MATH. SCAND. 7 (1959), 211–218

UNE CARACTÉRISATION ABSTRAITE DES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS

JAAK PEETRE

La définition usuelle des opérateurs différentiels sur une variété indéfiniment différentiable fait intervenir explicitement des cartes. Cependant, il serait souvent utile de connaître une définition intrinsèque. Dans cet article, nous allons donner un résultat dans cette direction. Il sera convenable d'utiliser le langage de la théorie des faisceaux (voir Godement [2]). Pour la convenance du lecteur, nous commençons, dans le no. 1, avec un exposé rapide de la notion du faisceau. Dans le no. 2, nous démontrons que tout homomorphisme du faisceau d'espaces vectoriels $\tilde{\mathscr{E}}$ des fonctions indéfiniment différentiables dans lui-même est un opérateur différentiel au sens usuel, le réciproque étant évident. Bien entendu, le résultat analogue pour le faisceau d'espaces vectoriels topologiques correspondent, y formellement compris, est une conséquence assez facile du théorème des noyaux de Schwartz [3].

Notons que les méthodes de la théorie des faisceaux ont été appliquées à la théorie des opérateurs différentiels par Ehrenpreis [1]. Nous croyons que notre théorème éclairera quelques points du travail d'Ehrenpreis.

1. Généralités sur les faisceaux. Le faisceau $\tilde{\mathscr{E}}$. Soit X un espace topologique. On dit qu'on a un pré-faisceau d'espaces vectoriels (sur $\boldsymbol{R}$ ou $\boldsymbol{C}$) $\tilde{\mathscr{A}}$ sur X, si l'on se donne, pour chaque ouvert non-vide Ω de X, un espace vectoriel $\mathscr{A}(\Omega)$ et, pour chaque couple (Ω, Ω') d'ouverts non-vides de X avec $\Omega \supset \Omega'$, une application linéaire $\varrho(\Omega, \Omega')$ de $\mathscr{A}(\Omega)$ dans $\mathscr{A}(\Omega')$ dans une telle manière que l'axiome suivant est satisfait.

(i) *Si $\Omega \supset \Omega' \supset \Omega''$, alors on a*

$$\varrho(\Omega', \Omega'') \circ \varrho(\Omega, \Omega') = \varrho(\Omega, \Omega'') .$$

Pour tout Ω, l'application $\varrho(\Omega, \Omega)$ est l'application identique de $\mathscr{A}(\Omega)$ sur lui-même.

Etant donnés des pré-faisceaux d'espaces vectoriels $\tilde{\mathscr{A}}$ et $\tilde{\mathscr{B}}$ sur X, on

Reçu le 30 juin, 1959.

dit qu'on a un *homomorphisme* P de $\tilde{\mathscr{A}}$ dans $\tilde{\mathscr{B}}$, si l'on se donne pour tout ouvert non-vide Ω, une application linéaire $P(\Omega)$ de $\mathscr{A}(\Omega)$ dans $\mathscr{B}(\Omega)$ dans une telle manière que l'axiome suivant est satisfait.

(i') *Pour toute couple* (Ω,Ω') *d'ouverts non-vides avec* $\Omega' \subset \Omega$, *on a*

$$\sigma(\Omega, \Omega') \circ P(\Omega) = P(\Omega') \circ \varrho(\Omega, \Omega') .$$

(Autrement dit: Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{A}(\Omega) & \xrightarrow{\varrho(\Omega,\Omega')} & \mathscr{A}(\Omega') \\ {\scriptstyle P(\Omega)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle P(\Omega')} \\ \mathscr{B}(\Omega) & \xrightarrow{\sigma(\Omega,\Omega')} & \mathscr{B}(\Omega') \end{array}$$

est commutatif).

Les éléments de $\mathscr{A}(\Omega)$ sont souvent appelés les *sections* de $\tilde{\mathscr{A}}$ au-dessus de Ω. L'application $\varrho(\Omega,\Omega')$ est appelée *l'opération de restriction* de $\tilde{\mathscr{A}}$ de Ω dans Ω'. La somme $P+Q$ de deux homomorphismes P et Q de $\tilde{\mathscr{A}}$ dans $\tilde{\mathscr{B}}$ est encore un homomorphisme de $\tilde{\mathscr{A}}$ dans $\tilde{\mathscr{B}}$. Le produit λP d'un homomorphisme P de $\tilde{\mathscr{A}}$ dans $\tilde{\mathscr{B}}$ par un scalaire λ est également un homomorphisme de $\tilde{\mathscr{A}}$ dans $\tilde{\mathscr{B}}$. Si Y est une partie ouverte de X, alors on définit la restriction $\tilde{\mathscr{A}}\,|\,Y$ de $\tilde{\mathscr{A}}$ à Y. On dit qu'un pré-faisceau $\tilde{\mathscr{A}}$ est un *faisceau*, si les axiomes suivants sont satisfaits.

(ii) *Soit* $f \in \mathscr{A}(\Omega)$. *S'il existe un recouvrement ouvert* $\{\Omega_i\}$ *de* Ω, *tel que* $\varrho(\Omega,\Omega_i)(f)=0$ *pour tout* i, *alors on a* $f=0$.

(iii) *Soit* $\{\Omega_i\}$ *un recouvrement ouvert de* Ω. *Soit* $\{f_i\}$ *une famille de sections* f_i *au-dessus de* Ω_i *telle que*

$$\varrho(\Omega_i, \Omega_i \cap \Omega_j)(f_i) = \varrho(\Omega_j, \Omega_i \cap \Omega_j)(f_j)$$

pour toute couple (i,j) *avec* $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$. *Alors, il existe* $f \in \mathscr{A}(\Omega)$ *tel que* $\varrho(\Omega,\Omega_i)(f)=f_i$.

Soit $\tilde{\mathscr{A}}$ un faisceau; soit A une partie quelconque non-vide de X, alors on définit encore $\mathscr{A}(A)$ par la formule

$$\mathscr{A}(A) = \operatorname*{lim.ind.}_{\Omega \subset A} \mathscr{A}(\Omega) .$$

Cette définition est évidemment consistante avec la notation employée jusqu'ici. De même, on introduit $\varrho(\Omega,A)$, Ω ouvert $\supset A$. Si A se réduit à un point x de X, c'est-à-dire $A=\{x\}$, on écrit $\mathscr{A}_x$ au lieu de $\mathscr{A}(\{x\})$ et

$\varrho_{\Omega,x}$ au lieu de $\varrho(\Omega,\{x\})$. L'espace $\bigcup_{x\in X}\mathscr{A}_x$ peut être muni d'une topologie dans une manière naturelle. Inversement, on peut définir la notion du faisceau à partir d'espaces du type $\bigcup_{x\in X}\mathscr{A}_x$. Etant donné un homomorphisme P de $\tilde{\mathscr{A}}$ dans un autre faisceau $\tilde{\mathscr{B}}$, on peut encore définir $P(A)$, application linéaire de $\mathscr{A}(A)$ dans $\mathscr{B}(A)$, pour n'importe quelle partie non-vide A de X. En particulier, on a donc pour tout $x\in X$ une application P_x de $\mathscr{A}_x$ dans $\mathscr{B}_x$. P donne alors naissance à une application de $\bigcup_{x\in X}\mathscr{A}_x$ dans $\bigcup_{x\in X}\mathscr{B}_x$ et on peut démontrer que cette application est continue et respecte la structure algébrique.

Exemples. Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser uniquement au cas où X est une variété indéfiniment différentiable. Prenons alors pour $\mathscr{A}(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables au dessus de Ω (à valeures dans $\boldsymbol{R}$ ou $\boldsymbol{C}$), $\mathscr{E}(\Omega)$, et pour $\varrho(\Omega,\Omega')$ l'opération de restriction usuelle. On vérifie immédiatement qu'on arrive ainsi à un faisceau sur X. Ce faisceau sera appelé le *faisceau des fonctions indéfiniment différentiables* sur X et noté $\tilde{\mathscr{E}}$. En remplaçant ci-dessus le mot « fonction indéfiniment différentiable « par le mot « distribution «, on arrive de même à un faisceau qui sera appelé le *faisceau des distributions* sur X et noté $\tilde{\mathscr{D}}'$.

2. Homomorphismes de $\tilde{\mathscr{E}}$ dans lui-même. Voici notre résultat principal.

Théorème. *Soit X une variété indéfiniment différentiable à n dimensions. Tout homomorphisme P du faisceau d'espaces vectoriels $\tilde{\mathscr{E}}$ dans lui-même est un opérateur différentiel au sens usuel: Il existe, pour tout $x\in X$, une carte $(\Omega,\varkappa)$ telle que*

$$P|\Omega = \sum_{\alpha} a^{\alpha}(\partial/\partial x)_{\alpha}$$

avec $a^{\alpha}\in\mathscr{E}(\Omega)$, la famille $\{a^{\alpha}\}$ étant localement finie, c'est-à-dire si $f\in\mathscr{E}(\Omega')$ et $\Omega'\subset\Omega$, alors on a

$$P(\Omega')f = \sum_{\alpha} (a^{\alpha}|\Omega')(\partial/\partial x)_{\alpha}\,.$$

(On y utilise la notation de l'algèbre non-symétrique: α désigne une suite d'indices, $\alpha=\alpha_1,\ldots,\alpha_p$, chaque α_i étant un entier compris entre 1 et n).

Remarque. Il résulte du théorème que chaque homomorphisme de $\tilde{\mathscr{E}}$, considéré comme faisceau d'espaces vectoriel, est aussi un homomorphisme de $\tilde{\mathscr{E}}$, considéré maintenant comme faisceau d'espaces vectoriels topologiques. Dans ce cas, on peut déduire le résultat directement, en utilisant le théorème des noyaux de Schwartz [3]. On peut alors aussi traiter le cas de $\tilde{\mathscr{D}}'$, considéré comme faisceau d'espaces vectoriels topologiques. Par contre, nous ignorons la réponse pour $\tilde{\mathscr{D}}'$, considéré comme faisceau d'espaces vectoriels.

Nous commençons avec quelques considérations généraux (pas strictement indispensables pour ce qui suit).

Soit E un espace topologique, séparé ou non. Considérons la relation R définie par la formule

$$x \, R \, y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{Pour tout voisinage } U \text{ de } x \text{ et tout} \\ \text{voisinage } V \text{ de } y\text{, on a } U \cap V \neq \emptyset \,. \end{cases}$$

On note qu'on a

i) $x \, R \, x$,
ii) $x \, R \, y \Rightarrow y \, R \, x$.

Au contraire, en général, on n'a pas

iii) $x \, R \, y$ et $y \, R \, z \Rightarrow x \, R \, z$,

c'est-à-dire R, n'est pas une relation d'équivalence. Désignons alors par R^* la relation d'équivalence engendrée par R. C'est la plus petite relation qui satisfait à i), ii) et iii) et qui contient R,

$$x \, R^* \, y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{Il existe une suite } (t_i)_{1 \leqq i \leqq n} \text{ d'éléments de } E, \\ \text{avec } t_1 = x \text{ et } t_n = y, \text{ telle que } t_{i-1} R t_i \text{ pour} \\ \text{chaque } i \; (1 \leqq i \leqq n) \end{cases}$$

R^* (ou bien R) est égale à Δ (Δ, le diagonale de $E \times E$) si, et seulement si E est séparé. Considérons l'espace quotient

$$_*E = E/R^* \,.$$

Si f est une application continue de E dans lui-même, alors il existe une application $_*f$, et une seule, de $_*E$ dans lui-même telle que $p \circ f = {_*f} \circ p$, p étant la projection de E sur E/R^*. On peut démontrer que $_*f$ est continue. On a le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[d, dashed, "p"'] & E \arrow[d, dashed, "p"] \\ {_*E} \arrow[r, dashed, "{_*f}"] & {_*E} \end{tikzcd}$$

On se donne maintenant un faisceau d'espaces vectoriels $\tilde{\mathscr{A}}$ sur un espace topologique X. On considère alors l'espace $\bigcup_{x \in X} \mathscr{A}_x$, noté encore $\tilde{\mathscr{A}}$. Alors, $a \, R \, b$ signifie que a) a et b appartiennent au même fibre $\mathscr{A}_{x_0}$, et b) si f et g sont deux sections au dessus d'un voisinage ouvert Ω de x_0 avec $\varrho_{\Omega, x_0}(f) = a$ et $\varrho_{\Omega, x_0}(g) = b$, alors x_0 appartient à l'adhérence de l'ensemble

$$\{x \mid f(x) = g(x)\}\,.$$

On a aussi une description analogue pour R^*. Nous allons envisager l'espace quotient

$$_*\Big(\bigcup_{x\in X} \mathscr{A}_x\Big) = \bigcup_{x\in X} \mathscr{A}_x/R^*\,.$$

On se donne maintenant un homomorphisme P de $\tilde{\mathscr{A}}$. On sait que P donne naissance à une application continue de $\bigcup_{x\in X}\mathscr{A}_x$ dans lui-même, notée encore par la même lettre P. On peut donc notamment former l'application $_*P$. On voit que $_*P$ respecte la structure algébrique de $_*(\bigcup_{x\in X}\mathscr{A}_x)$.

Nous pouvons maintenant donner la démonstration de notre théorème. La méthode que nous allons employer sera de calculer, dans notre cas concret, explicitement $_*\tilde{\mathscr{A}}$ et $_*P$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. On prend donc $X =$ variété indéfiniment différentiable à n dimensions et $\tilde{\mathscr{A}} = \tilde{\mathscr{E}} =$ le faisceau d'espaces vectoriels des fonctions indéfiniment différentiables sur X. Parce qu'il s'agit d'une affaire tout à fait locale, il suffit d'envisager la situation du point de vue d'une carte $(\Omega, \varkappa)$ fixe. Nous allons voir qúon a canoniquement

$$_*\Big(\bigcup_{x\in \Omega} \mathscr{E}_x\Big) \approx \Omega \times \prod_{\alpha} C^{\alpha}\,,$$

au moins au sens algébrique. En effet, étant données des fonctions f et g de $\mathscr{E}(\Omega)$, des représentants de deux éléments de $\mathscr{E}_{x_0}$, x_0 point de Ω fixe, il s'agit de démontrer que la condition b) équivaut à

$$(\partial/\partial x)_\alpha f(x_0) = (\partial/\partial x)_\alpha g(x_0), \quad \text{pour toute } \alpha\,.$$

Or ceci va suivre du lemme suivant.

LEMME 1. *Soit S_0 et S_1 des parties disjointes fermées de la sphère $|x| = 1$ dans $\boldsymbol{R}^n$. Alors, il existe une fonction φ, satisfaisant aux conditions suivantes.*

i) *φ est indéfiniment différentiable en dehors de l'origine.*
ii) $(\partial/\partial x)_\alpha \varphi = O(|x|^{-|\alpha|})$, $x \to 0$, *pour toute* α.
iii) $\varphi(x) = \begin{cases} 0 \text{ pour } x/|x| \in S_0\,, \\ 1 \text{ pour } x/|x| \in S_1\,. \end{cases}$

En outre on a ceci: Si f est une fonction indéfiniment différentiable avec $(\partial/\partial x)_\alpha f(0) = 0$, toute α, alors la fonction φf est encore indéfiniment différentiable dans $\boldsymbol{R}^n$ entier.

En effet, si l'on a $f\,R\,g$ (même raisonnement pour $f\,R^*\,g$!), alors on voit que x_0 appartient à l'adhérence de l'intérieur de l'ensemble

$$\{x \mid f(x) = g(x)\}\,,$$

et donc aussi, pour toute α, à l'adhérence de l'intérieur de l'ensemble

$$\{x \mid (\partial/\partial x)_\alpha f(x) = (\partial/\partial x)_\alpha g(x)\}\,,$$

ce qui entraine

$$(\partial/\partial x)_\alpha f(x_0) = (\partial/\partial x)_\alpha g(x_0)\,, \quad \text{toute } \alpha\,.$$

Inversement, si cette condition est remplie, on peut toujours arranger qu'on a

$$(\partial/\partial x)_\alpha f(x_0) = (\partial/\partial x)_\alpha g(x_0) = 0\,, \quad \text{toute } \alpha\,,$$

en appliquant un théorème classique de Borel, et on trouve, φ étant la fonction définie par le lemme 1, avec S_0 et S_1 quelconques, tous les deux non-vides,

$$f\,R\,\big(f+(1-\varphi)g\big) \quad \text{et} \quad \big(f+(1-\varphi)g\big)\,R\,g\,,$$

d'ou

$$f\,R^*\,g\,.$$

Soit maintenant P un homomorphisme de $\tilde{\mathscr{E}}$ dans lui-même. Alors, $_*P$ applique $_*\tilde{\mathscr{E}}$ dans lui-même. Or tout homomorphisme (algébrique) de l'espace fibré $_*(\tilde{\mathscr{E}}\mid\Omega)$ dans lui-même est de la forme

$$\big(c_\alpha(x)\big) \to \Big(\sum_\alpha a^{\alpha\beta}(x)\,c_\beta(x)\Big)\,.$$

En particulier, on trouve, en posant $g = Pf$,

$$g(x) = \sum_\alpha a^\alpha(x)\ (\partial/\partial x)_\alpha f(x)\,, \quad x \in \Omega\,,$$

ou

$$g = \sum_\alpha a^\alpha(\partial/\partial x)_\alpha f$$

pour une famille $\{a^\alpha\}$ de fonctions convenable, finie à chaque point $x \in \Omega$. Il nous reste donc encore de vérifier deux choses:

1° que la famille $\{a^\alpha\}$ est même localement finie, et

2° que chaque a^α appartient à $\mathscr{E}(\Omega)$.

La validité de 2° est presque évidente; en prenant f égale à un monome x^α, on voit qu'on peut argumenter par récurrence sur $|\alpha|$. Envisageons donc 1°. Désignons par μ_x l'ordre de la famille $\{a^\alpha\}$ au point x, c'est-à-dire le plus petit entier μ tel que $a^\alpha(x) = 0$ pour $|\alpha| > \mu$. Nous allons démontrer que, pour tout compact K de Ω, on a

$$\sup_{x \in K} \mu_x < \infty\,.$$

En effet, si l'on avait

$$\sup_{x \in K} \mu_x = \infty ,$$

alors, il existerait une suite (x_i) de points de K telle que (μ_{x_i}) tend vers l'infini. Nous pouvons supposer que (x_i) converge vers un élément x de K, et que $x_i \neq x$, pour $i \neq j$. Il existe alors une suite (α_i) telle que $a^{\alpha_i}(x_i) \neq 0$ et $|\alpha_i| = \mu_{x_i}$. Nous allons maintenant appliquer le lemme suivant.

LEMME 2. *Soient (x_i) une suite d'éléments de Ω qui converge vers un point x de Ω, (α_i) une suite de suites d'indices telle que $(|\alpha_i|)$ tend vers l'infini, (c_i) n'importe quelle suite de nombres complexes. Alors, il existe une fonction indéfiniment différentiable f au dessus de Ω qui jouit des propriétés suivantes.*

i) $(\partial/\partial x)_\alpha f(x_i) = \begin{cases} c_i & \textit{pour } \alpha = \alpha_i , \\ 0 & \textit{pour } \alpha \neq \alpha_i, \ |\alpha| \leqq |\alpha_i| . \end{cases}$

ii) $(\partial/\partial x)_\alpha f(x) = 0$ *pour toute* α .

En effet, prenons $c_i = \big(a^\alpha(x_i)\big)^{-1}$. Alors, on a d'une part $(Pf)(x_i) = 1$, d'autre part $(Pf)(x) = 0$, ce qui donne une contradiction, puisque Pf est indéfiniment différentiable, donc a fortiori continue. Le théorème est ainsi démontré.

Il nous reste encore de donner les démonstrations des lemmes utilisés ci-dessus.

DÉMONSTRATION DU LEMME 1. Il existe, sur $|x| = 1$, considéré comme variété indéfiniment différentiable, une fonction indéfiniment différentiable Φ telle que $\Phi(S_0) = 0$ et $\Phi(S_1) = 1$. Posons $\varphi(x) = \Phi(x/|x|)$. Alors, φ est indéfiniment différentiable en dehors de l'origine (ceci démontre i)), satisfaisant par définition à ii) et à iii). La dernière partie du lemme résulte aisement de la formule de Taylor.

DÉMONSTRATION DU LEMME 2. On va construire récursivement une suite (f_i) de fonctions indéfiniment différentiables qui jouit des propriétés suivantes.

α) $(\partial/\partial x)_\alpha f_i(x_i) = \begin{cases} c_i & \text{pour } \alpha = \alpha_i , \\ 0 & \text{pour } \alpha \neq \alpha_i, \ |\alpha| \leqq |\alpha_i| . \end{cases}$

β) $|(\partial/\partial x)_\alpha f_i(x')| \leqq 2^{-i}$ pour $|\alpha| < |\alpha_i|$, $x' \in \Omega$.

γ) Le support de f_i ne recontre ni les supports de f_j avec $j < i$, ni x ou les x_j avec $j > i$.

Cette construction étant achevée, le lemme en va résulter aussitôt: On voit que la fonction

$$f = \sum_i f_i$$

répond aux demandes du lemme. En effet, f est indéfiniment différentiable en dehors du point x et, parce que $\left((\partial/\partial x)_\alpha f(x')\right)$ converge vers 0 pour toute α lorsque x' tend vers x, aussi au point x. On a aussi i) du lemme 2:

$$(\partial/\partial x)_\alpha f(x_i) = \begin{cases} c_i \text{ pour } \alpha = \alpha_i , \\ 0 \text{ pour } \alpha \neq \alpha_i, \ |\alpha| \leqq |\alpha_i| . \end{cases}$$

Enfin, pour construire les f_i, on cherche d'abord une fonction indéfiniment différentiable g_i à support compact qui satisfait à la condition α). Alors, quel que soit $r > 0$, la fonction

$$f_i(x) = r^{|x_i|} g_i\left((x - x_i)/r + x_i\right)$$

satisfait aussi à la condition α). En prenant r assez petit, on voit alors qu'on peut aussi la faire satisfaire aux conditions β) et γ).

BIBLIOGRAPHIE

1. L. Ehrenpreis, *Sheaves and differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc. 7 (1956), 1131–1136.
2. R. Godement, *Théorie des faisceaux*, Paris, 1958.
3. L. Schwartz, *Théorie des noyaux*, Proc. Int. Congress Math. Cambridge, Mass., 1950, vol. 1, 220–230.

UNIVERSITÉ DE LUND, SUÈDE