(z)| = r \max_{|z|=r} |1/g(z)| \\ &= r \max_{|z|\leqq r} |1/g(z)| \geqq r 1/g(0) = r/|c_0| \geqq r . \end{aligned}$$

Letzteres folgt aus (3). Für $r \to 1$ ergibt sich die Behauptung (6).

Beweis zu (c): Es ist $c_0 = 0$ und $c_1 \neq 0$. Setzt man

$$g(z)/z = h(z) = |c_1| + |c_2| z + \dots ,$$

dann ergibt sich

$$\sup_{|z|<1} |z/g(z)| = \sup_{|z|<1} |1/h(z)| \geqq 1/h(0) = 1/|c_1| \geqq 1 .$$

Der Beweis gilt nicht nur für Funktionen $g(z)$, die den Bedingungen (1) und (2) genügen, sondern für eine viel größere Menge von Funktionen. Es muß $g(z)$ lediglich im Einheitskreis regulär sein und eine der drei folgenden Bedingungen erfüllen:

(a) $g(z)/z$ hat eine Nullstelle in $|z| < 1$,

(b) $g(z) \neq 0$ in $|z| < 1$, $|g(0)| \leqq 1$,

(c) $g(z)/z \neq 0$ in $|z| < 1$, $g(0) = 0$, $|g'(0)| \leqq 1$.

Für die Klasse (a) ist die beste Schranke offenbar ∞. Für die Klassen (b) und (c) ist sie 1, wie aus den Beispielen $g(z) = 1$ und $g(z) = z$ hervorgeht.

3.

Das falsche Ergebnis in Prof. Wintners Arbeit beruht auf einem Rechenfehler. Die Wurzel (17), S. 111, soll

$$r_0 = \frac{a-(1-a)^{\frac{1}{2}}}{2a^2-1}$$

sein. Nach dieser Berichtigung liefert Prof. Wintners Schlußweise die korrekte beste Schranke 1.

CARL-FRIEDRICH-VON-SIEMENS-SCHULE, BERLIN