MATH. SCAND. 10 (1962), 182–188

EINE BEMERKUNG ÜBER GRUPPEN UNGERADER ORDNUNG

KÄTE FENCHEL

Um einen Beweis für die Auflösbarkeit der Gruppen ungerader Ordnung zu erzwingen, haben sich in letzter Zeit mehrere Autoren mit speziellen Zentralisatoren beschäftigt [2], [3]. Die folgende Note, die allgemein eine anscheinend nicht bekannte Eigenschaft der Zentralisatoren von Gruppen ungerader Ordnung behandelt, ist daher vielleicht nicht ohne Interesse. Es wird gezeigt, dass jedes Element einer Gruppe ungerader Ordnung eine »Partition« der Gruppe bewirkt, und zwar nicht nach Untergruppen, sondern nach gewissen Zentralisatorrestklassen.

Im folgenden werden Gruppen mit grossen gotischen Buchstaben bezeichnet, Gruppenelemente mit kleinen lateinischen Buchstaben; das Einheitselement der Gruppe ist 1; $\mathfrak{Z}_a$ bezeichnet den Zentralisator des Elementes a. Die Klasse konjugierter Elemente, die a enthält, ist (α). Die Ordnung der Gruppe $\mathfrak{G}$ wird i.a. mit $[\mathfrak{G}]$ bezeichnet. Es ist $(a,x)=a^{-1}x^{-1}ax$. Die irreduziblen Charaktere der Gruppe sind χ_α^λ, $\lambda=0,1,\ldots,k-1$, wo k die Anzahl der Klassen konjugierter Elemente bedeutet.

Wir beginnen mit einer Charakterisierung der Gruppen ungerader Ordnung.

Satz 1. *Die Ordnung* $[\mathfrak{G}]$ *einer endlichen Gruppe* $\mathfrak{G}$ *ist dann und nur dann ungerade, wenn für jedes feste* $x \in \mathfrak{G}$ *alle* $h \in \mathfrak{G}$ *eindeutig in der Form*

$$h = axa, \qquad a \in \mathfrak{G},$$

darstellbar sind.

Beweis. 1° $[\mathfrak{G}]$ sei ungerade, $x \in \mathfrak{G}$. Dann ist $a_1xa_1 \neq a_2xa_2$ für $a_1,a_2 \in \mathfrak{G}$, $a_1 \neq a_2$. Aus der Gleichheit würde nämlich folgen, dass

$$x^{-1}a_2{}^{-1}a_1x = a_2a_1{}^{-1} = a_2(a_1{}^{-1}a_2)a_2{}^{-1},$$

also dass $a_2{}^{-1}a_1$ zu seinem inversen Element $a_1{}^{-1}a_2$ konjugiert wäre, was bekanntlich in Gruppen ungerader Ordnung unmöglich ist. Also

Eingegangen am 30. November 1961.

durchläuft axa mit a genau $[\mathfrak{G}]$ verschiedene und damit alle Elemente von $\mathfrak{G}$.

2° axa stelle bei variablem $a \in \mathfrak{G}$ alle Gruppenelemente dar. Da nur $[\mathfrak{G}]$ Elemente a zur Verfügung stehen, muss die Darstellung eindeutig sein. Daraus folgt aber, dass x ungerade Ordnung hat. Sonst hätte man, wenn 2ν die Ordnung von x wäre, in

$$x = 1 \cdot x \cdot 1 = x^\nu \cdot x \cdot x^\nu$$

zwei verschiedene Darstellungen für x, da $x^\nu \neq 1$. Also haben alle Elemente von $\mathfrak{G}$ ungerade Ordnung, $[\mathfrak{G}]$ muss ungerade sein.

Die im folgenden betrachteten Gruppen haben ungerade Ordnung.

Nach Satz 1 können wir nun bei gegebenen $g, x \in \mathfrak{G}$ das Element gx^{-1} in der Form

$$gx^{-1} = ax^{-1}a, \quad a \in \mathfrak{G},$$

darstellen, d.h. zu jedem $x \in \mathfrak{G}$ gibt es bei festem g genau ein a, so dass

(1) $$g = ax^{-1}ax = a \cdot a^x .$$

Die Gleichung (1) hat also für jedes $g \in \mathfrak{G}$ genau $[\mathfrak{G}]$ Lösungspaare a, x.

Da $a \cdot a^x = a \cdot a^y$ dann und nur dann, wenn $y \in \mathfrak{Z}_a x$, bestimmen genau die Elemente von $\mathfrak{Z}_a x$ dasselbe a. Speziell ist $g = q^2 = q \cdot q^z$ genau für $z \in \mathfrak{Z}_g = \mathfrak{Z}_q$; ist $x \notin \mathfrak{Z}_g$, so bestimmen x und x^{-1} verschiedene Elemente. Sind andererseits a, x und b, y zwei Lösungspaare von (1) mit $a \neq b$, so haben die Zentralisatorrestklassen $\mathfrak{Z}_a x$ und $\mathfrak{Z}_b y$ kein Element gemeinsam. Wäre nämlich $y \in \mathfrak{Z}_a x \cap \mathfrak{Z}_b y$, so würde für ein $z_a \in \mathfrak{Z}_a$ folgen

$$a \cdot a^x = ax^{-1}z_a{}^{-1}az_ax = bx^{-1}z_a{}^{-1}bz_ax, \qquad ax^{-1}z_a{}^{-1}a = bx^{-1}z_a{}^{-1}b ,$$

also $a = b$ nach Satz 1. Sämtliche Gruppenelemente verteilen sich in dieser Weise auf elementefremde Restklassen nach gewissen Zentralisatoren. Diese Restklassen überdecken die Gruppe genau einmal, es gilt also

$$[\mathfrak{G}] = \sum [\mathfrak{Z}_a] ,$$

wo rechts über die Ordnungen der auftretenden Restklassen summiert wird. Nach Division mit $[\mathfrak{G}]$ erhält man die Formel

(2) $$1 = \sum{}' 1/h_a ,$$

wo $h_a = h_\alpha$ die Anzahl der Elemente in der durch a bestimmten Klasse konjugierter Elemente (α) ist und a die durch (1) bestimmten Elemente durchläuft.

Aus der Gleichung (1) folgt, dass das Element g, also auch die Klasse konjugierter Elemente (γ), die g enthält, in dem Quadrat der Klasse (α), die a enthält, vorkommt. Es seien $h_{\alpha\beta\gamma}$ die Multiplikationskonstanten der Klassenmultiplikation von $\mathfrak{G}$, also

$$(\alpha)(\beta) = \sum_{\varrho} h_{\alpha\beta\varrho}(\varrho) .$$

Bei gegebenen α, g gibt es also $h_{\alpha\alpha\gamma}$ Elemente $a \in (\alpha)$, für die (1) lösbar ist; in (2) kommt eine feste Klasse (α) gerade $h_{\alpha\alpha\gamma}$-mal vor, d.h. es ist

$$\sum_{a}{}' 1/h_a = \sum_{\alpha} h_{\alpha\alpha\gamma}/h_\alpha ,$$

wo auf der rechten Seite jetzt über alle Klassen summiert wird ($h_{\alpha\alpha\gamma} = 0$, wenn (α) nicht auftritt). Aus (2) erhalten wir

$$\sum_{\alpha} h_{\alpha\alpha\gamma}/h_\alpha = 1 , \tag{3}$$

eine Formel, die auch aus den Relationen für die irreduziblen Gruppencharaktere χ_α^λ abgeleitet werden kann. Denn bekanntlich ist, wenn n hier die Gruppenordnung und f_λ den Grad von χ^λ bezeichnet,

$$h_{\alpha\alpha\gamma} = \frac{h_\alpha{}^2}{n} \sum_{\lambda} \frac{(\chi_\alpha^\lambda)^2 \overline{\chi}_\gamma^\lambda}{f_\lambda},$$

also

$$\sum_{\alpha} \frac{h_{\alpha\alpha\gamma}}{h_\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{\lambda} \frac{\overline{\chi}_\gamma^\lambda}{f_\lambda} \sum_{\alpha} h_\alpha (\chi_\alpha^\lambda)^2 .$$

Da alle vom Hauptcharakter verschiedenen Charaktere einer Gruppe ungerader Ordnung komplex sind, ist $\sum_\alpha h_\alpha (\chi_\alpha^\lambda)^2 \neq 0$ nur für den Hauptcharakter, und wir erhalten die Formel (3).

Es hat sich also ergeben, dass jede Klasse (γ) derart in Quadraten gewisser Klassen enthalten ist, dass unabhängig von (γ) die Relation (3) gilt, was vielleicht als Verallgemeinerung der Tatsache angesehen werden kann, dass nur in einer Gruppe ungerader Ordnung jedes Element eine eindeutige Quadratwurzel hat. Für Gruppen gerader Ordnung ist jedenfalls immer $\sum_\alpha h_{\alpha\alpha 0}/h_\alpha \neq 1$, wenn (0) die Klasse des Einheitselementes bezeichnet, da es immer selbst-inverse Klassen gibt. Für die symmetrische Gruppe in drei Variablen z. B. nimmt $\sum_\alpha h_{\alpha\alpha\gamma}/h_\alpha$ für die drei Klassen konjugierter Elemente drei verschiedene Werte an, von denen der eine übrigens nicht ganzzahlig ist.

Aus (3) folgt unmittelbar, dass ein invariantes Element i in dem Quadrat einer einzigen Klasse auftritt. Denn jedenfalls ist j mit $j^2 = i$ eine Lösung von (1), und es ist $h_j = 1$. Dann muss in (3) aber $h_{jji} = 1$ und alle übrigen $h_{\alpha\alpha i} = 0$ sein.

Wir fassen das Resultat in dem folgenden Satz zusammen.

Satz 2. *In einer Gruppe $\mathfrak{G}$ ungerader Ordnung bestimmt jedes Element* *g ein System von Restklassen modulo den Zentralisatoren gewisser (von g abhängender) Elemente. Diese Restklassen, unter denen genau eine Gruppe, nämlich* $\mathfrak{Z}_g$, *vorkommt, überdecken* $\mathfrak{G}$ *genau einmal. Mit einer Restklasse* $\mathfrak{Z}_a x$ *kommt auch eine Restklasse* $\mathfrak{Z}_b x^{-1}$, *wobei* $b \neq a$ *ist, vor. Die Anzahl der auftretenden Restklassen*

$$\sigma = \sum_{\alpha} h_{\alpha\alpha\gamma}$$

ist eine ungerade Zahl, da sowohl $[\mathfrak{G}]$ *als auch alle* $[\mathfrak{Z}_a]$ *ungerade sind, und nach* (3) *ist*

$$\min h_{\alpha} \leqq \sigma \leqq \max h_{\alpha} ,$$

wo α *die Indices durchläuft, für die* $h_{\alpha\alpha\gamma} \neq 0$.

Wir schreiben im folgenden symbolisch (nach Umbenennung der Restklassenrepräsentanten)

$$\mathfrak{G}_g = \mathfrak{Z}_g + \mathfrak{Z}_a x_a + \ldots + \mathfrak{Z}_s x_s \tag{4}$$

und sprechen von der Überdeckung von $\mathfrak{G}$ in bezug auf g. Zu einem invarianten Element i gehört also die triviale Überdeckung $\mathfrak{G}_i = \mathfrak{G}$.

Setzen wir $g = q^2$, $a = qr^{-1}$, also $a^{-1}g = rq = rar$ in (1), so ergibt sich

$$rq = rar = x^{-1}ax = x^{-1}qr^{-1}x . \tag{5}$$

Also ist $qr = r^{-1}x^{-1}qr^{-1}xr$ zu qr^{-1} konjugiert. Aus Satz 1 folgt dann, dass es zu jedem $q \neq 1$, $q^2 = g \in (\gamma)$, genau $\sum_{\alpha} h_{\alpha\alpha\gamma}$ Elemente r derart gibt, dass qr zu qr^{-1} konjugiert ist. Mit $x = y^{-1}r^{-1}$ ergibt (5)

$$ryr = q^{-1}yq . \tag{6}$$

Die vollständige Lösung von (6) in r und y liefert sämtliche Lösungspaare a, x von (1). Speziell folgt, da für $r \neq 1$ mit dem Paar r, y auch das Paar r^{-1}, y^{-1} der Gleichung (6) genügt, dass mit $a = qr^{-1}$ auch $a' = qr = (xr)^{-1}qr^{-1}(xr)$ ein durch (1) bestimmtes Element ist. Die von q verschiedenen Lösungen von (1), also auch die Zentralisatorrestklassen in der Überdeckung von $\mathfrak{G}$ treten also in konjugierten Paaren auf. Es ist

$$r^2 = a^{-1}a' = rq^{-1} \cdot r^{-1}x^{-1} \cdot qr^{-1} \cdot xr = (qr^{-1}, xr)$$

ein Kommutator. Dann ist aber r selbst Kommutator. Denn bekanntlich ist $\sum_{\lambda} \chi_{\varrho}^{\lambda}/f_{\lambda} \neq 0$ eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Klasse (ϱ) aus Kommutatoren besteht [1, p. 319]. Wir haben also

$$\sum_{\lambda} \chi_{r^2}^{\lambda}/f_{\lambda} \neq 0 . \tag{7}$$

Jedes $\chi_{r^2}^{\lambda}$ ist eine Summe von Einheitswurzeln ungerader Ordnung;

(7) bleibt also richtig, wenn wir diese Einheitswurzeln durch Potenzen ersetzen, deren Exponent zu der Ordnung $2\nu+1$ von r relativ prim ist. Es ist aber $r=(r^2)^{\nu+1}$ und $(\nu+1, 2\nu+1)=1$. Also ist auch $\sum_\lambda \chi_r^\lambda/f_\lambda \neq 0$ und r ist Kommutator.

Gehört g zu den Klassenquadraten $(\alpha)^2, \ldots$, so enthalten sowohl die Klassenprodukte $(\alpha)(\alpha')$, wo (α') die zu (α) inverse Klasse bezeichnet, als auch die Quadrate der Klassen, zu denen die (a^{-1}, x) gehören, sämtliche mit g^{-1} gebildeten Kommutatoren (g^{-1}, x), $x \in \mathfrak{G}$.

Zum Beweise betrachten wir die Kommutatoren $(g^{-1}, z_a x_a)$, wobei $z_a x_a \in \mathfrak{Z}_a x_a$, einer beliebigen in (4) auftretenden Restklasse, also nach (1) $g = a x_a^{-1} a x_a$ ist. Dann wird

$$
\begin{aligned}
(g^{-1}, z_a x_a) &= a x_a^{-1} a x_a \cdot x_a^{-1} z_a^{-1} \cdot x_a^{-1} a^{-1} x_a a^{-1} \cdot z_a x_a \\
&= a \cdot x_a^{-1} a z_a^{-1} x_a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot x_a z_a a^{-1} x_a \qquad (8) \\
&= a x_a^{-1} a^{-1} x_a \cdot x_a^{-1} a z_a^{-1} \cdot a x_a^{-1} a^{-1} x_a \cdot z_a a^{-1} x_a \\
&= (a^{-1}, x_a) \cdot x_a^{-1} a z_a^{-1} \cdot (a^{-1}, x_a) \cdot z_a a^{-1} x_a \,. \qquad (8')
\end{aligned}
$$

Da $(g^{-1}, z_g) = 1$ für $z_g \in \mathfrak{Z}_g$, folgt die Behauptung aus (8), (8′) und der Überdeckungseigenschaft der $\mathfrak{Z}_a x_a$.

Jede Restklasse $\mathfrak{Z}_a x_a$ eines beliebigen Zentralisators tritt in einer Überdeckung $\mathfrak{G}_g$ auf, wo

$$g = a x_a^{-1} a x_a \,.$$

Ist (4) eine Überdeckung durch rechte Restklassen, so ist

$$\overline{\mathfrak{G}}_{g^{-1}} = \mathfrak{Z}_g + x_a^{-1}\mathfrak{Z}_a + \ldots + x_s^{-1}\mathfrak{Z}_s$$

eine Überdeckung durch linke Restklassen, die zu g^{-1} gehört. Denn aus $g = a x_a^{-1} a x_a$ folgt $g^{-1} = x_a^{-1} a^{-1} x_a \cdot x_a \cdot x_a^{-1} a^{-1} x_a \cdot x_a^{-1}$, also eine Überdeckung durch die Restklassen $\mathfrak{Z}_{x_a^{-1} a x_a} \cdot x_a^{-1} = x_a^{-1} \mathfrak{Z}_a$.

Satz 3. *Es sei* $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ *eine Untergruppe,* $g \in \mathfrak{G}$ *und* (4) *die Überdeckung von* $\mathfrak{G}$ *in bezug auf* g. *Dann kann* $\mathfrak{H}$ *durch Zentralisatorrestklassen* $(\mathfrak{Z}_a \cap \mathfrak{H}) x_a$ *überdeckt werden. Ist* $g \in \mathfrak{H}$, *so stimmt diese Überdeckung mit* $\mathfrak{H}_g$ *überein.*

Beweis. Aus (4) folgt

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{G}_g \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{Z}_g \cap \mathfrak{H} + \mathfrak{Z}_a x_a \cap \mathfrak{H} + \ldots + \mathfrak{Z}_s x_s \cap \mathfrak{H} \,. \tag{9}$$

Ist $\mathfrak{Z}_a x_a \cap \mathfrak{H} \neq \emptyset$, so kann $x_a \in \mathfrak{H}$ angenommen werden. Die Bezeichnungen in (9) seien so gewählt, dass das schon erfüllt ist. Dann ist für $z_a \in \mathfrak{Z}_a$ die Bedingung $z_a x_a \in \mathfrak{H}$ äquivalent mit $z_a \in \mathfrak{H}$, also $\mathfrak{Z}_a x_a \cap \mathfrak{H} = (\mathfrak{Z}_a \cap \mathfrak{H}) x_a$, und es ergibt sich

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{Z}_g \cap \mathfrak{H} + (\mathfrak{Z}_a \cap \mathfrak{H}) x_a + \ldots + (\mathfrak{Z}_l \cap \mathfrak{H}) x_l \,, \tag{10}$$

wo die Numerierung in (9) so gewählt sei, dass gerade die Durchschnitte

$$\mathfrak{Z}_a x_a \cap \mathfrak{H}, \ldots, \mathfrak{Z}_l x_l \cap \mathfrak{H}$$

nicht leer sind. Die $\mathfrak{Z}_a \cap \mathfrak{H}, \ldots, \mathfrak{Z}_l \cap \mathfrak{H}$ sind Zentralisatoren in $\mathfrak{H}$ von Elementen, die (für $g \notin \mathfrak{H}$) nicht in $\mathfrak{H}$ zu liegen brauchen. Ist $g \in \mathfrak{H}$, so sind wegen der Annahme $x_a, \ldots, x_l \in \mathfrak{H}$ die Gleichungen

$$g x_a^{-1} = a x_a^{-1} a, \ldots, g x_l^{-1} = l x_l^{-1} l$$

in $\mathfrak{H}$ lösbar, also $a, \ldots, l \in \mathfrak{H}$. Die Elemente a und $x_a^{-1} a x_a$ liegen in $\mathfrak{H}$ in derselben Klasse $(\alpha)_{\mathfrak{H}}$, also g im Klassenquadrat $(\alpha)_{\mathfrak{H}}^2$. Der Zentralisator von a in $\mathfrak{H}$ ist $\mathfrak{Z}_a \cap \mathfrak{H}$, also (10) die Überdeckung $\mathfrak{H}_g$ von $\mathfrak{H}$ in bezug auf g.

Die Abbildung $\varphi_x(a) = a x^{-1} a x = a^{1+x}$ ist eine eineindeutige Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf sich, die nur den Fixpunkt $a = 1$ besitzt. Sie bildet i.a. Untergruppen $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ nicht auf Untergruppen ab. Jedoch bildet φ_x die ganze Restklasse $\mathfrak{H}x$ wieder auf eine ganze Restklasse, nämlich auf $\mathfrak{H}x^2$, ab; denn für $h \in \mathfrak{H}$ ist

$$\varphi_x(hx) = h^2 x^2 \in \mathfrak{H}x^2 ,$$

und h^2 durchläuft mit h die Gruppe $\mathfrak{H}$. Allgemeiner gilt:

Die Abbildung φ_x bildet dann und nur dann eine Restklasse $\mathfrak{H}y$ wieder auf eine Restklasse, und zwar auf $\mathfrak{H}\varphi_x(y)$ ab, wenn $yx^{-1} \in \mathfrak{N}(\mathfrak{H})$, wo $\mathfrak{N}(\mathfrak{H})$ der Normalisator von $\mathfrak{H}$ ist.

Beweis. Es sei $yx^{-1} \in \mathfrak{N}(\mathfrak{H})$, $h \in \mathfrak{H}$. Dann wird

$$\varphi_x(hy) = hyx^{-1}hyx = hh'yx^{-1}yx = hh'\varphi_x(y) \in \mathfrak{H}\varphi_x(y) ,$$

wobei $h' \in \mathfrak{H}$. Da φ_x eineindeutig ist, durchläuft hh' mit h die Gruppe $\mathfrak{H}$.

Ist andererseits

$$\varphi_x(hy) = h_1 z, \qquad h, h_1 \in \mathfrak{H} ,$$

also speziell für $h = 1$

$$\varphi_x(y) = yx^{-1}yx = h_2 z, \qquad h_2 \in \mathfrak{H} ,$$

so folgt

$$\varphi_x(hy) = hyx^{-1}hyx = h_1 h_2^{-1} yx^{-1}yx ,$$

$yx^{-1}h \cdot (yx^{-1})^{-1} = h^{-1}h_1 h_2^{-1} \in \mathfrak{H}$ für alle $h \in \mathfrak{H}$, also $yx^{-1} \in \mathfrak{N}(\mathfrak{H})$.

Eine invariante Untergruppe $\mathfrak{H}$ wird durch φ_x auf sich abgebildet. Da dann $yx^{-1} \in \mathfrak{N}(\mathfrak{H})$ für alle $y \in \mathfrak{G}$, werden auch alle Restklassen wieder auf Restklassen abgebildet. Also bestimmt φ_x eine eineindeutige Abbildung der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ auf sich, die nur das Einheitselement dieser Gruppe fest lässt.

Auf grund der Eineindeutigkeit von φ_x liegen daher auch alle den Elementen h einer invarianten Untergruppe $\mathfrak{H}$ durch (1) zugeordneten Elemente a in $\mathfrak{H}$. Und umgekehrt ist $\mathfrak{H}$ invariant, wenn für alle $g \in \mathfrak{H}$, $x \in \mathfrak{G}$ sämtliche durch (1) bestimmten Elemente $a, \ldots, s$ in $\mathfrak{H}$ liegen.

LITERATUR

1. W. Burnside, *Theory of groups*, 2nd ed., Cambridge, 1911.
2. Walter Feit, Marshall Hall jr. and John G. Thompson, *Finite groups in which the centralizer of any non-identity element is nilpotent*, Math. Z. 74 (1960), 145–150.
3. Michio Suzuki, *The nonexistence of a certain type of simple groups of odd order*, Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), 680–695.

SØNDERENGEN 110, SØBORG, DÄNEMARK