MATH. SCAND. 7 (1959), 61–70

BEMERKUNGEN ÜBER HALBVERTAUSCHBARKEIT GANZER FUNKTIONEN

GUNNAR af HÄLLSTRÖM

1. Eine neulich erschienene Untersuchung von Baker über *Vertauschbarkeit* (Vtk) ganzer Funktionen [1] gab dem Verf. Anlass, frühere Untersuchungen über *Halbvertauschbarkeit* (Hvtk) von Polynomen [2] auf Fälle zu erweitern, in welchen wenigstens die eine Funktion transzendent ist. Wie im Polynomfall erweisen sich die Methoden der Iterationstheorie mit Ausnützung der Fixpunkte kaum bei Hvtk angemessen, was natürlich den Resultatbereich einengt. Nach Erwähnung einiger allgemeiner Eigenschaften der Hvtk (Nr. 2–3) geben wir unten erst einige allgemeine Sätze über Hvtk mit eingehender ganztranszendenter Komponente (Nr. 3–5). Dann zeigen wir, dass die linearen Polynome

$$h(z) = az+k$$

mit a gleich einer Einheitswurzel und k beliebig die einzigen Polynome sind, die mit ganzen transzendenten Funktionen $g(z)$ *halbvertauschbar* (hvt) sind (Nr. 6). Nach Baker ([1] Satz 6) sind dieselben h mit einem transzendenten g sogar *vertauschbar* (vt). Zugleich bestimmen wir alle zugehörigen $g(z)$. Schliesslich betrachten wir wie Baker die Exponentialfunktion nebst verwandten Funktionsklassen und finden, dass bei Übergang zu Hvtk sich als zweite Komponente auch andere Funktionen als lineare oder die Iterierten der gegebenen darbieten (Nr. 7–8).

2. Zwei Funktionen $g(z)$ und $h(z)$ heissen *halbvertauschbar* (hvt), falls

$$g\big(h(z)\big) \equiv L\big(h(g(z))\big), \qquad \text{kurz} \qquad gh = Lhg\,, \tag{1}$$

wobei L linear ist. Ist $L \equiv z$, so sind g und h *vertauschbar* (vt).

Es gilt (vgl. [3, Satz 8])

Satz 1. *Ist das lineare $l(z)$ mit $g(z)$ hvt, so ist l auch mit jeder Lineartransformation λg von g hvt.*

Aus der Annahme $gl = Llg$ folgt in der Tat

Eingegangen am 27. Januar 1959.

$$\lambda g l = \lambda L l g = \lambda L l \lambda^{-1} \lambda g = \lambda L l \lambda^{-1} l^{-1} l \lambda g \, ,$$

wobei ja $\lambda L l \lambda^{-1} l^{-1}$ linear ist.

Ist λ eine Lineartransformation, so sollen $g_1 = \lambda^{-1} g \lambda$ und $h_1 = \lambda^{-1} h \lambda$ *ähnliche Transformationen* von g und h heissen [4]. Unmittelbar folgt (vgl. [2] oder [3])

SATZ 2. *Sind g und h hvt, so sind es g_1 und h_1 auch.*

Nach [2, Satz 1–2] gilt der leicht beweisbare

SATZ 3. *Sind g und h hvt, so sind es g und $h(g)$ auch und umgekehrt.*

Daraus folgt im besonderen

SATZ 4. *Es ist $g(z)$ dann und nur dann mit $ag(z)+k$ hvt, wenn $g(z)$ mit $az+k$ hvt ist.*

3. Ist L in (1) ganz, mögen g und h *ganz hvt* heissen; ist L gebrochen, so nennen wir sie *gebrochen hvt*. Letzteres ist für zwei Polynome unmöglich. Ist wenigstens die eine Funktion transzendent, so kann der Fall eintreffen (z. B. $g = e^z$, $h = -z$ oder $-e^z$). Der folgende Satz schränkt dieses Alternativ beträchtlich ein.

SATZ 5. *Damit die ganzen Funktionen g und h gebrochen hvt seien, ist notwendig, dass die Pole von L und L^{-1} in (1) Ausnahmewerte von h bzw. g sind. Höchstens die eine Funktion darf den Wert in einem Punkt annehmen; dieser Punkt muss dann der Ausnahmewert der anderen Funktion sein.*

Sei in der Tat c der Pol von L. Nimmt $h(w)$ den Wert c an, so kann (1) mit ganzen g und h nicht gelten, sofern nicht $h(w)$ nur dann gleich c wird, wenn $w = g(z)$ keine Lösung hat. Schreibt man (1) in der Form $L^{-1} g h = h g$, so ergibt sich die Ergänzung des Beweises.

Da ein Polynom keinen endlichen Ausnahmewert besitzt, kann höchstens die eine Komponente ein Polynom sein. Es hat dann notwendig die Form

$$h(z) = a(z-b)^n + c \, . \tag{2}$$

Ist wieder $h(z)$ transzendent, so muss es die Form

$$h(z) = (z-b)^n e^{H(z)} + c \tag{3}$$

mit ganzem $H(z)$ haben. Denn $h-c$ hat höchstens eine Nullstelle b; sie sei n-fach. Dann ist

$$(z-b)^{-n}(h-c) \neq 0, \infty \, ,$$

der Logarithmus hiervon somit ganz. Ist $H(z)$ transzendent, so hat h unendliche Ordnung. Ist wieder H ein Polynom des Grades m, so hat h die Ordnung m. Also gilt

SATZ 6. *Ist eine transzendente ganze Funktion endlicher Ordnung mit einer anderen ganzen Funktion gebrochen hvt, dann ist die Ordnung eine positive ganze Zahl.*

4. Aus (1) ergibt sich $g'(h(z))\, h'(z) \equiv L'(h(g(z)))\, h'(g(z))\, g'(z)$. Da L' niemals verschwindet, liest man hieraus direkt aus:

SATZ 7. *Es seien g und h hvt. Ferner seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ die Nullstellen von $g'(z)$ und $\beta_1, \beta_2, \ldots$ diejenigen von $h'(z)$. Wenn dann ein β_n kein α_ν ist, so muss $g(\beta_n) = \beta_m$ mit geeignetem m sein. Wenn ferner $h(z) = \alpha_n$ ist, so ist notwendig $z = \alpha_m$ oder $g(z) = \beta_m$ für ein gewisses m.*

SATZ 8. *Sind die ganzen Funktionen g und h hvt, und hat g einen endlichen Picardschen Ausnahmewert b, so existiert ein endliches c, das h garnicht oder nur für $z = b$ annimmt.*

Für gebrochenes L ist die Aussage in Satz 5 enthalten. Es sei L ganz und $L(c) = b$. Es ist $gh \neq b$, somit $hg = L^{-1}gh \neq c$, also $h \neq c$ ausser für einen von g nicht angenommenen Wert, w. z. b. w.

In diesem Fall hat h wieder die Form (2) oder (3). In Analogie mit Satz 6 bekommen wir also

SATZ 9. *Eine ganze Funktion mit endlichem Ausnahmewert ist mit keiner ganzen Transzendenten verschwindender oder nichtganzer endlicher Ordnung hvt.*

5. SATZ 10. *Eine ganze transzendente Funktion $h(z)$ ist niemals mit einer gebrochenen rationalen $R(z)$ hvt. Desgleichen ist $h(z)$ nicht mit $R(h(z))$ hvt, auch nicht wenn $R(h(z))$ ganz wäre.*

Denn $R(h(z))$ hat nur $z = \infty$ als wesentliche Singularität, $h(R(z))$ dagegen jeden Pol von R. Satz 3 ergibt die zweite Aussage.

Damit $R(h(z))$ ganz sei, muss jeder Pol von R ein Ausnahmewert von h sein. Somit hat R nur einen endlichen Pol und also die Gestalt

$$R = P(z)(z-c)^{-n},$$

wo $P(z)$ ein Polynom mit $P(c) \neq 0$ ist. Für $h(z)$ gilt die Form (3) mit $n = 0$ und wir haben

SATZ 11. *Es ist $e^{H(z)} + c$ niemals mit $e^{-nH(z)} P(e^{H(z)})$ hvt (n ganz > 0, $P(0) \neq 0$).*

So ist e^{rz} mit keiner der Funktionen $\sinh rz$, $\cosh rz$ oder e^{-rz} hvt.

6. Satz 12. *Ein nichtkonstantes Polynom $h(z)$ ist dann und nur dann mit einer geeigneten ganzen transzendenten Funktion $g(z)$ hvt, wenn*

$$h(z) = az + k \tag{4}$$

und hierbei a eine Einheitswurzel ist.

Nach Baker ([1] Satz 6) gilt dies schon bei Vtk. Sein Beweis kann für unseren Zweck umgeformt und komplettiert werden. Als Hilfsmittel dient folgender:

Hilfssatz von Baker. *Es sei $f(z)$ ganz, $A > 0$, $B > 0$ und*

$$M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)| .$$

Gilt dann

$$M(Ar^n, f) < B\{M(r, f)\}^n$$

mit ganzem $n > 1$, so ist f ein Polynom.

Das Lemma folgt daraus, dass $d \ln M / d \ln r$ monoton ist und für transzendentes f gegen ∞ strebt.

Beweis von Satz 12. Erst seien g und h *gebrochen* hvt. Es seien c und b die Pole von L und L^{-1}, so dass $L(z) = b + \alpha/(z-c)$. Nach Nr. 3 hat h die Gestalt (2) und

$$g(z) = e^{G(z)} + b \tag{5}$$

mit ganzem G. Mit diesen Ausdrücken ergibt (1)

$$G(h(z)) \equiv 2K - nG(z) \tag{6}$$

mit beliebigem K als notwendige und hinreichende Bedingung für Hvtk.

Für $r > r_0$ gilt sowohl

$$\tfrac{1}{2}|a|\,r^n < |h(re^{i\varphi})| \qquad \text{wie} \qquad 2K < n\,M(r, G), \;\; M(r, G) > 1 ,$$

somit

$$\begin{aligned} M(\tfrac{1}{2}|a|\,r^n, G(z)) &< \max |G(h(re^{i\varphi}))| \\ &= |G(h(z_r))| \\ &= |2K - n\,G(z_r)| \\ &< 2n\,M(r, G(z)) \leqq 2n\{M(r, G)\}^n . \end{aligned}$$

Nach dem Hilfssatz muss $n = 1$ sein, wofern nicht $G(z)$ ein Polynom ist. Im letzten Fall hätten doch die Seiten von (6) verschiedene Gradzahlen, falls $n > 1$ wäre. Also $n = 1$, und h hat die Form (4).

Wir müssen zeigen, dass a eine Einheitswurzel ist. Das gilt, wenn $a = 1$ ist. Ist $a \neq 1$, so hat h den endlichen Fixpunkt $d = k/(1-a)$. Setzt man $\bar{G}(z) = G(z+d) - K$, so geht (6) in

$$\bar{G}(az) = -\bar{G}(z) \tag{7}$$

über. Ist $\bar{G}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$, so folgt aus (7), dass $a^m = -1$ für jedes m mit $c_m \neq 0$. Die notwendige Bedingung des Satzes verschärft sich also im Falle *gebrochener* Hvtk auf $a = 1$ oder $a = (-1)^{1/m}$. Im ersteren Fall muss $G(z)$ in (5) einer Gleichung

$$G(z+k) + G(z) \equiv 2K \tag{8}$$

genügen (die z. B. $G = \sin(\pi z/k) + K$ erfüllt). Im zweiten Fall ist die entsprechende Forderung

$$G(az+k) + G(z) \equiv 2K \tag{9}$$

dann und nur dann erfüllt, wenn für

$$a = \exp \frac{\pi i (2r+1)}{m} \qquad (2r+1,\ m \text{ teilerfremd}) \tag{10}$$

gilt $\bar{G}(y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu y^{(2\nu+1)m}$, also

$$G(z) = K + \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \left(z - \frac{k}{1-a}\right)^{(2\nu+1)m}. \tag{11}$$

Es ist umgekehrt leicht zu bestätigen, dass (5) mit $z+k$ gebrochen hvt ist, sobald (8) besteht, mit $az+k$, sobald (10) nebst (9) oder (11) gilt. Natürlich darf sich (11) auf ein Polynom reduzieren.

Jetzt seien g und h *ganz* hvt. Ist dann $L = \alpha z + \beta$, $h = \sum_0^n a_m z^m$ und g transzendent, so ergibt (1)

$$g(h) = \alpha \sum_0^n a_m g^m + \beta . \tag{12}$$

Ist z_r ein Punkt auf $|z| = r$, wo $|g(h(z))|$ maximal wird, so gilt wie oben für $r > r_0$ (vgl. [1, S. 141])

$$\begin{aligned} M(\tfrac{1}{2}|a_n| r^n, g) &< M(r, g(h)) \\ &= |\alpha \sum_0^n a_m g(z_r)^m + \beta| \\ &< 2|\alpha a_n| M(r, g)^n . \end{aligned}$$

Wegen des Hilfssatzes muss $n = 1$ sein, und aus (12) und (4) folgt als notwendige und hinreichende Bedingung

$$g(az+k) \equiv \gamma g(z) + \delta \qquad (\gamma \neq 0) . \tag{13}$$

Ist $a = 1$, so wird (13) z. B. von jeder k-periodischen Funktion befriedigt. Anderenfalls setzen wir $\bar{g}(z) = g(z+d)$. Dann erhält (13) die Form

$$\bar{g}(az) \equiv \gamma \bar{g}(z) + \delta . \tag{14}$$

Ist $\bar{g}(z)=\sum_{m=0}^{\infty} d_m z^m$, so ergibt (14) für jedes $m>0$ mit $d_m \neq 0$, deren es unendlich viele gibt, $a^m=\gamma$. Sind diese Werte $m_1, m_2, \ldots$, so hat man allgemein $a^{m_\nu - m_\mu}=1$, also a ist eine Einheitswurzel. Ist somit

$$(15) \qquad a = \exp \frac{2\pi r i}{m} \neq 1 \qquad (r, m \text{ teilerfremd}),$$

so muss also $\bar{g}(z)=d_0+z^s \sum_{\nu=0}^{\infty} d_{s+\nu m} z^{\nu m}$ sein, um (14) zu befriedigen. Die Bedingung ist auch genügend, indem jedes g der Form

$$(16) \qquad g(z) = d_0 + \sum_{\nu=0}^{\infty} e_\nu \left(z - \frac{k}{1-a}\right)^{s+\nu m} \qquad (m > 1)$$

(13) und somit (1) befriedigt.

Hiermit ist der Beweis von Satz 12 beendet. Zugleich haben wir die folgende präzisierte Aussage gewonnen:

Satz 13. *Mit $h=az+k$ sind im Falle* (15) *exakt die Transzendenten g aus* (16) *ganz hvt, für $a=1$ diejenigen g, die mit geeigneten γ und δ*

$$(17) \qquad g(z+k) \equiv \gamma g(z) + \delta$$

erfüllen. Gebrochen hvt mit h sind Funktionen der Form (5), *und zwar im Fall* (10) *diejenigen mit $G(z)$ aus* (11), *für $a=1$ wieder solche mit* (8) *genügendem $G(z)$.*

Wir heben den Fall $a=-1$ hervor, setzen also $m=2$ in (16) und $m=1$ in (11) und bekommen

Satz 14. *Notwendig und hinreichend, damit die ganze Transzendente $g(z)$ mit $h=k-z$ (ganz bzw. gebrochen) hvt sei, ist, dass entweder*

$$g(z) = d_0 + g_0(z)$$

mit $g_0(z)$ gerade oder ungerade in $z-\frac{1}{2}k$ oder aber dass

$$g(z) = c e^{G(z)} + b$$

mit $G(z)$ ungerade in $z-\frac{1}{2}k$ ist.

Unter Heranziehung von Satz 3 ergeben die Sätze 12–14

Satz 15. *Es ist $g(z)$ niemals mit $P(g(z))$ hvt, wenn g ganz transzendent und P ein nichtlineares Polynom sind. Die Fälle, in welchen $g(z)$ mit $ag(z)+k$ und im besonderen mit $k-g(z)$ hvt ist, sind die in den Sätzen* 13 *und* 14 *verzeichneten.*

7. Die Funktion

$$(18) \qquad g = Ae^{rz} + B$$

ist für kein $m \neq 1$ von Form (16), erfüllt aber (17) für jedes k. Sie ist von der Form (5) und befriedigt dann nicht (8), wohl aber (11) für $m=1$. Nach Satz 12–13 gilt darum

SATZ 16. *Hvt mit* (18) *sind* $h=z+k$ (*ganz*) *sowie* $h=k-z$ (*gebrochen*), *aber sonst keine Polynome. Hier ist k beliebig.*

Schon aus Satz 4 ergibt sich im Fall $\varrho=r$ der

SATZ 17. *Für* $A\alpha r\varrho \neq 0$ *sind* (18) *und* $h=\alpha e^{\varrho z}+\beta$ *dann und nur dann hvt, wenn* $\varrho=r$ *und* $\alpha=\pm A$ *gilt.*

Es muss also noch gezeigt werden, dass bei Hvtk $\varrho=r$ gilt. Gleichung (1) ergibt bei ganzer bzw. gebrochener Hvtk, wenn in diesem Fall Satz 5 beachtet wird,

$$\exp r\alpha e^{\varrho z} \equiv K + q \exp(\pm \varrho A e^{rz}) .$$

Wenn man differenziert, logarithmiert, zweimal differenziert und schliesslich logarithmiert, bekommt man $\varrho z \equiv rz+k$, also $\varrho=r$.

Die Sätze 16 und 17 zeigen eine Abweichung von den Verhältnissen bei Vtk, indem (18) nur mit einer passenden Konstante, mit z und mit den Iterationen von g vt ist [1, Satz 8]. Andererseits folgt allgemein aus Vtk von g und h, dass h auch mit allen Iterierten von g vt ist. Wenn dagegen g und h hvt sind, *brauchen die Iterierten von g nicht mit h hvt zu sein.* So ist z. B. $k-z$ nie und $z+k$ nur dann mit der Iterierten gg von (18) hvt, wenn $rk=\pi i n$ ist. Das folgt aus

SATZ 18. *Notwendig und hinreichend, damit*

$$g = C \exp de^{rz} + B$$

mit $h=az+k$ *hvt sei, ist, dass* $a=1$ *und* $kr=\pi i n$ *mit ganzem n ist.*

Wegen Satz 1 darf man $C=1$, $B=0$ nehmen. In (5) ist $G=de^{rz}$. Nirgends ist $g'=0$; dann wäre nähmlich $s=1$ in (16), und g'' müsste gleichzeitig mit g''' oder $g^{(4)}$ verschwinden, und das trifft nicht zu. Ferner ist nirgends $G'=0$ oder $G''=0$, und g und G können so keine Taylorentwicklungen der Form (16) bzw. (11) haben. Satz 13 ergibt dann $a=1$. Damit hierbei

$$gh = \exp(de^{rk}e^{rz}) \qquad \text{und} \qquad hg = k + \exp de^{rz}$$

Lineartransformationen voneinander seien, ist offenbar notwendig und hinreichend, dass $e^{rk}=\pm 1$, w. z. b. w.

Als unmittelbare Folge der Sätze 11, 15 und 17 haben wir

SATZ 19. *Mit* $\sum_{\nu=-m}^{n} c_\nu e^{\nu r z}$ *ist* (18) *exakt dann hvt, wenn* $c_1=\pm A$ *oder* 0, c_0 *beliebig und alle übrigen* $c_\nu=0$ *sind.*

8. Als Erweiterung von (18) und nachfolgender Ausschliessung von (18) selbst betrachten wir die Funktionsklasse $F_r = F_{-r}$:

$$(19) \qquad g(z) = Ae^{rz} + B + Ce^{-rz} \qquad \text{mit} \qquad AC \neq 0 \,.$$

Die Klasse F_{ir} enthält offensichtlich alle nichtdegenerierten Funktionen

$$g(z) = \sum \alpha_\nu \sin(rz + a_\nu) + \sum \beta_\nu \cos(rz + b_\nu) + B \,,$$

und jede Funktion aus F_{ir} lässt sich schon in der Form

$$(20) \qquad g(z) = \alpha \sin rz + \beta \cos rz + B = c \cos(rz + b) + B$$

mit $\alpha \neq \pm i\beta$ bzw. $c \neq 0$ darstellen.

Mit welchen Polynomen $h(z)$ sind nun die Funktionen aus F_r bzw. F_{ir} hvt? Gebrochene Hvtk kommt erstens nicht in Frage, weil g keinen endlichen Ausnahmewert hat. Nur mit $m = 2$ wird (16) und (20) erfüllt. Wegen der Sätze 12 und 13 ist dann notwendig $h = k \pm z$. Aus der ersten Aussage von Satz 7 (mit g und h vertauscht) finden wir

$$k \pm \frac{\pi n - b}{r} = \frac{\pi m - b}{r} \,.$$

Somit hat k die Form $\pi\nu/r$ bzw. $(\pi\nu - 2b)/r$. Man stellt auch leicht fest, dass für diese k-Werte $k \pm z$ mit (20) hvt ist. Somit gilt

Satz 20. *Mit* (20) *hvt sind exakt die Polynome*

$$h = z + \frac{\pi\nu}{r} \qquad \textit{und} \qquad h = \frac{\pi\nu - 2b}{r} - z$$

mit ganzem ν. *Mit* (19) *hvt sind entsprechend*

$$h = z + \frac{\pi\nu i}{r} \qquad \textit{und} \qquad h = \frac{\pi\nu i}{r} + \frac{1}{r}\ln\frac{C}{A} - z \,.$$

Im letzteren Fall erhält man die Konstante wie oben oder durch Einsetzen in (1).

Nach Satz 19 ist (18) mit keiner Funktion aus F_r hvt. Wann sind zwei Funktionen aus F_r untereinander hvt? Sind sie Lineartransformationen voneinander, so ergibt Satz 20 unter Beachtung von Satz 4 die Antwort. Diese Antwort ist in der Tat die endgültige, denn wir wollen zeigen, dass zwei hvte Funktionen aus F_r notwendig voneinander linear abhängen. Da lineare Abhängigkeit in bezug auf Ähnlichkeitstransformation invariant ist, gehen wir von (20) durch

$$\lambda^{-1} = rz + b \qquad \text{zu} \qquad g_1 = c_1 \cos z + B_1$$

über. Auf (19) angewandt bedeutet das, dass wir

$$g(z) = B + Ae^z + Ce^{-z}\,,$$
$$h(z) = D + E(e^z+e^{-z}) = D + 2E\cosh z$$

mit $ACE \neq 0$ annehmen dürfen. Ferner darf man $\mathrm{Re}\,E \geqq 0$ und bei Gleichheit $\mathrm{Im}\,E > 0$ annehmen, denn sonst mache man durch $\lambda = -z$ noch eine Ähnlichkeitstransformation. Wie oben muss bei Hvtk L ganz sein, also

$$hg = m\cdot gh + c \qquad \text{und somit} \qquad \lim_{gh\to\infty} \frac{hg}{gh} = m \neq 0, \infty\,.$$

Für $\mathrm{Re}\,E > 0$ gilt dann

$$\text{(21)} \qquad \lim_{z\to+\infty} \frac{hg}{gh} = \frac{E}{Ae^D} \lim_{z\to+\infty} e^{-Ee^z}(e^B e^{Ae^z} + e^{-B} e^{-Ae^z}) = m\,,$$

$$\text{(22)} \qquad \lim_{z\to-\infty} \frac{hg}{gh} = \frac{E}{Ae^D} \lim_{z\to-\infty} e^{-Ee^{-z}}(e^B e^{Ce^{-z}} + e^{-B} e^{-Ce^{-z}}) = m\,.$$

Nun gilt (21) nur wenn $A = \pm E$ ist, (22) für $C = \pm E$. Zweitens sei $\mathrm{Re}\,E = 0$. Dann ist gh für reelles z beschränkt, hg dagegen nicht, wenn nicht zugleich $\mathrm{Re}\,A = \mathrm{Re}\,C = 0$. Wir müssen letzteres voraussetzen, bezeichnen $z = x + \frac{1}{2}\pi i$ und lassen $x \to \pm\infty$ streben. Dann ergibt sich wie oben $A = \pm E$, $C = \pm E$.

Im Fall $A = C = \pm E$ sind schon g und h linear verbunden. Übrig bleibt der Fall $A = -C = \pm E$, also

$$g(z) = B \pm 2E\sinh z\,.$$

In Satz 7 ist $\alpha_n = (n+\frac{1}{2})\pi i$, $\beta_n = \pi i n$. Der Satz ergibt

$$B = \pi i m, \qquad D = (m' + \tfrac{1}{2})\pi i$$

mit m und m' ganz. Dann wird

$$gh = B \pm 2Ei(-1)^{m'}\cosh(2E\cosh z)\,,$$
$$hg = D + 2E(-1)^m \cosh(2E\sinh z)\,,$$

und diese Ausdrücke sind gewiss nicht im Sinne (1) linear verbunden.

Aus Satz 4 und Satz 20 erhalten wir somit

Satz 21. *Zwei Funktionen g und h aus F_r sind dann und nur dann hvt, wenn*

$$h = g + \frac{\pi \nu i}{r} \qquad \textit{oder} \qquad h = -g + \frac{1}{r}\left(\ln\frac{C}{A} + \pi\nu i\right),$$

wobei g den Ausdruck (19) *hat.*

LITERATUR

1. I. N. Baker, *Zusammensetzungen ganzer Funktionen*, Math. Zeitschr. 69 (1958), 121–163.
2. G. af Hällström, *Über halbvertauschbare Polynome*, Acta Acad. Aboensis, math. et phys., 21 no. 2 (1957), 1–20.
3. G. af Hällström, *Über Halbvertauschbarkeit zwischen linearen und allgemeineren rationalen Funktionen*, Math. Japon. 4 (1957), 107–112.
4. E. Jacobsthal, *Über vertauschbare Polynome*, Math. Zeitschr. 63 (1955), 243–276.

ÅBO AKADEMI, FINNLAND