MATH. SCAND. 7 (1959), 33–48

INVARIANTE SCHNITTSYSTEME STETIGER TRANSFORMATIONEN

JOSEF WEIER

Sind r eine natürliche Zahl, R die Menge aller Paare (j, k) natürlicher Zahlen $\leqq r$ und α eine eindeutige Abbildung von R in die ganzen Zahlen, so heisse (r, α) eine »bewertete Paarmenge«. Sind s eine weitere natürliche Zahl, S die Menge aller (j, k) mit $j, k \leqq s$ und β eine eindeutige Abbildung von S in die ganzen Zahlen, so möge (s, β) zu (r, α) »äquivalent« heissen, wenn eine Teilmenge R_1 von R und eine eineindeutige Abbildung ξ von R_1 in S existiert mit den Eigenschaften: für alle (j, k) aus R_1 ist

$$\alpha(j, k) = \beta\xi(j, k) ,$$

jedes (j, k) aus R mit $\alpha(j, k) \neq 0$ liegt in R_1, jedes (j, k) aus S mit $\beta(j, k) \neq 0$ liegt in $\xi(R_1)$.

Hierauf seien m, n natürliche Zahlen. Um unbequeme elementare Fälle auszuschalten, sei $n > 2$. Es gelte

$$m = 2n-2 .$$

Seien M eine m-dimensionale und N eine n-dimensionale orientierte zusammenhängende geschlossene euklidische Mannigfaltigkeit, weiter

$$f\colon \quad M \to N$$

eine stetige Abbildung. Dann bestimmt f, eindeutig bis auf Aequivalenzen, eine bewertete Paarmenge (t, γ), die die Eigenschaften hat: ist $\gamma(j, k) \neq 0$ für wenigstens ein (j, k), so ist f wesentlich; sind f' eine zu f homotope Abbildung und (t', γ') eine zu f' gehörige bewertete Paarmenge, so sind (t, γ) und (t', γ') äquivalent.

Das System (t, γ) lässt eine einfache geometrische Erklärung zu: Seien a ein Punkt aus N und $f^{-1}(a)$ ein $(m-n)$-dimensionales endliches Polyeder A, weiter $A_1, A_2, \ldots$ die Komponenten von A. Die A_i zerfallen [3], dies wird unten näherhin erläutert, in Klassen

$$(A_{i1}, A_{i2}, \ldots), \qquad i = 1, \ldots, t .$$

Eingegangen am 25. Januar 1959.

Über dem Polyeder $B_i = \bigcup_j A_{ij}$ liegt, wie unten dargelegt ist, ein durch (f, a) bis auf Unterteilungen eindeutig bestimmter ganzzahliger endlicher $(m-n)$-Zyklus z_i.

Dann ist für alle Paare (j, k) natürlicher Zahlen $\leqq t$ die Zahl $\gamma(j, k)$ wie folgt bestimmt. Für $j=k$ ist $\gamma(j, k)=0$. Ebenso ist $\gamma(j, k)=0$, wenn $z_j \nsim 0$ oder $z_k \nsim 0$. Sei nun gleichzeitig $j \neq k$, $z_j \sim 0$ und $z_k \sim 0$. Dann existieren in M gelegene ganzzahlige endliche $(m-n+1)$-Ketten x und y, die sich zueinander in allgemeiner Lage befinden und

$$z_j = \delta x, \qquad z_k = \delta y$$

erfüllen. Gibt es Kettenpaare (x, y) der vorgenannten Art, deren Schnittzahl [4, pp. 130–150] Null ist, so sei $\gamma(j, k)=0$; ist die Schnittzahl aller Kettenpaare (x, y) genannter Art von Null verschieden und gibt es Kettenpaare mit positiver Schnittzahl, so sei $\gamma(j, k)=1$; es sei $\gamma(j, k)=-1$, wenn die Schnittzahl aller Kettenpaare (x, y) der in Rede stehenden Beschaffenheit negativ ist.

Übrigens ist, wenn $z_j \nsim 0$ für wenigstens eine Zahl j, die Abbildung f wesentlich, so dass das System (t, γ) gerade in dem Falle Interesse gewinnt, in welchem die Zahlen $\gamma(j, k)$ nichttrivial erklärt sind.

Es heisse (t, γ) auch ein Schnittsystem erster Ordnung von f zur Unterscheidung von Schnittsystemen zweiter Ordnung, die in einer Fortsetzung dieser Arbeit behandelt werden: Geometrisch besteht der Schnitt, den das Paar (x, y) bestimmt, aus endlich vielen Punkten $b_1, b_2, \ldots$. Diese zerfallen ihrerseits in Klassen

$$(b_{i1}, b_{i2}, \ldots), \qquad i = 1, 2, \ldots .$$

Zu jedem (j, k) gehören solche, unter Umständen leere, Klassen $B_i(j, k)$, $i=1, 2, \ldots$, so dass also drei Indizes laufen.

Zur Erklärung der Klassen z_i, wie sie unten definiert sind, ist übrigens die obige Voraussetzung $m=2n-2$ überflüssig. Hier genügt es,

$$m \geqq n$$

vorauszusetzen. Man hat dann immer noch den Satz, der auch ohne das System der Schnittzahlen $\gamma(j, k)$ von Interesse ist: wenn $z_j \nsim 0$ für wenigstens eine Zahl j, so ist die Abbildung f wesentlich.

1. Geometrische Voruntersuchungen. Es bedeute E einen euklidischen Raum. Simplexe aus E sind gradlinig und hinsichtlich ihrer Trägerebene offen. Ist A ein solches Simplex und f eine eineindeutige stückweis affine Abbildung der abgeschlossenen Hülle $\bar{A}$ in E, so heisse die Menge $f(A)$ eine Zelle. Ersetzt man in dieser Zellendefinition $\bar{A}$ durch A, so ergibt sich ein anderer Zellenbegriff, der im folgenden nicht zugrundegelegt ist. Sind $A_1, A_2, \ldots$ endlich viele Simplexe in E, so heisse $\bigcup \bar{A}_i$ ein endliches Polyeder. Eine in E gelegene geschlossene topologische Mannigfaltigkeit, die gleichzeitig endliches Polyeder ist, heisse geschlossene euklidische Mannigfaltigkeit. Für Punkte a, b aus dem gleichen euklidischen Raume bedeutet $d(a, b)$ weiterhin den Abstand. Ist K ein simplizialer Komplex in E, so bezeichnet $|K|$ das zugehörige Polyeder.

Seien M eine geschlossene euklidische Mannigfaltigkeit und A, B zwei Zellen in M. Ist

$$\dim A + \dim B < \dim M ,$$

so befinden sich A und B zueinander in allgemeiner Lage, falls $A \cap B = 0$. Ist

$$\dim A + \dim B \geqq \dim M ,$$

so wollen wir sagen, A und B befänden sich zueinander in »allgemeiner Lage«, falls $A \cap B$ entweder leer oder eine Zelle der Dimension

$$(\dim A + \dim B) - \dim M$$

ist. Zwei endliche Polyeder P_1 und P_2 aus M mögen sich zueinander in allgemeiner Lage befinden, wenn P_i eine Zellenzerlegung K_i besitzt derart, dass sich K_1 zu K_2 in allgemeiner Lage befindet. Sind A ein endliches Polyeder in M, K eine simpliziale Zerlegung von A und z ein ganzzahliger Zyklus über K, so heisse A die »Basis« von z. Ist z' ein anderer ganzzahliger endlicher Zyklus in M mit A' als Basis und K' die zugehörige simpliziale Zerlegung von A', so wollen wir, ohne die speziellen Zerlegungen K und K' zu berücksichtigen, sagen, z und z' befänden sich zueinander in »allgemeiner Lage«, wenn sich A und A' zueinander in allgemeiner Lage befinden.

Bis zum Schlusse dieses ersten Abschnittes mögen $m \geqq n$ natürliche Zahlen, M eine m-dimensionale und N eine n-dimensionale zusammenhängende geschlossene euklidische Mannigfaltigkeit sein.

Sind M_1, M_2 euklidische Mannigfaltigkeiten, weiter $f, g\colon M_1 \to M_2$ stetige Abbildungen und existiert eine in M_1 offene Zelle U_1 sowie eine in M_2 offene Zelle U_2 derart, dass

$$f \mid M_1 - U_1 = g \mid M_1 - U_1 \qquad \text{und} \qquad f(\bar{U}_1) \cup g(\bar{U}_1) \subset U_2$$

ist, so heisse g eine »*lokale Deformation*« von f hinsichtlich (U_1, U_2).

Theorem 1. *Sind U eine m-Zelle in M und x eine ganzzahlige endliche r-Kette in M mit*

$$r < m \qquad \textit{und} \qquad |\delta x| \cap \bar{U} = 0 ,$$

so gibt es eine ganzzahlige endliche r-Kette y in M derart, dass

$$\delta x = \delta y, \qquad |y| \cap U = 0 \qquad \textit{und} \qquad x - y \sim 0 \text{ rel}\, \overline{U}\,.$$

BEWEIS. Bedeute A das Polyeder $|x|$ und q einen festen Punkt aus $U-A$. Man kann weiterhin annehmen, U sei ein Simplex. Für $p \in A-U$ sei $f(p)=p$, für $p \in A \cap U$ sei $f(p)$ die Projektion von p auf $\overline{U}-U$ aus q. Sei K die durch x bestimmte simpliziale Zerlegung von A. Dann gibt es eine simpliziale Unterteilung K' von K derart, dass f auf jedem Simplex aus K' affin ist. Es existiert weiter eine simpliziale Zerlegung L von $f(A)$ mit der Eigenschaft: welches auch das r-Simplex S aus K' und das r-Simplex T aus L mit $f(S) \cap T \neq 0$ sind, stets gilt $T \subset f(S)$.

Hierauf lässt sich y leicht angeben: Seien w ein orientiertes r-Simplex aus L und $x_1, x_2, \ldots$ diejenigen r-Simplexe aus x, die $|w| \subset f(|x_i|)$ erfüllen, weiter α_i der Koeffizient von x_i in x und ε_i gleich 1 oder -1, je nachdem w und $f(x_i)$ gleich orientiert sind oder nicht. Alsdann ist $\Sigma \alpha_i \varepsilon_i$ der Koeffizient von w in y.

THEOREM 2. *Sind f: $M \to N$ eine stetige Abbildung, a ein Punkt aus N, ε eine positive Zahl und U eine in M offene Menge mit $f^{-1}(a) \subset U$, so existiert eine stetige Abbildung g: $M \to N$ mit*

$$f \mid M-U = g \mid M-U \qquad \textit{und} \qquad d(f, g) < \varepsilon$$

derart, dass $g^{-1}(a)$ ein endliches Polyeder einer Dimension $\leqq m-n$ ist.

BEWEIS. Man kann annehmen, es existiere ein n-Simplex S mit $a \in S \subset N$ und einem Durchmesser $< \varepsilon$. Dann gibt es in M gelegene endliche Polyeder A und B, über die, wenn V das Innere von A und W das Innere von B bezüglich M bedeutet, gilt:

$$f^{-1}(a) \subset W, \qquad \overline{W} \subset V \subset U\,.$$

Weiter existiert eine positive Zahl δ mit

$$d\big(a, f(\overline{V}-W)\big) > \delta\,.$$

Es bezeichne K eine simpliziale Zerlegung von $\overline{V}$, die auch in $\overline{W}$ eine simpliziale Zerlegung L induziert. Seien e_i die Eckpunkte von K und $f'(e_i)$ in $S-a$ gelegene Punkte, welch letztere sich hinsichlich S zueinander in allgemeiner Lage befinden und

$$d\big(f(e_i), f'(e_i)\big) < \delta$$

erfüllen. Dadurch ist eine simpliziale Abbildung

$$f': \ \overline{V} \to S$$

bestimmt mit $d(f \mid \bar{V}, f') < \delta$ und der Eigenschaft, dass $f'^{-1}(a)$ ein endliches Polyeder einer Dimension $\leqq m-n$ ist. Für jeden Punkt $p \in \bar{V} - W$ ist a zu der abgeschlossenen Strecke zwischen $f(p)$ und $f'(p)$ fremd. Man kann daher

$$g(p) = \big(1-h(p)\big)f(p) + h(p)f'(p) \qquad \text{für} \quad p \in \bar{V},$$

wobei $h(p)$ die Zahl

$$h(p) = \frac{d(p, \bar{V}-V)}{d(p, \bar{V}-V) + d(p, W)}$$

bedeutet, und

$$g \mid M - V = f \mid M - V$$

setzen.

Theorem 3. *Sind f, g: $M \to N$ homotope Abbildungen, so gibt es endlich viele stetige Abbildungen*

$$f = f_0, f_1, \ldots, f_r = g: \quad M \to N$$

derart, dass f_i für alle $i > 0$ eine lokale Deformation von f_{i-1} ist.

Beweis. Seien

$$(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq s): \quad M \to N$$

eine Homotopie, K eine simpliziale Zerlegung von M und $A_1, \ldots, A_t$ die m-Simplexe von K. Sofern s hinreichend gross und K hinreichend fein ist, kann man annehmen: zu allen (i, j) mit $i = 1, \ldots, t$ und $j = 0, \ldots, s-1$ gibt es eine m-Zelle U_{ij} in M und eine n-Zelle V_{ij} in N derart, dass

$$\bar{A}_i \subset U_{ij} \qquad \text{und} \qquad f^\tau(\bar{U}_{ij}) \subset V_{ij} \qquad \text{für} \qquad j \leqq \tau \leqq j+1 .$$

Somit genügt es zu zeigen: Seien U_i für $i = 1, \ldots, t$ eine m-Zelle in M mit $\bar{A}_i \subset U_i$ und V_i eine n-Zelle in N, weiter

$$(g^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1): \quad M \to N$$

eine Homotopie derart, dass $g^\tau(\bar{U}_i) \subset V_i$ für alle (i, τ) mit $i = 1, \ldots, t$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$. Dann lässt sich g^0 mit Hilfe endlich vieler lokaler Homotopien in g^1 überführen.

Es mögen A_0 die leere Menge und j eine ganze Zahl mit $0 \leqq j < t$ bezeichnen. Wir machen die für $j = 0$ richtige Annahme, eine stetige Abbildung

$$\lambda: \quad M \to [0, 1]$$

und Abbildungen

$$g^0 = h_0, \ldots, h_j: \quad M \to N$$

existierten, die die Eigenschaften haben: für alle $i > 0$ ist h_i eine lokale Deformation von h_{i-1}, für alle $p \in M$ ist $h_j(p) = g^{\lambda(p)}(p)$, für alle $p \in \bar{A}_0 \cup \ldots \cup \bar{A}_j$ ist $\lambda(p) = 1$. Setzt man dann

$$\delta(p) = \frac{d(p, M - U_{j+1})}{d(p, M - U_{j+1}) + d(p, A_{j+1})}$$

$$\mu(p) = \lambda(p) + \big(1 - \lambda(p)\big)\delta(p) \qquad \text{und} \qquad h_{j+1}(p) = g^{\mu(p)}(p)$$

in allen Punkten $p \in M$, so ist damit der $(j+1)$-te Schritt ausgeführt und also der Satz bewiesen.

THEOREM 4. *Sind a ein Punkt aus N, weiter*

$$f, g\colon \ M \to N$$

homotope Abbildungen und $f^{-1}(a)$ wie $g^{-1}(a)$ ein endliches Polyeder einer Dimension $\leqq m-n$, so gibt es stetige Abbildungen

$$f_0, \ldots, f_r\colon \ M \to N$$

mit

$$f_0 = f, \qquad f_r = g$$

und den weiteren Eigenschaften: für alle $i > 0$ ist f_i eine lokale Deformation von f_{i-1}, für alle i ist $f_i^{-1}(a)$ ein endliches Polyeder einer Dimension $\leqq m-n$.

BEWEIS. Nach Satz 3 gibt es stetige Abbildungen

$$g_0, \ldots, g_r\colon \ M \to N$$

mit $g_0 = f$ und $g_r = g$, weiter für $i = 1, \ldots, r$ eine m-Zelle U_i in M und eine n-Zelle V_i in N, so dass g_i für $i = 1, \ldots, r$ eine lokale Deformation von g_{i-1} bezüglich (U_i, V_i) ist. Sei a_i ein Punkt aus U_i.

Es liege M im s-dimensionalen euklidischen Raume E_s, und E_{s+1} bezeichne den $(s+1)$-dimensionalen euklidischen Raum. Ist $p = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ ein Punkt aus E_s und α eine Zahl, so bedeute (p, α) den Punkt $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \alpha)$ aus E_{s+1}. Ist M_1 eine Teilmenge von M, und ist jedem Punkte p aus M_1 eine Zahl $\beta(p)$ zugeordnet, so bedeute (M_1, β) die Menge aller Punkte $\big(p, \beta(p)\big)$ aus E_{s+1} mit $p \in M_1$.

Für $p \in U_i$ bezeichne $\delta_i(p)$ die Zahl

$$\delta_i(p) = \frac{d(p, \overline{U}_i - U_i)}{d(p, \overline{U}_i - U_i) + d(p, a_i)},$$

für $p \in M - U_i$ sei $\delta_i(p) = 0$. Dann ist

$$M' = (M, 0) \cup (\overline{U}_1, \delta_1) \cup (\overline{U}_2, \delta_1 + \delta_2) \cup \ldots \cup (\overline{U}_r, \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_r)$$

ein m-dimensionales endliches Polyeder aus E_{s+1}. Eine stetige Abbildung $h\colon M' \to N$ wird bestimmt durch die Festsetzung:

$$\begin{aligned} h(p, 0) &= g_0(p) \quad \text{für} \quad p \in M\,, \\ h\big(p, \delta_1(p)\big) &= g_1(p) \quad \text{für} \quad p \in \overline{U}_1\,, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ h\big(p, \delta_1(p) + \ldots + \delta_r(p)\big) &= g_r(p) \quad \text{für} \quad p \in \overline{U}_r\,. \end{aligned}$$

Setzt man

$$M'' = (M, 0) \cup (M, \delta_1 + \ldots + \delta_r)\,,$$

so ist nach Voraussetzung $(h \mid M'')^{-1}(a)$ ein endliches Polyeder einer Dimension $\leqq m-n$.

Wie man sich leicht überlegt, kann man die Zellen U_i als so gewählt annehmen, dass

$$\big(\mathbf{U}(\overline{U}_i - U_i)\big) \cap \big(f^{-1}(a) \cup g^{-1}(a)\big)$$

ein endliches Polyeder einer Dimension $\leqq m-n-1$ ist. Wegen

$$(\overline{M' - M''}) \cap M'' \subset \mathbf{U}\big((\overline{U}_i - U_i, 0) \cup (\overline{U}_i - U_i, \delta_1 + \ldots + \delta_r)\big)$$

ist der Durchschnitt von $h^{-1}(a)$ und $(\overline{M' - M''}) \cap M''$ ein endliches Polyeder einer Dimension $\leqq m-n-1$.

Einem nachstehenden Hilfssatz zufolge gibt es eine stetige Abbildung h': $M' \to N$, die auf M'' mit h übereinstimmt. von h um weniger als eine vorgegebene positive Zahl ζ entfernt ist und die die weitere Eigenschaft hat, dass $h'^{-1}(a)$ ein endliches Polyeder einer Dimension $\leqq m-n$ ist. Für alle (i, p) mit $i = 1, \ldots, r$ und $p \in M$ sei

$$f_i(p) = h'\big(p, \delta_1(p) + \ldots + \delta_i(p)\big)\,.$$

Wegen $g_{i-1}(\overline{U}_i) \cup g_i(\overline{U}_i) \subset V_i$ ist $f_{i-1}(\overline{U}_i) \cup f_i(\overline{U}_i) \subset V_i$, sofern nur ζ hinreichend klein ist.

Da $\delta_i(p) = 0$ für $p \in M - U_i$, ist $f_i \mid M - U_i = f_{i-1} \mid M - U_i$. Da $h'^{-1}(a)$ ein endliches Polyeder einer Dimension $\leqq m-n$, ist erst recht $f_i^{-1}(a)$ ein solches. Verbleibt zu zeigen:

Hilfssatz. *Die Bedeutung von $a \in N$ und $n \leqq m$ sei die gleiche wie in Theorem 4. Seien P ein endliches m-Polyeder, Q ein endliches $(m-1)$-Polyeder in P, weiter*

$$f\colon\ P \to N$$

eine stetige Abbildung und $(f \mid Q)^{-1}(a)$ ein endliches Polyeder einer Dimension $\leqq m-n-1$, schliesslich ε eine positive Zahl. Dann existiert eine stetige Abbildung

$$f'\colon\ P \to N$$

mit

$$d(f, f') < \varepsilon \quad \textit{und} \quad f \mid Q = f' \mid Q$$

derart, dass $f'^{-1}(a)$ ein endliches Polyeder einer Dimension $\leqq m-n$ ist.

Beweis. Sei $A=f^{-1}(a)$, es bezeichne B eine n-Zelle in N mit $a\in B$ und einem Durchmesser $<\varepsilon$. Man kann weiterhin annehmen, dass B ein Simplex ist.

Ist K eine hinreichend feine simpliziale Zerlegung von P, die in Q eine simpliziale Zerlegung induziert, so gibt es Teilkomplexe K_1 und K_2 von K mit den Eigenschaften: das Polyeder $|K_i|$ ist die abgeschlossene Hülle einer in P offenen Menge U_i, weiter

$$A \subset U_1, \quad \overline{U}_1 \subset U_2, \quad f(\overline{U}_2) \subset B .$$

Bezeichne ζ die Zahl

$$\zeta = 2\cdot d\big(a, f(\overline{U}_2-U_1)\big) .$$

Ist hierauf e ein Eckpunkt aus K_2 mit $e\notin Q$, so sei $g(e)$ derart ein Punkt aus $B-a$ mit

$$d\big(f(e),\, g(e)\big) < \tfrac{1}{2}\zeta ,$$

dass sich die Punkte $g(e)$ mit $e\in K_2-Q$ hinsichtlich B zueinander in allgemeiner Lage befinden. Wir setzen

$$g \mid \overline{U}_2\cap Q = f \mid \overline{U}_2\cap Q .$$

In den übrigen Punkten von $\overline{U}_2$ erkläre man g durch lineare Fortsetzung. Das ist, wie man sich leicht überlegt, auch in solchen Simplexen möglich, deren Begrenzung teilweise oder ganz in Q liegt. Dann ist $g^{-1}(a)$ ein endliches Polyeder einer Dimension $\leqq m-n$. Für $p\in\overline{U}_2-U_1$ sei hierauf

$$\delta(p) = \frac{d(p,\, \overline{U}_2-U_2)}{d(p,\, \overline{U}_2-U_2)+d(p,\, \overline{U}_1-U_1)}$$

und

$$f'(p) = \big(1-\delta(p)\big)f(p) + \delta(p)g(p) .$$

Wegen

$$d\big(a, f(\overline{U}_2-U_1)\big) > \zeta \qquad \text{und} \qquad d(f \mid U_2,\, g \mid U_2) < \zeta$$

ist $f'(\overline{U}_2-U_1)\subset B-a$. Setzt man noch

$$f' \mid U_1 = g \mid U_1 \qquad \text{und} \qquad f' \mid M-U_2 = f \mid M-U_2 ,$$

so ist damit der Hilfssatz bewiesen.

2. Die Homotopiekomponenten reziproker Punktbilder. Seien $n>2$ eine ganze Zahl, $m=2n-2$, weiter M eine m-dimensionale und N eine n-dimensionale orientierte zusammenhängende geschlossene euklidische Mannigfaltigkeit. *Die so erklärte Bedeutung von m, n, M, N gelte bis zum Schlusse der Arbeit.*

Seien f: $M \to N$ eine stetige Abbildung, a ein Punkt aus N, $A = f^{-1}(a)$ ein $(m-n)$-dimensionales endliches Polyeder, weiter $A_1, A_2, \ldots$ die Komponenten von A, K_i eine simpliziale Zerlegung von A_i, x_{ij} die mit einer Orientierung versehenen $(m-n)$-Simplexe aus K_i und α_{ij} die unten definierte Überdeckungszahl von x_{ij} bei (f, a). Dann ist jede der Ketten

$$X_i = \sum_j \alpha_{ij} x_{ij}$$

ein ganzzahliger $(m-n)$-Zyklus. Es heisse A_i die »*Basis*« von X_i und X_i der »*durch* (f, a) *bestimmte Zyklus*« über A_i. Existiert eine Kurve $(c_\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ in M mit $c_0 \in X_i$ und $c_1 \in X_k$ derart, dass $(f(c_\tau), 0 \leqq \tau \leqq 1)$ innerhalb N nullhomotop ist, so mögen X_i und X_k zur »*gleichen a-Klasse*« von f gehören. Diese letztere Erklärung geht auf eine klassische Definition [3] von Nielsen zurück. Sind $Y_1, Y_2, \ldots$ gewisse der X_i und bilden die Y_i eine a-Klasse, so heisse der Zyklus

$$\sum Y_i$$

eine »*Homotopiekomponente*« von (f, a). Offenbar sind »die« Homotopiekomponenten von (f, a) bis auf Unterteilungen eindeutig bestimmt.

THEOREM 5. *Seien* f: $M \to N$ *eine stetige Abbildung, a ein Punkt aus N, U eine m-Zelle in M, V eine n-Zelle in N, weiter* $f^{-1}(a)$ *ein* $(m-n)$-*Polyeder A und*

$$f(U) \subset V \qquad \text{sowie} \qquad A \cap U \neq 0\,.$$

Dann gibt es genau eine Homotopiekomponente von (f, a), *deren Basis die Menge* $A \cap U$ *enthält.*

Dieser Satz, der im nächsten Abschnitt Anwendung findet, folgt fast unmittelbar aus der Erklärung einer Homotopiekomponente: Sind q_τ von τ stetig abhängende Punkte aus U mit $q_0 \cup q_1 \subset A$, so liegt $(f(q_\tau), 0 \leqq \tau \leqq 1)$ in V und ist daher in N nullhomotop.

Die oben benutzte Überdeckungszahl lässt sich so erklären. Seien P ein m-Simplex, Q ein n-Simplex, q ein Punkt aus Q, A ein $(m-n)$-Simplex in P, r ein Punkt aus A, B ein zu A orthogonales n-Simplex in P mit $A \cap B = r$, weiter

$$f\colon\ \bar{P} \to \bar{Q}$$

eine stetige Abbildung und $f^{-1}(q) = \bar{A}$. Für $p \in \bar{B} - B$ sei $f'(p)$ die Projektion von p auf $\bar{Q} - Q$ aus r. Seien ferner P', Q', A' eine Orientierung von P, Q, A und B' die von (A', P') in B induzierte Orientierung, weiter B^* die von B' in $\bar{B} - B$ und Q^* die von Q' in $\bar{Q} - Q$ induzierte Orientierung. Dann ist der Grad der Abbildung

$$f'\colon\ B^* \to Q^*$$

die vorgenannte Überdeckungszahl.

Theorem 6. *Seien f^1, f^2: $M \to N$ stetige Abbildungen, f^2 eine lokale Deformation von f^1 bezüglich (U, V), weiter a ein Punkt aus N und $(f^i)^{-1}(a)$ ein endliches $(m-n)$-Polyeder, z^i der durch (f^i, a) bestimmte Zyklus über $(f^i)^{-1}(a)$. Dann berandet $z^1 - z^2$ in $\overline{U}$.*

Es liegt nämlich der Zyklus $z^1 - z^2$ in $\overline{U}$, und U ist Zelle.

3. Lokale Invarianz der Schnittsysteme. Die Bedeutung von m, n, M, N ist im letzten Abschnitt erklärt. Sind a ein Punkt aus N und F: $M \to N$ eine Homotopieklasse, so liegt die Menge aller Abbildungen aus F, für die das Urbild von a ein endliches Polyeder einer Dimension $\leqq m-n$ ist, in F dicht. Seien f eine Abbildung der letzteren Art, weiter $z_1, \ldots, z_r$ die Homotopiekomponenten von (f, a) und für alle Paare (j, k) natürlicher Zahlen $\leqq r$ die Zahl σ_{jk} wie folgt bestimmt: für $j = k$ ist $\sigma_{jk} = 0$; ebenso ist $\sigma_{jk} = 0$, wenn wenigstens eine der Relationen $z_j \not\sim 0$ und $z_k \not\sim 0$ richtig ist; ist gleichzeitig $z_j \sim 0$ und $z_k \sim 0$ und gibt es in M zueinander in allgemeiner Lage befindliche ganzzahlige endliche $(m-n+1)$-Ketten x, y mit

$$z_j = \delta x \qquad \text{und} \qquad z_k = \delta y$$

derart, dass die Schnittzahl des Kettenpaares (x, y) Null ist, so sei wiederum $\sigma_{jk} = 0$; in allen übrigen Fällen sei, wie es schon in der Einleitung definiert ist, $\sigma_{jk} = 1$ oder -1, je nachdem ein Paar (x, y) mit positiver Schnittzahl existiert oder nicht.

Theorem 7. *Seien f: $M \to N$ eine stetige Abbildung, g eine lokale Deformation von f, a ein Punkt aus N, weiter $f^{-1}(a)$ und ebenso $g^{-1}(a)$ ein endliches Polyeder einer Dimension $\leqq m-n$. Dann ist das Schnittsystem von (f, a) zum Schnittsystem von (g, a) äquivalent.*

Beweis. Nach Voraussetzung existieren eine m-Zelle U in M und eine n-Zelle V in N derart, dass

$$f \mid M-U = g \mid M-U \qquad \text{und} \qquad f(\overline{U}) \cup g(\overline{U}) \subset V\,.$$

Mit $A = f^{-1}(a)$ und $B = g^{-1}(a)$ ist offenbar Theorem 7 im Falle $(A \cup B) \cap U = 0$ richtig. Sei weiterhin wenigstens eine der Relationen

$$A \cap U \neq 0 \qquad \text{und} \qquad B \cap U \neq 0$$

erfüllt. Wir wollen nun zwei Fälle getrennt behandeln.

Im *ersten Falle* ist die Anzahl der Homotopiekomponenten von (f, a) gleich der von (g, a).

Wenn $A \cap U \neq 0$, so sei $z_1{}^f$ diejenige Homotopiekomponente von (f, a), deren Basis nach Satz 5 die Menge $A \cap U$ enthält. Die übrigen Homotopiekomponenten von (f, a) mögen $z_2^f, \ldots, z_r^f$ heissen. Wir setzen

$$z_i^g = z_i^f \qquad \text{für} \quad i = 2, \ldots, r .$$

Die restliche Homotopiekomponente von (g, a) heisse z_1^g. Ausserhalb U stimmen z_1^f und z_1^g überein.

Wenn $A \cap U = 0$ und $B \cap U \neq 0$, so sei z_1^g diejenige Homotopiekomponente von (g, a), deren Basis nach Satz 5 die Menge $B \cap U$ enthält. Die übrigen Homotopiekomponenten von (g, a) mögen $z_2^g, \ldots, z_r^g$ heissen. Wir setzen

$$z_i^f = z_i^g \qquad \text{für} \quad i = 2, \ldots, r .$$

Die verbleibende Homotopiekomponente von (f, a) heisse z_1^f. Ausserhalb U stimmen z_1^f und z_1^g überein. Sind C_1, C_2 endliche ganzzahlige Ketten aus M mit

$$\dim C_1 + \dim C_2 = \dim M \qquad \text{und} \qquad |\delta C_1| \cap |\delta C_2| = 0 ,$$

so bezeichne $\sigma(C_1, C_2)$ die Schnittzahl von (C_1, C_2). Für alle Paare (j, k) natürlicher Zahlen $\leqq r$ bezeichne $\gamma^f(j, k)$ die oben definierte durch (z_j^f, z_k^f) bestimmte Schnittzahl, entsprechend $\gamma^g(j, k)$ die durch (z_j^g, z_k^g) bestimmte. Trivialerweise ist dann $\gamma^f(j, k) = \gamma^g(j, k)$ für alle Paare (j, k) mit j, $k \geqq 2$. Trivial ist auch $\gamma^f(1, 1) = \gamma^g(1, 1)$. Verbleibt zu zeigen, dass

$$\gamma^f(1, k) = \gamma^g(1, k) \qquad \text{für alle} \quad k \geqq 2 .$$

Denn hieraus folgt auch $\gamma^f(k, 1) = \gamma^g(k, 1)$ für alle $k \geqq 2$. Bedeute t eine feste der Zahlen $k = 2, \ldots, r$. Nach Satz 6 ist

$$z_1^f \sim z_1^g \quad \text{rel} \quad U .$$

Wenn wenigstens eine der Relationen $z_1^f \nsim 0$ und $z_t^f \nsim 0$ erfüllt ist, so ist gleichzeitig wenigstens eine der Relationen $z_1^g \nsim 0$ und $z_t^g \nsim 0$ erfüllt. Hier ist also $\gamma^f(1, t) = 0$ und $\gamma^g(1, t) = 0$. Sei nunmehr

$$z_1^f \sim 0 \qquad \text{und} \qquad z_t^f \sim 0 .$$

Dann gibt es ganzzahlige endliche $(m - n + 1)$-Ketten w, x, y in M mit

$$z_1^f - z_1^g = \delta w, \quad z_1^f = \delta x, \quad z_t^f = \delta y, \qquad w \subset \overline{U} .$$

Hätten $|z_t^f|$ und $\overline{U}$ gemeinsame Punkte, so wäre $z_1^f = z_t^f$. Wegen $t > 1$ ist also z_t^f zu $\overline{U}$ fremd. Andererseits ist $\delta y = z_t^f$. Nach Satz 1 gibt es daher eine ganzzahlige endliche $(m - n + 1)$-Kette y' mit

$$z_1^g = \delta y', \qquad |y'| \cap U = 0 \qquad \text{und} \qquad y - y' \sim 0 \ \text{rel} \ \overline{U} .$$

Aus der letzten Gleichung und $w \subset U$ folgt $\sigma(w, y') = 0$. Hierauf ist

$$\sigma(x, y) = \sigma(x, y') = \sigma(x, y') + \sigma(w, y') = \sigma(x+w, y'),$$

mithin $\gamma^f(1, t) = \gamma^g(1, t)$. Im ersten Falle ist also Satz 7 richtig.

Sei *zweitens* die Anzahl der Homotopiekomponenten von (f, a) von derjenigen von (g, a) verschieden. Man darf weiterhin $A \neq 0$ voraussetzen. Ist nämlich $A = 0$ und $B \neq 0$, so führt ein Bezeichnungswechsel den Fall $A \neq 0$ herbei.

Nach Satz 5 lassen sich die Homotopiekomponenten von (f, a) derart mit $z_1^f, \ldots, z_r^f$ bezeichnen, dass die Basis A_1^f von z_1^f die Menge $A \cap U$ enthält. Offenbar sind die Zyklen $z_2^f, \ldots, z_r^f$ auch Homotopiekomponenten von (g, a). Die Menge

$$B - (A_2^f \cup \ldots \cup A_r^f)$$

liegt in der gleichen Homotopiekomponente von (g, a), da die Menge

$$A - (A_2^f \cup \ldots \cup A_r^f)$$

in der gleichen Homotopiekomponente von (f, a) liegt. Damit die Anzahl der Homotopiekomponenten von (f, a) und diejenige von (g, a) verschieden sind, muss also die Menge $B - (A_2^f \cup \ldots \cup A_r^f)$ leer sein.

Jeder Punkt p aus A_1^f, der nicht in U liegt, gehört zu B. Jeder solche Punkt ist aber zu $A_2^f \cup \ldots \cup A_r^f$ fremd. Andererseits ist

$$B = A_2^f \cup \ldots \cup A_r^f,$$

also $A_1^f \subset U$. Damit ist nachgewiesen: die Homotopiekomponenten von (g, a) sind die Zyklen $z_2^f, \ldots, z_r^f$, und z_1^f liegt in U.

Sei jetzt x eine ganzzahlige endliche $(m-n+1)$-Kette in U mit $z_1^f = \delta x$. Da, wie schon bei der Behandlung des ersten Falles bemerkt wurde, z_l^f zu $\overline{U}$ fremd ist, gibt es nach Satz 1 eine ganzzahlige endliche $(m-n+1)$-Kette y in $M - U$ mit $z_l^f = \delta y$. Hierauf sind x und y zueinander fremd, daher die Schnittzahl $\sigma(x, y)$ Null. Damit ist Satz 7 auch im zweiten Falle bewiesen.

4. Folgerungen. Offenbar ergibt sich aus Theorem 4 und Theorem 7: *Sind f, g: $M \to N$ homotope Abbildungen und $f^{-1}(a)$ wie $g^{-1}(a)$ ein endliches $(m-n)$-Polyeder, so ist das Schnittsystem von (f, a) zum Schnittsystem von (g, a) äquivalent.*

Für den Begriff der Wesentlichkeit einer stetigen Abbildung f: $M \to N$ gibt es in der Literatur verschiedene Erklärungen. Einige nennen f bereits dann wesentlich, wenn es nicht möglich ist, $f(M)$ innerhalb N auf einen Punkt zu kontrahieren, so Hurewicz [2, p. 85]. Andere, denen wir hier folgen wollen, bezeichnen f nur dann als wesentlich, wenn $f'(M) = N$ für jede zu f homotope Abbildung f'. Jede Abbildung, die nicht wesentlich ist, heisse unwesentlich. Da N als zusammenhängend vorausgesetzt ist, gilt für jeden Punkt a aus N: ist

$$f\colon\ M \to N$$

unwesentlich, so gibt es eine zu f homotope Abbildung

$$f^*\colon\ M \to N-a\,.$$

Das Schnittsystem von (f^*, a) ist offenbar leer. Daher enthält jedes nicht leere Schnittsystem von (f, a) nur Nullen. Oder: *befindet sich im Schnittsysteme von* (f, a) *wenigstens eine Zahl* $\neq 0$, *so ist* f *wesentlich.* Dabei ist hier wie oben gelegentlich von einem, gelegentlich von dem Schnittsystem von (f, a) die Rede, je nachdem f durch eine benachbarte Abbildung f'', für die $f''^{-1}(a)$ ein $(m-n)$-Polyeder ist, ersetzt zu denken ist oder bereits $f^{-1}(a)$ ein $(m-n)$-Polyeder darstellt.

Ersichtlich ist die Summe der Zahlen, aus denen das Schnittsystem besteht, eine Invariante gegenüber Deformationen. Ein einfaches *Beispiel* für eine Abbildung mit mehr als einer Homotopiekomponente sei noch angefügt:

Seien P_1, P_2, Q paarweis zueinander fremde 2-dimensionale Schlauchringe im 3-dimensionalen euklidischen Raume, a ein Punkt aus Q, a_i ein Punkt aus P_i und U_i eine kleine offene sphärische Umgebung von a_i in P_i. Wir verbinden $P_1 - U_1$ mit $P_2 - U_2$ durch einen beiderseits offenen Schlauch P, dessen Begrenzung also gleich $(\bar{U}_1 - U_1) \cup (\bar{U}_2 - U_2)$ ist. Sei $g \mid P_i - U_i$ eine stetige Abbildung auf Q derart, dass $g(\bar{U}_i - U_i) = a$ und $g \mid P_i - \bar{U}_i$ eine topologische Abbildung auf $Q - a$ ist. Der Schlauch P werde durch g auf eine in a beginnende und in a endende Kurve, die ein Grosskreis in Q ist, abgebildet. Durch eine kleine Deformation von g gewinnt man eine Abbildung

$$g'\colon\ (P_1 - U_1) \cup (P_2 - U_2) \cup P \to Q$$

derart, dass $g'^{-1}(a)$ aus nur endlich vielen Punkten besteht. Seien nun S eine Sphäre positiver Dimension, M das Produkt

$$M = \big((P_1 - U_1) \cup (P_2 - U_2) \cup P\big) \times S$$

und $N = Q$. Für $p \in M$ sei $\pi(p)$ der Basispunkt von p in

$$(P_1 - U_1) \cup (P_2 - U_2) \cup P\,,$$

hierauf $f(p) = g'\pi(p)$. Dann hat die Abbildung $f\colon\ M \to N$ bezüglich des Punktes a genau zwei Homotopiekomponenten.

Die Bedeutung von P_i, Q usw. sei die gleiche wie im letzten Absatz. Zum Beweis, dass (f, a) mindestens zwei Homotopiekomponenten hat, sei b_i für $i=1, 2$ ein Punkt aus $f^{-1}(a)$, der in $(P_i - U_i) \times S$ liegt. Es bezeichne $(d_\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ eine b_1 mit b_2 innerhalb M verbindende Kurve. Sei

$$a_i = \pi(b_i) \quad \text{und} \quad c_\tau = \pi(d_\tau) .$$

Wäre die geschlossene Kurve $\bigl(f(d_\tau), 0 \leqq \tau \leqq 1\bigr)$ innerhalb N nullhomotop, so wäre, da

$$f(d_\tau) = f\pi(d_\tau) = f(c_\tau) = g'(c_\tau)$$

gilt, $\bigl(g'(c_\tau), 0 \leqq \tau \leqq 1\bigr)$ gleichfalls in N nullhomotop. Dies trifft aber offenbar nicht zu.

6. Elimination des Bezugspunktes. Oben ist stets die Rede vom Schnittsysteme eines Paares (f, a), wobei a einen Punkt aus N und

$$f\colon \ M \to N$$

eine stetige Abbildung, für die das Urbild von a ein endliches $(m-n)$-Polyeder ist, bedeuten. Hält man a fest und deformiert f, so gelangt man zu einem neuen Schnittsystem. Doch ist dieses letztere zum alten äquivalent, wie oben gezeigt wurde. Wir wollen nun f festhalten und a durch einen anderen Punkt aus N ersetzen.

THEOREM 8. *Sind f: $M \to N$ eine stetige Abbildung, V eine n-Zelle in N und a, b Punkte aus V, weiter $f^{-1}(a)$ und ebenso $f^{-1}(b)$ ein endliches $(m-n)$-Polyeder. Dann sind die Schnittsysteme von (f, a) und (f, b) äquivalent.*

BEWEIS. Sei t eine topologische Abbildung von N auf sich, so dass $t(p)=p$ für alle $p \in N - V$ und $t(b)=a$. Dann ist die Abbildung

$$f' = tf$$

zu f homotop und

$$f'^{-1}(a) = f^{-1}(b) .$$

Sind daher A das Polyeder $f^{-1}(b)$, K eine simpliziale Zerlegung von A, B ein $(m-n)$-Simplex aus K und x eine Orientierung von B, so genügt es zum Beweis des obigen Satzes zu zeigen: die Überdeckungszahl von x bei (f, b) ist gleich der Überdeckungszahl von x bei (f', a). Dies folgt aber aus der topologischen Invarianz des Grades, wenn man auf die obige Erklärung der Überdeckungszahl zurückgeht.

THEOREM 9. *Sind f: $M \to N$ eine stetige Abbildung und a, b Punkte aus N, weiter $f^{-1}(a)$ und ebenso $f^{-1}(b)$ ein endliches $(m-n)$-Polyeder, so sind die Schnittsysteme von (f, a) und (f, b) äquivalent.*

Man kann nämlich, da N zusammenhängend ist, a und b durch Punkte

$a = c_1, c_2, \ldots, c_r = b$ derart verbinden, dass für $i = 2, \ldots, r$ eine n-Zelle V_i in N mit $c_{i-1} \cup c_i \subset V_i$ existiert.

THEOREM 10. *Sind f, g: $M \to N$ homotope Abbildungen und a, b Punkte aus N, weiter $f^{-1}(a)$ und ebenso $g^{-1}(b)$ ein endliches $(m-n)$-Polyeder, so sind die Schnittsysteme von (f, a) und (g, b) äquivalent.*

BEWEIS. Bezeichne U eine in M offene Menge mit

$$\overline{U} \cap g^{-1}(b) = 0 \qquad \text{und} \qquad g^{-1}(a) \subset U .$$

Nach Satz 2 gibt es dann eine zu g homotope Abbildung g' mit $g \mid M - U = g' \mid M - U$ derart, dass $g'^{-1}(a)$ ein endliches $(m-n)$-Polyeder ist.

Wie im vierten Abschnitt bemerkt wurde, sind die Schnittsysteme von (f, a) und (g', a) äquivalent. Die Schnittsysteme von (g', a) und (g', b) sind es nach Satz 9, die Schnittsysteme von (g, b) und (g', b) sind es wegen $\overline{U} \cap g^{-1}(b) = 0$ und $g \mid M - U = g' \mid M - U$.

Die Aussagen der Einleitung sind damit bewiesen. Bemerkt sei lediglich noch, dass man den zyklischen Charakter der über $f^{-1}(a)$ liegenden Kette ebenso beweist, wie etwa in [1] verwandte Aussagen über reziproke Punktbilder hergeleitet sind.

7. Zum Fall des Dimensionspaares $(2n-1, n)$. Glatter als im oben diskutierten Falle $(2n-2, n)$ gelangt man im Falle $(2n-1, n)$ zu invarianten Schnittsystemen. Hierauf hat mich Herr A. Jensen, Kopenhagen, aufmerksam gemacht. Weiter hatte ich ursprünglich die im zweiten Abschnitt definierten a-Klassen als Homologiekomponenten erklärt, die jetzt durch feinere Homotopiekomponenten ersetzt sind. Schliesslich lässt sich die obige Voraussetzung, die zugrundegelegten Mannigfaltigkeiten seien orientierbar, eliminieren, indem man die Definitionen und Sätze dieser Arbeit in den dualen Cohomologiering überträgt und dessen Eigenschaften, wie man sie in [5] dargelegt findet, ausnutzt.

Seien nun $n \geqq 3$ eine ganze Zahl, M eine $(2n-1)$-dimensionale und N eine n-dimensionale orientierte zusammenhängende geschlossene euklidische Mannigfaltigkeit, a ein Punkt aus N, f: $M \to N$ eine stetige Abbildung und $f^{-1}(a)$ ein endliches $(n-1)$-Polyeder A, ferner A_i die Komponenten von A. Über jedem A_i liegt, wie dies oben erläutert ist, ein ganzzahliger $(n-1)$-Zyklus X_i. Die X_i zerfallen in a-Klassen $z_1, \ldots, z_r$ wie im Fall $(2n-2, n)$.

Hierauf seien j, k zwei der Zahlen $1, \ldots, r$. Wenn erstens $z_j \nsim 0$ und $z_k \nsim 0$, so sei $\sigma(j, k) = 0$. Wenn zweitens $z_j \sim 0$ ist, so mögen zwei ganzzahlige n-Ketten C_1 und C_2 aus M mit $\delta C_1 = \delta C_2 = z_j$ zur gleichen Äquivalenzklasse gehören, falls $C_1 - C_2 \sim 0$. Dadurch zerfallen alle n-Ketten C aus M, die $\delta C = z_j$ erfüllen, in Äquivalenzklassen

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots .$$

Für alle r sei D_i eine Kette aus Δ_i und τ_i die Schnittzahl von (D_i, z_k). Offenbar ist τ_i durch (Δ_i, z_k) eindeutig bestimmt. Kommt die Zahl Null unter den τ_i vor, so setzen wir $\sigma(j, k) = 0$. Sind alle τ_i positiv, so setzen wir

$$\sigma(j, k) = \min(\tau_1, \tau_2, \ldots) .$$

Sind alle $\tau_i \neq 0$ und gibt es gleichzeitig $\tau_i < 0$, so sei $\sigma(j, k)$ das seinem Betrage nach kleinste negative τ_i. Wenn drittens $z_j \not\sim 0$ und $z_k \sim 0$, so bilde man die vorgenannten Äquivalenzklassen bezüglich z_k statt bezüglich z_j. Auf diese Weise erhält man ein Schnittsystem, das in einem leicht präzisierbaren Sinne feiner als das Schnittsystem des Falles $(2n-2, n)$ ist.

LITERATUR

1. S. Eilenberg, *On continuous mappings of manifolds into spheres*, Ann. of Math. 41 (1940), 662–673.
2. W. Hurewicz and H. Wallman, *Dimension theory*, (Princeton Math. Series 4) Princeton, 1948.
3. J. Nielsen, *Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen*, Acta Math. 50 (1927), 189–358, und 53 (1929), 1–76.
4. K. Reidemeister, *Topologie der Polyeder*, (Mathematik und ihre Anwendungen 17) Leipzig, 1953.
5. N. Steenrod, *Cohomology invariants of mappings*, Ann. of Math. 50 (1949), 954–988.

UNIVERSITÄT FREIBURG I BR., DEUTSCHLAND