MATH. SCAND. 6 (1958), 263–272

SUR UNE CERTAINE CLASSE D'ÉQUATIONS INTÉGRALES SINGULIÈRES

V. STENSTRÖM

Il y a plusieurs dizaines d'années que I. Fredholm m'a communiqué oralement la remarque que l'équation intégrale

$$(*) \qquad \varphi(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\alpha y)\, \varphi(y)\, dy, \qquad \alpha \text{ un constant },$$

a des solutions en formes de polynomes pour des valeurs de λ qui ne sont pas des zéros du déterminant $D(\lambda)$ de l'équation. (On peut évidemment mettre sous la même forme que (*) les équations

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\alpha y)\, e^{\beta y}\, \varphi(y)\, dy \qquad \text{et} \qquad \varphi(x) = \lambda \int_{0}^{\infty} f(xy^{\alpha})\, \varphi(y)\, dy.)$$

J'ai fait en ce temps-là quelques calculs dont une partie seulement, plus formelle et, en général, restreinte au domaine réel du paramètre α, est exposée ci-dessous.[1]

Ayant alors laissé le sujet je l'ai repris, il y a peu de temps, pour chercher à achever quelques études sur les questions d'unicité des solutions et sur le développement du noyau suivant les solutions de l'équation et de l'équation transposée.

Cependant comme il m'est arrivé de trouver récemment dans *Mathematical Reviews* (Vol. 17 (1956), p. 376) le compte rendu d'un article de M. J. Steinberg [2], j'ai voulu publier les calculs ci-dessous pour revenir au sujet, comme je l'espère, dans un article ultérieur.

1. Nous supposons que les intégrales

$$A_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, t^n\, dt$$

---

[1]) La rédaction m'a fait remarquer qu'une généralisation systématique de la théorie de Fredholm pour certaines équations singulières se trouve dans A. Grothendieck [1].

convergent et, pour simplifier les formules, que $A_0=1$ (en excluant donc les cas $A_0=0$). Il existe alors des polynomes qui sont des solutions des équations intégrales

$$\text{(A)} \qquad \varphi(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\alpha y)\, \varphi(y)\, dy \,,$$

$$\text{(B)} \qquad \psi(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(y-\alpha x)\, \psi(y)\, dy \quad \left(= \lambda \int_{-\infty}^{\infty} f\left(-\alpha(x-y\alpha^{-1})\right) \psi(y)\, dy \right).$$

On le constate immédiatement en substituant dans les équations (A), (B) respectivement

$$\varphi(x) = P_n(x) \equiv \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a_\nu x^{n-\nu}, \qquad a_0 \neq 0\,,$$

$$\psi(x) = Q_n(x) \equiv \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} b_\nu x^{n-\nu}, \qquad b_0 \neq 0\,.$$

On obtient les formules de récurrence suivantes:

$$a_0\left(1-\frac{\lambda}{|\alpha|\alpha^n}\right) = 0, \qquad \frac{a_\mu}{\mu!} = \frac{\lambda}{|\alpha|\alpha^n} \sum_{\varkappa+\nu=\mu} \frac{(-1)^\varkappa A_\varkappa}{\varkappa!}\, \frac{\alpha^\nu a_\nu}{\nu!}$$

$$b_0(1-\alpha^n\lambda) = 0, \qquad \frac{\alpha^\mu b_\mu}{\mu!} = \alpha^n\lambda \sum_{\varkappa+\nu=\mu} \frac{A_\varkappa}{\varkappa!}\, \frac{b_\nu}{\nu!},$$

ou

$$\text{(1a)} \qquad \lambda = |\alpha|\alpha^n, \qquad \frac{a_\mu}{\mu!} = \sum_{\varkappa+\nu=\mu} \frac{(-1)^\varkappa A_\varkappa}{\varkappa!}\, \frac{\alpha^\nu a_\nu}{\nu!}, \qquad \mu = 0, 1, 2, \ldots, n\,,$$

$$\text{(1b)} \qquad \lambda = \alpha^{-n}, \qquad \frac{\alpha^\mu b_\mu}{\mu!} = \sum_{\varkappa+\nu=\mu} \frac{A_\varkappa}{\varkappa!}\, \frac{b_\nu}{\nu!}, \qquad \mu = 0, 1, 2, \ldots, n\,.$$

Nous posons $a_0=b_0=1$.

A condition que $\alpha^\mu \neq 1$ ($\mu=1, 2, \ldots, n$), on peut déterminer les coefficients des polynomes $P_n(x)$, $Q_n(x)$ qui sont alors des solutions pour respectivement les valeurs $\lambda=|\alpha|\alpha^n$ et $\lambda=\alpha^{-n}$. Nous allons montrer que ces valeurs de λ ne sont des zéros du déterminant que pour $|\alpha|>1$ et $|\alpha|<1$ respectivement. (Pour les autres valeurs propres, $\lambda=|\alpha|\alpha^n$, $|\alpha|<1$ et $\lambda=\alpha^{-n}$, $|\alpha|>1$, $\lambda=0$ est un point limite.)

Le déterminant $D(\lambda)$ des équations (A), (B) se calcule facilement à l'aide des traces

$$a_n = \int\int \ldots \int f(s_1-\alpha s_2)\, f(s_2-\alpha s_3)\, \ldots\, f(s_n-\alpha s_1)\, ds_1 ds_2 \ldots ds_n =$$

$$= \frac{A_0{}^n}{|1-\alpha^n|} = \frac{1}{|1-\alpha^n|},$$

d'où

$$-\log D(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^n \alpha^{nm}}{n} = -\sum_{m=0}^{\infty} \log(1-\alpha^m \lambda) \qquad \text{pour} \quad |\alpha| < 1,$$

et

$$-\log D(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{|\alpha|^n n\, \alpha^{nm}} = -\sum_{m=0}^{\infty} \log\left(1-\frac{\lambda}{|\alpha|\, \alpha^m}\right) \qquad \text{pour} \quad |\alpha| > 1.$$

Donc

$$D(\lambda) = \prod_{m=0}^{\infty} (1-\alpha^m \lambda), \qquad |\alpha| < 1, \tag{2a}$$

$$D(\lambda) = \prod_{m=0}^{\infty} \left(1-\frac{\lambda}{|\alpha|\alpha^m}\right), \qquad |\alpha| > 1, \tag{2b}$$

ou

$$D(\lambda) = 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\alpha^n \prod_{\nu=1}^{n} (1-\alpha^{-\nu})}, \qquad |\alpha| < 1, \tag{3a}$$

$$D(\lambda) = 1+\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{|\alpha|}\right) \frac{\lambda^n}{\prod_{\nu=1}^{n} (1-\alpha^{\nu})}, \qquad |\alpha| > 1. \tag{3b}$$

Ces déterminants sont des fonctions entières de λ. Comme fonctions de α elles ont évidemment le cercle d'unité comme coupure naturelle, ce qui n'est pas le cas pour les polynomes regardés comme fonctions de α (ayant un nombre fini de pôles).

Remarque. On a

$$\frac{1}{D(\lambda)} = 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\prod_{\nu=1}^{n} (1-\alpha^{\nu})}, \qquad |\alpha| < 1.$$

En multipliant cette série et la série (3a) on obtient les identités suivantes:

$$\sum_{\nu+\mu=n} \frac{(-1)^{\nu} \alpha^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}}{\prod_{k=1}^{\mu} (1-\alpha^k) \prod_{k=1}^{\nu} (1-\alpha^k)} \equiv 0, \qquad |\alpha| \gtrless 1,$$

où l'on pose $\Pi_{k=1}^{0}(1-\alpha^k)=1$.

2. Les noyaux itérés. Nous formons les Fouriertransformés des noyaux itérés,

$$f_n(x, y) = \int\int \ldots \int f(x-\alpha s_1) f(s_1-\alpha s_2) \ldots f(s_n-\alpha y)\, ds_1 ds_2 \ldots ds_n ,$$

$(f_1(x, y) = f(x-\alpha y))$. Mettons, pour abréger,

$$g(x) = \int e^{ixt} f(t)\, dt .$$

On a

$$\int e^{itx} f_n(t, y)\, dt = e^{i\alpha^n xy} \prod_{\nu=0}^{n-1} g(\alpha^\nu x) ,$$

d'où

$$f_n(x, y) = f_n(x-\alpha^n y) = \frac{1}{2\pi}\int e^{-i(x-\alpha^n y)t} \left\{\prod_{\nu=0}^{n-1} g(\alpha^\nu t)\right\} dt .$$

On peut faire différentes hypothèses sur la fonction $f(t)$ afin que le produit

$$G(x;\alpha) \equiv \prod_{\nu=0}^{\infty} g(\alpha^\nu x), \qquad |\alpha| < 1 , \tag{4}$$

converge. Si, par exemple, on a

$$\int |f(t)|\, dt < \infty, \quad \int t|f(t)|\, dt < \infty, \quad \int |f'(t)|\, dt < \infty, \quad \lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$$

le produit (4) est absolument et uniformément convergent et on a

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^n G(x;\alpha) = 0$$

pour n (>0) arbitraire. On obtient alors

$$f_n(x-\alpha^n y) = \frac{1}{2\pi}\int e^{-i(x-\alpha^n y)t} \frac{G(t;\alpha)}{G(\alpha^n t;\alpha)}\, dt, \qquad |\alpha| < 1 . \tag{5}$$

On a $G(0;\alpha) = 1$ d'où on présume que la fonction

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int e^{-ixt}\, G(t;\alpha)\, dt \tag{6}$$

est une solution de l'équation (A) pour $\lambda = 1$ et les dérivées

$$\varphi^n(x) = \frac{(-i)^n}{2\pi}\int e^{-ixt}\, t^n\, G(t;\alpha)\, dt \tag{6'}$$

des solutions pour $\lambda = \alpha^{-n}$, $|\alpha| < 1$, ce qui se vérifie facilement.

En écrivant les noyaux itérés sous la forme

$$f_n(x-\alpha^n y) = \frac{1}{2\pi|\alpha|^n}\int e^{-it(y-x\alpha^{-n})} \prod_{\nu=1}^{n} g(-t\alpha^{-\nu})\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi|\alpha|^n}\int e^{-it(y-x\alpha^{-n})} \frac{G(-t\alpha^{-1};\alpha^{-1})}{G(-t\alpha^{-(n+1)};\alpha^{-1})}\,dt, \qquad |\alpha| > 1\,,$$

on voit que les fonctions

$$\psi^{(n)}(y) = \frac{(-1)^n}{2\pi}\int e^{-ity}\, t^n\, G(-t\alpha^{-1};\alpha^{-1})\,dt, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

sont des solutions de l'équation (B) pour $\lambda = |\alpha|\alpha^n$, $|\alpha| > 1$.

3. Fonctions génératrices des polynomes $P_n(x)$, $Q_n(x)$. Par le fait que les formules de récurrence (1a), (1b) sont indépendantes du degré n des polynomes on est amené à chercher des fonctions génératrices. En posant formellement

$$H(x;\alpha) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu!}(ix)^\nu$$

$$\int e^{-ixt} f(t)\,dt = \sum (-1)^\mu A_\mu (ix)^\mu$$

on peut résumer les formules (1a) dans la formule

$$H(x;\alpha) = \left\{\int e^{-ixt} f(t)\,dt\right\} H(\alpha x;\alpha)\,,$$

d'où il suit que

$$H(x;\alpha) = G(-x;\alpha), \qquad |\alpha| < 1\,,$$

et que

$$G(-x;\alpha)\,e^{ixt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(t)}{n!}(ix)^n\,. \tag{8a}$$

On a aussi

$$H(x;\alpha^{-1}) = \frac{1}{G(-x\alpha^{-1};\alpha^{-1})}, \qquad |\alpha| > 1\,,$$

d'où

$$\frac{e^{ixt}}{G(-x\alpha^{-1};\alpha^{-1})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(t)}{n!}(ix)^n\,. \tag{8'a}$$

De la même façon on obtient

$$\frac{e^{ixt}}{G(x;\alpha)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n(t)}{n!}(ix)^n, \qquad |\alpha| < 1\,, \tag{9b}$$

$$G(x\alpha^{-1};\alpha^{-1})\,e^{ixt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n(t)}{n!}(ix)^n, \qquad |\alpha| > 1\,. \tag{9'b}$$

Des formules (8a) et (9b) (ou (8'a) et (9'b)) on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{P_n(t)(ix)^n}{n!} \frac{Q_m(t)(-ix)^m}{m!} \equiv 1, \qquad |\alpha| \gtrless 1 .$$

d'où

$$\sum_{n+m=N} (-1)^m \frac{P_n(t)}{n!} \frac{Q_m(t)}{m!} = \begin{cases} 1, & N = 0 \\ 0, & N > 0 \end{cases}.$$

Remarque 1. Supposons $|f(t)| < e^{-k|t|^{\omega}}$, $\omega > 1$. La fonction $G(x;\alpha)$ est alors holomorphe et bornée dans une bande arbitraire contenant l'axe réel. Si l'on a de plus

$$\int |f'(t)|\, e^{ct}\, dt < \infty$$

(ou, plus particulièrement, si $f(t)$ est holomorphe le long de l'axe réel), il suit que

$$\lim_{y \to \pm\infty} (x+iy)^m G(x+iy;\alpha) = 0$$

pour $|y| < c$ et m arbitraire. Les polynomes P_n, Q_n peuvent alors se mettre sous la forme

$$\text{(10a)} \qquad \frac{P_n(x)}{n!} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\gamma} \frac{G(-iz;\alpha) e^{izx}}{(iz)^{n+1}} dz, & |\alpha| < 1, \\ \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\gamma} \frac{e^{izx}}{G(-z\alpha^{-1};\alpha^{-1})(iz)^{n+1}} dz, & |\alpha| > 1, \end{cases}$$

$$\text{(10b)} \qquad \frac{Q_n(x)}{n!} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\gamma} \frac{e^{izx} G(z\alpha^{-1};\alpha^{-1})}{(iz)^{n+1}} dz, & |\alpha| > 1, \\ \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\gamma} \frac{e^{izx}}{G(z;\alpha)(iz)^{n+1}} dz, & |\alpha| < 1, \end{cases}$$

où γ est un cercle entourant l'origine $z = 0$.

Remarque 2. On voit (p. ex. en differentiant les membres des formules (10a), (10b) par rapport à x qu'on a

$$\frac{P_n'(x)}{n!} = \frac{P_{n-1}(x)}{n-1!} \quad \text{et} \quad \frac{Q_n'(x)}{n!} = \frac{Q_{n-1}(x)}{(n-1)!}$$

(polynomes d'Appell).

Remarque 3. Les suites

$$\begin{Bmatrix} \varphi^{(n)} \\ Q_n \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} \psi^{(n)} \\ P_n \end{Bmatrix}$$

sont des suites biorthogonales, ce qui se démontre selon une méthode bien connue. En particulier on a

$$\int \varphi^{(n)}(x)\, Q_n(x)\, dx = (-1)^n \int \varphi(x)\, dx = (-1)^n G(0;\alpha) = (-1)^n;$$

$$\int \psi^{(n)}(x)\, P_n(x)\, dx = (-1)^n \int \psi(x)\, dx = (-1)^n G(0;\alpha^{-1}) = (-1)^n.$$

4. Solutions obtenues par intégrations et différentiations des fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$. En vertu de la structure du noyau on obtient des fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$ les solutions nouvelles $\varphi^{(n)}(x)$, $\psi^{(n)}(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$. On peut s'attendre à ce que les intégrales

$$\varphi_{1,k}(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(s) \frac{(x-s)^k}{k!}\, ds, \qquad k! = \Gamma(k+1), \quad |\alpha| < 1 \tag{11}$$

$$\varphi_{2,k}(x) = \int_{x}^{\infty} \varphi(s) \frac{(s-x)^k}{k!}\, ds \tag{11'}$$

(où $\varphi(x)$ est la solution (6) de l'équation (A)) donnent aussi des solutions. On a

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x-\alpha y)\, dy \int_{y}^{\infty} \varphi(s) \frac{(s-y)^k}{k!}\, ds &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s)\, ds \int_{-\infty}^{s} f(x-\alpha y) \frac{(s-y)^k}{k!}\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s)\, ds \int_{0}^{\infty} f(x+\alpha t-\alpha s) \frac{t^k}{k!}\, dt \\
&= \int_{0}^{\infty} \varphi(x+\alpha t) \frac{t^k}{k!}\, dt \\
&= \begin{cases} \alpha^{-k+1}\varphi_{2,k}(x), & 0 < \alpha < 1, \\ \alpha^{-k+1}\varphi_{1,k}(x), & -1 < \alpha < 0, \end{cases}
\end{aligned}$$

donc

$$|\alpha|^{k+1} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\alpha y)\, \varphi_{2,k}(y)\, dy = \begin{cases} \varphi_{2,k}(x), & 0 < \alpha < 1, \\ \varphi_{1,k}(x), & -1 < \alpha < 0. \end{cases} \tag{12a}$$

De la même façon on obtient les relations

$$|\alpha|^{k+1} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\alpha y)\, \varphi_{1,k}(y)\, dy = \begin{cases} \varphi_{1,k}(x), & 0 < \alpha < 1, \\ \varphi_{2,k}(x), & -1 < \alpha < 0. \end{cases} \tag{12'a}$$

Pour $k=2m$, m un entier positif, il en suit

$$\varphi_{1,2m}+\varphi_{2,2m} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s)\frac{(x-s)^{2m}}{2m!}\,ds = \frac{P_{2m}}{2m!},\quad \left(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(s)\,ds = 1\right), \tag{13a}$$

et pour $k=2m+1$

$$\varphi_{1,k}-\varphi_{2,k} = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(s)\frac{(x-s)^{2m+1}}{2m+1!}\,ds = \frac{P_{2m+1}(x)}{2m+1!}. \tag{13'a}$$

On retrouve ainsi les polynomes $P_n(x)$ (pour $|\alpha|<1$). L'équation (A) a donc les solutions φ_1, φ_2, $\varphi_1 \pm \varphi_2$ pour $\lambda = \pm|\alpha|^{k+1}$. Si l'on part de la solution $\psi(x)$ de l'équation (B) on obtient les résultats analogues suivants:

$$|\alpha|^{-k}\int_{-\infty}^{\infty} f(y-\alpha x)\,\psi_{1,k}(y)\,dy = \begin{cases}\psi_{1,k}(x), & 1<\alpha,\\ \psi_{2,k}(x), & \alpha<-1,\end{cases} \tag{12b}$$

$$|\alpha|^{-k}\int_{-\infty}^{\infty} f(y-\alpha x)\,\psi_{2,k}(y)\,dy = \begin{cases}\psi_{2,k}(x), & 1<\alpha,\\ \psi_{1,k}(x), & \alpha<-1,\end{cases} \tag{12'b}$$

où

$$\psi_{1,k} = \int_{-\infty}^{x}\psi(s)\frac{(x-s)^k}{k!}\,ds,\qquad \psi_{2,k} = \int_{x}^{\infty}\psi(s)\frac{s(s-x)^k}{k!}\,ds.$$

Nous avons de même

$$\psi_{1,2m}+\psi_{2,2m} = \frac{Q_{2m}(x)}{2m!}, \tag{13b}$$

$$\psi_{1,2m+1}-\psi_{2,2m+1} = \frac{Q_{2m+1}(x)}{2m+1!}, \tag{13'b}$$

(m entier).

Remarque. On peut obtenir les formes (13a), (13'a), (13b), (13'b) des polynomes $P_n(x)$, $Q_n(x)$ au moyen des formules (10a), (10b). On a p. ex.

$$\begin{aligned}\frac{P_n(x)}{n!} &= \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma}\frac{G(-iz;\alpha)\,e^{izx}}{(iz)^{n+1}}\,dz\\ &= \int_{\gamma}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)\,e^{iz(x-t)}\,dt\,dz}{(iz)^{n+1}}\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt.\end{aligned}$$

Nous posons ensuite

$$\varphi_1^{(k)}(x) = \int_0^\infty t^k e^{-itx} G(t;\alpha)\,dt, \qquad \varphi_2^{(k)}(x) = \int_{-\infty}^0 (-t)^k e^{-itx} G(t;\alpha)\,dt,$$

$$|\alpha| < 1, \quad k > -1,$$

et

$$\psi_1^{(k)}(x) = \int_0^\infty t^k e^{-itx} G(-t\alpha^{-1};\alpha^{-1})\,dt, \qquad \psi_2^{(k)}(x) = \int_{-\infty}^0 (-t)^k e^{-itx} G(-t\alpha^{-1};\alpha^{-1})\,dt,$$

$$|\alpha| > 1, \quad k > -1,$$

et nous obtenons les relations suivantes:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x-\alpha y)\,dy \int_0^\infty t^k e^{-ity} G(t;\alpha)\,dt = \alpha^{-1} t^k e^{-itx\alpha^{-1}} G(t;\alpha)\,dt \int_{-\infty}^\infty f(s)\,e^{its\alpha^{-1}}\,ds$$

$$= t\alpha^{-1} \int_0^\infty t^k e^{-itx\alpha^{-1}} G(t\alpha^{-1};\alpha)\,dt$$

$$= \alpha^k \int_0^\infty t^k e^{-itx} G(t;\alpha)\,dt$$

pour $0<\alpha<1$, c'est-à-dire

$$\varphi_1^{(k)}(x) = \alpha^{-k} \int_{-\infty}^\infty f(x-\alpha y)\,\varphi_1^{(k)}(y)\,dy, \qquad 0 < \alpha < 1,$$

et, de même,

$$\varphi_2^{(k)}(x) = \alpha^{-k} \int_{-\infty}^\infty f(x-\alpha y)\,\varphi_2^{(k)}(y)\,dy, \qquad 0 < \alpha < 1,$$

$$\varphi_2^{(k)}(x) = |\alpha|^{-k} \int_{-\infty}^\infty f(x-\alpha y)\,\varphi_1^{(k)}(y)\,dy, \qquad -1 < \alpha < 0,$$

$$\varphi_1^{(k)}(x) = |\alpha|^{-k} \int_{-\infty}^\infty f(x-\alpha y)\,\varphi_2^{(k)}(y)\,dy, \qquad -1 < \alpha < 0,$$

$$\psi_i^{(k)}(x) = \alpha^{k+1} \int_{-\infty}^\infty f(y-\alpha x)\,\psi_i^{(k)}(y)\,dy, \qquad \alpha > 1, \quad (i = 1, 2),$$

$$\psi_2^{(k)}(x) = |\alpha|^{k+1} \int_{-\infty}^\infty f(y-\alpha x)\,\psi_1^{(k)}(y)\,dy, \qquad \alpha < -1,$$

$$\psi_1^{(k)}(x) = |\alpha|^{k+1} \int_{-\infty}^\infty f(y-\alpha x)\,\psi_2^{(k)}(y)\,dy, \qquad \alpha < -1.$$

L'équation (A) a donc les solutions

$$\varphi_1{}^{(k)},\ \varphi_2{}^{(k)} \qquad \text{pour} \qquad \lambda = \alpha^{-k}, \quad 0 < \alpha < 1\,,$$

et les solutions

$$\varphi_1{}^{(k)} \pm \varphi_2{}^{(k)} \qquad \text{pour} \qquad \lambda = \pm|\alpha|^{-k}, \quad -1 < \alpha < 0\,.$$

L'équation (B) a les solutions

$$\psi_1{}^{(k)},\ \psi_2{}^{(k)} \qquad \text{pour} \qquad \lambda = \alpha^{k+1}, \quad \alpha > 1\,,$$

et les solutions

$$\psi_1{}^{(k)} \pm \psi_2{}^{(k)} \qquad \text{pour} \qquad \lambda = \pm|\alpha|^{k+1}, \quad \alpha < -1\,.$$

BIBLIOGRAPHIE

1. A. Grothendieck, *La théorie de Fredholm*, Bull. Soc. Math. France 84 (1956), 319–384.
2. J. Steinberg, *Sur une classe d'équations integrales singulières*, Technion. Israel Inst. Tech. Sci. Publ. 6 (1954/5), 85–93.

THE ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY, STOCKHOLM, SWEDEN