MATH. SCAND. 8 (1960), 81–96

ÜBER DIE FÜHRER EINER KLASSE HECKESCHER GRÖSSENCHARAKTERE

CHR. U. JENSEN

1. Die Ergebnisse von Weil und Hasse über die Jacobischen Summen als Grössencharaktere.

Man betrachtet im Körper P_m der m-ten Einheitswurzeln über dem Körper P der rationalen Zahlen für jeden nicht in m aufgehenden Primdivisor $\mathfrak{p}$ die folgenden sogenannten Jacobischen Summen:

$$\omega_{\mu_1,\mu_2;m}(\mathfrak{p}) = -\sum_{\xi_1+\xi_2\equiv 1 \bmod \mathfrak{p}} \left(\frac{\xi_1}{\mathfrak{p}}\right)_m^{\mu_1} \left(\frac{\xi_2}{\mathfrak{p}}\right)_m^{\mu_2} \qquad \mu_1,\mu_2,\mu_1+\mu_2 \not\equiv 0 \bmod m ,$$

wo $(\xi/\mathfrak{p})_m$ das gewöhnliche m-te Potenzrestsymbol bezeichnet. Ferner nimmt man an, dass (μ_1,μ_2) primitiv ist, d.h. $(\mu_1,\mu_2,m)=1$, da $\omega_{\mu_1,\mu_2;m}(\mathfrak{p})$ sonst wegen einer allgemeinen Reduktionsformel von Davenport und Hasse auf eine in einem Unterkörper $P_{m'}$ von P_m gelegene Jacobische Summe zurückgeführt werden kann. (Gelegentlich kommt ein $\omega_{\mu_1,\mu_2;m}$ vor, für das die obige Grundvoraussetzung $\mu_1,\mu_2,(\mu_1+\mu_2)\not\equiv 0 \bmod m$ nicht erfüllt ist; $\omega_{\mu_1,\mu_2;m}$ ist in solchen Fällen stets laut obenstehender Summendefinition zu verstehen. Siehe hierzu Hasse [4] § 20.4 und die Schlussnote dieser Arbeit.)

Die hierdurch im Bereich der Primdivisoren $\mathfrak{p} \nmid m$ von P_m gelieferte Funktion erweitere man zu einem Charakter der Gruppe aller zu m primen Divisoren $\mathfrak{a}$, indem man formal

$$\omega_{\mu_1,\mu_2;m}(\mathfrak{a}) = \prod_{\mathfrak{p}_i|\mathfrak{a}} [\omega_{\mu_1,\mu_2;m}(\mathfrak{p})]^{a_i} \quad \text{für} \quad \mathfrak{a} = \prod_i \mathfrak{p}_i^{a_i}$$

setzt.

Diese Divisorcharaktere können nach A. Weil [7] als Heckesche Grössencharaktere aufgefasst werden, d.h. es gibt einen ganzen Divisor (Erklärungsmodul) $\mathfrak{m}$, ganzrationale Zahlen g_J und komplexe Zahlen c_J, so dass

$$\omega_{\mu_1,\mu_2;m}(\alpha) = \prod_J (\alpha^J)^{g_J} |\alpha^J|^{c_J} \qquad \text{für Zahlen} \quad \alpha \equiv 1 \bmod \mathfrak{m} ,$$

Eingegangen am 10. Februar, 1960.

wo J die verschiedenen Automorphismen von P_m in bezug auf den Grundkörper P durchläuft.

Sämtliche Erklärungsmoduln erweisen sich als Vielfache eines kleinsten, eindeutig bestimmten Divisors $\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;m})$, den man als den Führer des Grössencharakters bezeichnet.

Für die hier auftretenden $\omega_{\mu_1,\mu_2;m}(\alpha)$ gilt genauer, wie bei Hasse [5] in Einzelheiten ausgeführt ist,

$$\omega_{\mu_1,\mu_2;m}(\alpha) = \chi_{\mu_1,\mu_2;m}(\alpha)\cdot \prod_J (\alpha^{J-1})^{d_m(-j\mu_1,-j\mu_2)},$$

α eine beliebige zu $\mathfrak{m}$ prime Zahl,

wo folgende Bezeichnungen verwendet sind:

j die durch den Automorphismus J festgelegte prime Restklasse $\bmod m$, für welche also $J=(\zeta \to \zeta^j)$ für eine feste primitive und damit jede m-te Einheitswurzel ζ;

$d_m(-j\mu_1, -j\mu_2)$ die sogenannten Übertragungszahlen

$$d_m(-j\mu_1, -j\mu_2) = \frac{r_m(-j\mu_1)+r_m(-j\mu_2)-r_m(-j\mu_1-j\mu_2)}{m},$$

wo allgemein $r_m(\mu)$ den kleinsten nicht-negativen Rest von $\mu \bmod m$ bezeichnet;

$\chi_{\mu_1,\mu_2;m}(\alpha)$ eine von α abhängige m-te, für ungerades m eventuell sogar $2m$-te Einheitswurzel (nicht notwendig primitiv).

Die Grössencharaktereigenschaft drückt sich dann darin aus, dass

$$\chi_{\mu_1,\mu_2;m}(\alpha) = 1 \quad \text{für} \quad \alpha \equiv 1 \bmod \mathfrak{m}$$

für jeden Erklärungsmodul $\mathfrak{m}$, und zwar hat Weil bewiesen, dass m^2 immer als Erklärungsmodul auftritt.

$\chi_{\mu_1,\mu_2;m}(\alpha)$ erweist sich somit als ein zu m primer Zahlcharakter, und der in m^2 aufgehende Führer $\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;m})$ kann als Führer des Charakters $\chi_{\mu_1,\mu_2;m}(\alpha)$ der primen Restklasse $\bmod m^2$ gekennzeichnet werden. Eine genaue Bestimmung dieser Führer ist bisher nur für Primzahlexponenten $m=l$, $l\neq 2$, gelungen (Hasse [5]), und zwar gilt

$$\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;l}) = \mathfrak{l}_l \quad \text{oder} \quad \mathfrak{l}^2,$$

je nachdem die Summe

$$\sum_{(j,l)=1} d_l(j\mu_1,j\mu_2) \equiv 0 \qquad \text{oder} \qquad \not\equiv 0 \bmod l$$

ist, wo $\mathfrak{l}_l$ den (einzigen) Primdivisor von l in P_l bezeichnet. Ferner ist dort dargetan, dass $\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;l^\nu})\neq 1$ für Primzahlpotenzexponenten $m=l^\nu$,

$l \neq 2$. In Hasse [6], sind in diesen Fällen weitere nicht-triviale untere Führerabschätzungen bewiesen worden.

Im folgenden wird dem Exponentenpaar (μ_1, μ_2) die einschränkende Bedingung $(\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2), m) = 1$ für ungerades m und $(\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2), m) \mid 2^{a-1}$ für gerades m mit $2^a \| m$ auferlegt. Nur dann gelingt nämlich eine systematische Auseinandersetzung der Struktur der Grössencharakterführer, für gerades m jedoch nur unter Berücksichtigung mehrerer Ausnahmefälle. Ein vollständig organischer Aufbau vollzieht sich nur für ungerades m. In **2.** soll eine Relation zur Zurückführung auf Primzahlpotenzexponenten und in **3.** eine Verschärfung der allgemeinen Weilschen Führerabschätzung bewiesen werden. Wie die Ergebnisse sich auf die Fälle, wo man nur $\mu_1, \mu_2, \mu_1+\mu_2 \not\equiv 0 \bmod m$ und $(\mu_1, \mu_2, m) = 1$ fordert, übertragen lassen, wird in der Schlussnote erörtert.

Aus den Resultaten wird sich inbesonderes die von Weil ausgesprochene Vermutung, dass m^2 nie als Führer dieser Grössencharaktere auftritt, als wahr herausstellen.

2. Zurückführung auf Primzahlpotenzexponenten.

Falls m die Primzerlegung $m = \prod_{i=1}^{r} l_i^{\nu_i}$ besitzt, ist der Ring der Restklassenpaare $(\mu_1, \mu_2) \bmod m$ direkte Summe der entsprechenden Ringe $\bmod\, l_i^{\nu_i}$, und zwar ergeben sich die Komponenten $\bmod\, l_i^{\nu_i}$ für ein gegebenes Restklassenpaar $(\mu_1, \mu_2) \bmod m$ durch Spezialisierung auf die Restklassen $\bmod\, l_i^{\nu_i}$. Eine solche Beziehung besteht ersichtlich auch, wenn man den Restklassenpaaren die in **1.** erwähnte Bedingung auferlegt.

Hierdurch sind den betrachteten Grössencharakteren im Körper P_m eineindeutig die in den Körpern $P_{l_i^{\nu_i}}$ zugeordnet. Über diese Zuordnung gilt folgender

Satz 1. *Falls die ungerade Zahl m die Primzerlegung $m = \prod_{i=1}^{r} l_i^{\nu_i}$ hat, gilt für die Führer der in* **1.** *betrachteten Grössencharaktere die Relation*

$$\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1, \mu_2; m}) = \prod_{i=1}^{r} \mathfrak{f}(\omega_{\mu_1, \mu_2; l_i^{\nu_i}}) .$$

Diese Beziehung lässt sich nicht ohne Einschränkungen auf die geraden m übertragen. Durch eine leichte Modifikation des Beweises von Satz 1 gelangt man zu

Satz 2. *Für gerades m mit der Primzerlegung $m = \prod_{i=1}^{r} l_i^{\nu_i}$ gilt die Führerbeziehung*

$$\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1, \mu_2; m}) = \prod_{i=1}^{r} \mathfrak{f}(\omega_{\mu_1, \mu_2; l_i^{\nu_i}})$$

jedenfalls, wenn 1) $\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;l_i^{\nu_i}}) \neq 1$ (*was nach Hasse* [5] *für die ungeraden* l_i *sicher erfüllt ist*) *und* 2) m *mindestens drei verschiedene Primteiler enthält, d.h.* $r \geqq 3$ *ist.*

Falls 1) nicht erfüllt ist, besteht (unabhängig von 2)) die obere Abschätzung

$$\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;m}) \mid \mathfrak{l}_{2^\nu} \prod_{i=1}^{r} \mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;l_i^{\nu_i}}) .$$

Falls $m = 2^\alpha \cdot l^\nu$ und $\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;l^\nu} \neq \mathfrak{l}_{l^\nu}$ (d.h. $\mathfrak{l}_{l^\nu} \mid \mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;l^\nu})$), besteht die untere Abschätzung

$$\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;2^a})\cdot\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;l^\nu}) \mid \mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;m}) .$$

Ist die zweite Bedingung nicht erfüllt, also $\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;l^\nu}) = \mathfrak{l}_{l^\nu}$, so erhält man nur die schwächere untere Abschätzung

$$\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;l^\nu}) \mid \mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;m}) .$$

Hinsichtlich des ersten Ausnahmefalles $\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;2^\nu}) = 1$ sei bemerkt, dass es noch eine offene Frage ist, inwieweit es derartige Grössencharaktere überhaupt gibt. Nach Untersuchungen von Hasse [6] ist die Existenz solcher Grössencharaktere ziemlich unwahrscheinlich.

Nach dem Beweis von Satz 1 wird angegeben, wie der Beweis zu modifizieren ist, um die Richtigkeit von Satz 2 darzutun. Zunächst werden zwei Hilfssätze bewiesen.

Lemma 1. *Für Primzahlpotenzen* q^k *gilt die Kongruenz*

$$\omega_{\mu_1,\mu_2;m}(\alpha^{q^k}) \equiv \omega_{\mu_1 q^k,\mu_1 q^k;m}(\alpha) \mod q .$$

Beweis. Für jeden Primdivisor $\mathfrak{p}$ erhält man zufolge einer wohlbekannten Eigenschaft der Polynomialkoeffizienten

$$(2.1) \quad \omega_{\mu_1,\mu_2;m}(\mathfrak{p}^{q^k}) = \omega_{\mu_1,\mu_2;m}(\mathfrak{p})^{q^k}$$
$$= \left[-\sum_{\xi_1+\xi_2\equiv 1 \bmod \mathfrak{p}} \left(\frac{\xi_1}{\mathfrak{p}}\right)_m^{\mu_1} \left(\frac{\xi_2}{\mathfrak{p}}\right)_m^{\mu_2}\right]^{q^k}$$
$$\equiv -\sum_{\xi_1+\xi_2\equiv 1 \bmod \mathfrak{p}} \left(\frac{\xi_1}{\mathfrak{p}}\right)_u^{\mu_1 q^k} \left(\frac{\xi_2}{\mathfrak{p}}\right)_m^{\mu_2 q^k} \mod q .$$

Für $q = 2$ beachte man, dass

$$-\sum_{\xi_1+\xi_2\equiv 1 \bmod \mathfrak{p}} \left(\frac{\xi_1}{\mathfrak{p}}\right)_m^{\mu_1 q^k} \left(\frac{\xi_2}{\mathfrak{p}}\right)_m^{\mu_2 q^k} \equiv \sum_{\xi_1+\xi_2\equiv 1 \bmod \mathfrak{p}} \left(\frac{\xi_1}{\mathfrak{p}}\right)_m^{\mu_1 q^k} \left(\frac{\xi_2}{\mathfrak{p}}\right)_m^{\mu_2 q^k} \mod 2 .$$

Da die rechts auftretende Summe in (2.1) gerade $\omega_{\mu_1 q^k,\mu_2 q^k,m}(\mathfrak{p})$ ist, ergibt sich die Behauptung durch Multiplikation über die in α enthaltenen Primdivisoren.

LEMMA 2. *Es gilt* $\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;m})^{J'}=\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;m})$ *für jeden Automorphismus* J' *von* P_m/P. *Dies bedeutet, dass* $\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;m})$ *ein Potenzprodukt der* $\mathfrak{l}_{l_i^{\nu_i}}$, $1\leqq i\leqq r$, *ist, wo* $\mathfrak{l}_{l_i^{\nu_i}}$ *den durch*

$$l_i \cong \mathfrak{l}_{l_i^{\nu_i}}{}^{\varphi(l_i^{\nu_i})}\,, \qquad \lambda_{l_i^{\nu_i}} = 1-\zeta_{l_i^{\nu_i}} \cong \mathfrak{l}_{l_i^{\nu_i}},$$

$\zeta_{l_i^{\nu_i}}$ primitive $l_i^{\nu_i}$-te Einheitswurzel,

festgelegten Primdivisor von l_i *in* $P_{l_i^{\nu_i}}$ *bezeichnet.*

BEWEIS. Da aus der Definition hervorgeht, dass

$$\omega_{\mu_1,\mu_2;m}(\alpha)^{J'} = \omega_{\mu_1 j',\mu_2 j';m}(\alpha)\,,$$

wo j' die dem Automorphismus J' gemäss **1.** zugeordnete Restklasse $\operatorname{mod} m$ ist, und infolgedessen

$$\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;m})^{J'} = \mathfrak{f}(\omega_{\mu_1 j',\mu_2 j';m})$$

ist, bleibt $\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1 j',\mu_2 j',m})=\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;m})$ nachzuweisen. Aus Symmetriegründen genügt es, $\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1 j',\mu_2 j';m})\mid\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;m})$ festzustellen, d.h.

$$\chi_{\mu_1 j',\mu_2 j';m}(\alpha) = 1 \quad \text{für} \quad \alpha \equiv 1 \operatorname{mod}\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;m})\,.$$

Man wähle dazu nach dem Dirichletschen Primzahlsatz eine ungerade Primzahl p derart, dass $p\equiv j' \operatorname{mod} m$. Da sicher $(\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1 j',\mu_2 j';m}),p)=1$ ist, brauchen wir nur zu zeigen, dass $p\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;m})$ Erklärungsmodul für $\omega_{\mu_1 j',\mu_2 j';m}$ ist.

Gegeben sei also eine beliebige Zahl $\alpha\equiv 1 \operatorname{mod} p\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;m})$. Nach Lemma 1 besteht die Kongruenz

$$\omega_{\mu_1 j',\mu_2 j';m}(\alpha) = \omega_{\mu_1 p,\mu_2 p;m}(\alpha) \equiv \omega_{\mu_1,\mu_2;m}(\alpha^p) \operatorname{mod} p\,.$$

Aus $\alpha^p\equiv 1 \operatorname{mod} p\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;m})$ folgt $\chi_{\mu_1,\mu_2;m}(\alpha^p)=1$ und daher

$$\omega_{\mu_1,\mu_2;m}(\alpha^p) = 1\cdot\prod_J (\alpha^p)^{d_m(-j\mu_1,-j\mu_2)J^{-1}} \equiv 1 \operatorname{mod} p\,.$$

Da ferner

$$\omega_{\mu_1 j',\mu_2 j';m}(\alpha) = \chi_{\mu_1 j',\mu_2 j';m}(\alpha)\prod_J \alpha^{d_m(-j\mu_1,-j\mu_2)J^{-1}} \equiv \chi_{\mu_1 j',\mu_2 j';m}(\alpha) \operatorname{mod} p\,,$$

erhält man durch Zusammenfassung

$$\chi_{\mu_1 j',\mu_2 j';m}(\alpha) \equiv 1 \operatorname{mod} p\,,$$

was $\chi_{\mu_1 j',\mu_2 j';m}(\alpha)=1$ nach sich zieht, da der Modul p die m-ten Einheitswurzeln unterscheidet.

Nach diesen Hilfssätzen kann der Beweis von Satz 1 in Angriff genommen werden, und zwar wird die Richtigkeit des Satzes durch folgende zwei Feststellungen dargetan:

I) $\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;m}) \mid \prod_{i=1}^{r} \mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;l_i^{\nu_i}})$

und

II) $\prod_{i=1}^{r} \mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;l_i^{\nu_i}}) \mid \mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;m})$.

Beweis von I) durch Induktion nach r. Es gelte also I) für jedes m, das höchstens $r-1$ verschiedene Primteiler enthält. Es genügt zu zeigen, dass jeder der Divisoren $l_i^{2\nu_i}\prod_{i=1}^{r}\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;l_i^{\nu_i}})$, $1 \leqq i \leqq r$, Erklärungsmodul ist, da dies dann auch für ihren gr. g. Teiler gilt. Aus Symmetriegründen brauchen wir dies nur für $l_1^{2\nu_1}\prod_{i=1}^{r}\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;l_i^{\nu_i}})$ auszuführen. Bei beliebigem

$$\alpha \equiv 1 \mod l_1^{2\nu_1} \prod_{i=1}^{r} \mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;l_i^{\nu_i}}) \tag{2.2}$$

gibt es stets ein $\alpha_0 \equiv 1 \mod l_1^{\nu_1}\prod_{i=1}^{r}\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;l_i^{\nu_i}})$, für welches

$$\alpha \equiv \alpha_0^{l_1^{\nu_1}} \mod \prod_{i=1}^{r} l_i^{2\nu_i} = m^2 .$$

Dies gilt nämlich lokal für jeden der Primdivisoren $\mathfrak{l}_{l_i^{\nu_i}}$, die nach Hasse [5] wirklich in den $\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;l_i^{\nu_i}})$ vorkommen; für die $\mathfrak{l}_{l_1^{\nu_1}}$-adische Erweiterung entnimmt man dies aus Hasse [3] Satz 121, während es für die übrigen $\mathfrak{l}_{l_i^{\nu_i}}$ daraus folgt, dass $1/l_1^{\nu_1}$ als ganze rational-l_i-adische Zahl zum Operatorenbereich der $\mathfrak{l}_{l_i^{\nu_i}}$-adischen Einseinheiten gehört, und zwar mit Erhaltung der Ordnungen der Einseinheiten. Durch Hinzunahme der Annäherungsunabhängigkeit ergibt sich sodann die obige Behauptung.

Dem Weilschen Ergebnis zufolge ist m^2 sicher Erklärungsmodul, und daher

$$\chi_{\mu_1,\mu_2;m}(\alpha) = \chi_{\mu_1,\mu_2;m}\left(\alpha_0^{l_1^{\nu_1}}\right) .$$

Da insbesondere $\alpha_0^{l_1^{\nu_1}} \equiv 1 \mod l_1$, erhält man (wie schon früher)

$$\begin{aligned}\omega_{\mu_1,\mu_2;m}\left(\alpha_0^{l_1^{\nu_1}}\right) &= \chi_{\mu_1,\mu_2;m}\left(\alpha_0^{l_1^{\nu_1}}\right) \prod_{J} \left(\alpha_0^{l_1^{\nu_1}}\right)^{d_m(-j\mu_1,-j\mu_2)J^{-1}} \\ &\equiv \chi_{\mu_1,\mu_2;m}\left(\alpha_0^{l_1^{\nu_1}}\right) \mod l_1 .\end{aligned}$$

Wegen Lemma 1 gilt

$$\omega_{\mu_1,\mu_2;m}\left(\alpha_0^{l_1^{\nu_1}}\right) \equiv \omega_{\mu_1 l_1^{\nu_1},\mu_2 l_1^{\nu_1};m}(\alpha_0) \mod l_1 .$$

Nun erhält man aus der Davenport-Hasseschen Reduktionsregel für Gausssche Summen (Davenport und Hasse [1], siehe auch Hasse [5]) durch Heranziehung der Tatsache, dass die Jacobischen Summen als

Faktorensystem der Gaussschen zu den Charakteren mod $\mathfrak{p}$ aufgefasst werden können, für jeden nicht in m aufgehenden Primdivisor $\mathfrak{p}$ die Reduktionsformel

$$\begin{aligned}\omega_{\mu_1 l_1^{\nu_1},\, \mu_2 l_1^{\nu_1};\, m}(\mathfrak{p}) &= -\sum_{\xi_1+\xi_2\equiv 1 \bmod \mathfrak{p}} \left(\frac{\xi_1}{\mathfrak{p}}\right)_m^{\mu_1 l_1^{\nu_1}} \left(\frac{\xi_2}{\mathfrak{p}}\right)_m^{\mu_2 l_1^{\nu_1}} \\ &= \left\{-\sum_{\eta_1+\eta_2\equiv 1 \bmod \mathfrak{q}} \left(\frac{\eta_1}{\mathfrak{q}}\right)_{m/l_1^{\nu_1}}^{\mu_1} \left(\frac{\eta_2}{\mathfrak{q}}\right)_{m/l_1^{\nu_1}}^{\mu_2}\right\}^f \\ &= \omega_{\mu_1, \mu_2;\, m/l_1^{\nu_1}}(\mathfrak{q}^f), \quad \text{wenn} \quad N_{\frac{m}{m/l_1^{\nu_1}}}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}^f .\end{aligned}$$

(Zur Abkürzung wird allgemein N_{m_1/m_2} statt $N_{P_{m_1}/P_{m_2}}$ geschrieben.) Durch Multiplikation über die in α_0 enthaltenen Primdivisoren ergibt sich

$$\omega_{\mu_1 l_1^{\nu_1},\, \mu_2 l_1^{\nu_1};\, m}(\alpha_0) = \omega_{\mu_1, \mu_2;\, m/l_1^{\nu_1}}\left[N_{\frac{m}{m/l_1^{\nu_1}}}(\alpha_0)\right] .$$

Weil $l_1^{\nu_1}\prod_{i=1}^r \mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;\, l_i^{\nu_i}})$ bei jedem Automophismus von $P_m/P_{\frac{m}{m/l_1^{\nu_1}}}$ invariant ist, gilt sicher

$$N_{\frac{m}{m/l_1^{\nu_1}}}(\alpha_0) \equiv 1 \mod l_1^{\nu_1} \prod_{i=1}^r \mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;\, l_i^{\nu_i}}) .$$

Andererseits ist nach Induktionsannahme $\prod_{i=2}^r \mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;\, l_i^{\nu_i}})$ Erklärungsmodul für $\omega_{\mu_1,\mu_2;\, m/l_1^{\nu_1}}$, und daher

$$\chi_{\mu_1,\mu_2;\, m/l_1^{\nu_1}}\left[N_{\frac{m}{m/l_1^{\nu_1}}}(\alpha_0)\right] = 1 .$$

Da wie zuvor

$$\omega_{\mu_1,\mu_2;\, m/l_1^{\nu_1}}\left[N_{\frac{m}{m/l_1^{\nu_1}}}(\alpha_0)\right] \equiv \chi_{\mu_1,\mu_2;\, m/l_1^{\nu_1}}\left[N_{\frac{m}{m/l_1^{\nu_1}}}(\alpha_0)\right] \mod l_1 ,$$

erhält man alles in allem

(2.3) $$\chi_{\mu_1,\mu_2;\, m}(\alpha) \equiv 1 \mod l_1$$

und daraus

$$\chi_{\mu_1,\mu_2;\, m}(\alpha) = 1 \qquad \text{w.z.b.w.}$$

Beweis von II), wiederum durch Induktion nach r. Die Behauptung sei also richtig für jedes höchstens $r-1$ verschiedene Primteiler enthaltende m. Nach Lemma 2 hat $\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;\, m})$ sicher die Form

$$\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;\, m}) = \prod_{i=1}^r \mathfrak{l}_{l_i^{\nu_i}}^{a_i}, \qquad a_i \geqq 0 .$$

Es genügt daher zu zeigen, dass keiner der Divisoren

$$\mathfrak{g}_k = \frac{\prod_{i=1}^{r} \mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;\, l_i^{\nu_i}})}{\mathfrak{l}_{l_k^{\nu_k}}}, \qquad 1 \leqq x \leqq r,$$

Erklärungsmodul für $\omega_{\mu_1,\mu_2;\,m}$ ist.

Wie vorher brauchen wir dies aus Symmetriegründen nur für $\mathfrak{g}_r$ nachzuweisen. Nach Induktionsannahme ist $\mathfrak{h}_r = \mathfrak{g}_r/\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;\, l_1^{\nu_1}})$ nicht Erklärungsmodul für $\omega_{\mu_1,\mu_2;\, m/l_1^{\nu_1}}$ und wegen $(l_1, \mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;\, m/l_1^{\nu_1}}) = 1$ dann auch nicht $l_1^n \mathfrak{h}_r$, wo n eine passende grosse ganzrationale Zahl bezeichnet, die in kurzem festgelegt werden soll. Infolgedessen gibt es ein α in $P_{m/l_1^{\nu_1}}$ derart, dass

(2.4) $$\alpha \equiv 1 \mod l_1^n \mathfrak{h}_r$$

und

$$\chi_{\mu_1,\mu_2;\, m/l_1^{\nu_1}}(\alpha) \neq 1 .$$

Für die folgenden Ergebnisse aus der Klassenkörpertheorie sei auf Hasse [2] verwiesen.

Der Führer (im klassenkörpertheoretischen Sinne) von $P_m/P_{m/l_1^{\nu_1}}$ enthält nur Primdivisoren von l_1 in $P_{m/l_1^{\nu_1}}$. Aus den geläufigen Sätzen der Normenresttheorie geht dann hervor, dass α Normenrest modulo jeder noch so hohen Potenz von $\mathfrak{l}_{l_i^{\nu_i}}, 2 \leqq i \leqq r$, ist, und zwar, wie man leicht nachprüft, mit Erhaltung der entsprechenden Ordnungen der Einseinheiten. Für die Potenzen von $\mathfrak{l}_{l_1^{\nu_1}}$ wird dieses auch gelten, falls man n genügend gross wählt; man kann erreichen, dass die Einseinheitenordnung beliebig hoch wird.

Wie schon früher ergibt sich hieraus unter Hinzunahme der Annäherungsunabhängigkeit die Existenz eines β in P_m, das folgenden Kongruenzen genügt:

(2.5) $$\alpha \equiv N_{\frac{m}{m/l_1^{\nu_1}}}(\beta) \mod m^2 , \qquad \beta \equiv 1 \mod l_1^{h(n)} \mathfrak{h}_r .$$

Nun ist

$$\chi_{\mu_1,\mu_2;\, m/l_1^{\nu_1}}(\alpha) = \chi_{\mu_1,\mu_2;\, m/l_1^{\nu_1}}\left[N_{\frac{m}{m/l_1^{\nu_1}}}(\beta)\right],$$

da m^2 sicher Erklärungsmodul ist. Aus

$$N_{\frac{m}{m/l_1^{\nu_1}}}(\beta) \equiv 1 \mod l_1$$

folgt

$$\omega_{\mu_1,\mu_2;\, m/l_1^{\nu_1}}\left[N_{\frac{m}{m/l_1^{\nu_1}}}(\beta)\right] \equiv \chi_{\mu_1,\mu_2;\, m/l_1^{\nu_1}}\left[N_{\frac{m}{m/l_1^{\nu_1}}}(\beta)\right] \mod l .$$

Nach der früher erwähnten Reduktionsformel von Davenport-Hasse gilt

$$\omega_{\mu_1,\mu_2;m/l_1^{\nu_1}}\left[N_{\frac{m}{m/l_1^{\nu_1}}}(\beta)\right] = \omega_{\mu_1 l_1^{\nu_1},\mu_2 l_1^{\nu_1};m}(\beta)$$

und wegen Lemma 1 unter Beachtung von $\beta^{l_1^{\nu_1}} \equiv 1 \mod l_1$

$$\omega_{\mu_1 l_1^{\nu_1},\mu_2 l_1^{\nu_1};m}(\beta) \equiv \omega_{\mu_1,\mu_2;m}(\beta^{l_1^{\nu_1}}) \equiv \chi_{\mu_1,\mu_2;m}(\beta^{l_1^{\nu_1}}) \mod l_1 .$$

Zusammengenommen erhält man

$$1 \neq \chi_{\mu_1,\mu_2;l/m_1^{\nu_1}}(\alpha) \equiv \chi_{\mu_1,\mu_2;m}(\beta^{l_1^{\nu_1}}) \mod l_1$$

und daraus $\chi_{\mu_1,\mu_2;m}(\beta^{l_1^{\nu_1}}) \neq 1$. Da $\beta \equiv 1 \mod l_1^{h(n)}\mathfrak{h}_r$, ist also $l_1^{h(n)}\mathfrak{h}_r$ kein Erklärungsmodul für $\omega_{\mu_1,\mu_2;m}$.

Das n aus (2.4) sei nun so gross gewählt, dass (2.5) mit einem $h(n)$ gilt, für welches $\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;l_1^{\nu_1}}) \mid l_1^{h(n)}$. Dann ist ersichtlich, dass auch

$$\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;l_1^{\nu_1}})\cdot\mathfrak{h}_r = \mathfrak{g}_r = \frac{\prod_{i=1}^{r}\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;l_i^{\nu_i}})}{\mathfrak{l}_{l_r^{\nu_r}}}$$

kein Erklärungsmodul ist. Dies tut die Richtigkeit von II) dar.

Damit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

Betreffend die für Satz 2 erforderliche Modifikation des obigen Beweises sieht man zunächst, falls 1) erfüllt ist, dass der Beweis von Teil I) bis zur Kongruenz (2.3) wörtlich übertragen werden kann. Dagegen kann man für $l_1 = 2$ aus dieser Kongruenz unmittelbar nur $\chi_{\mu_1,\mu_2;m}(\alpha) = \pm 1$ schliessen. Um dieses Hindernis zu bewältigen, beachte man, dass man ohne Beschränkung α anstelle von (2.2) die stärkere Bedingung

$$\alpha \equiv 1 \mod l_1^n \prod_{i=1}^{r} \mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;l_i^{\nu_i}}) \qquad (n \text{ hinreichend gross})$$

hätte auferlegen können. Dadurch wird erreicht, dass α_0 aus I) eine 2^{ν_1}-te $\mathfrak{l}_{2^{\nu_1}}$-adische Potenz wird, so dass es wie vorher ein α_1 gibt, für welches

$$\alpha \equiv \alpha_1^{2^{\nu_1}} \mod m^2 .$$

Da somit $\chi_{\mu_1,\mu_2;m}(\alpha_0) = \chi_{\mu_1,\mu_2;m}(\alpha_1)^{2^{\nu_1}}$, und da die 2^{ν_1}-te Potenz jeder in P_m enthaltenen Einheitswurzel von ungerader Ordnung ist, folgt, dass wirklich $\chi_{\mu_1,\mu_2;m}(\alpha) = 1$ ist. Nach Hinzufügung eines Divisors $\mathfrak{l}_{2^{\nu_1}}$ in dem Fall, wo die Voraussetzung 1) nicht erfüllt ist, bleiben die obigen Schlüsse in Geltung.

Falls m mindestens drei verschiedene Primteiler enthält, kann der Beweisgang von II) aufrechterhalten werden, indem man eine ungerade Primzahl die Rolle von l_i spielen lässt.

Wenn m nur aus zwei Primteilern besteht, also von der Form $m=2^\alpha l^\nu$ ist, kann eine ganz analoge Schlussweise, wie eben zur Wiederherstellung des Beweises von I), angewendet werden, sofern $\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;l^\nu})/\mathfrak{l}_{l^\nu} \neq 1$. Falls dies nicht zutrifft, versagt das obige Schlussverfahren, und man gelangt durch diese Methoden nur zur Führerabschätzung

$$\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;2^a}) \mid \mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;m}) .$$

Aus Satz 1 erhält man insbesondere folgendes

Korollar. *Die Führer der betrachtenten Grössencharaktere $\omega_{\mu_1,\mu_2;m}$ enthalten für ungerades m sämtliche Primdivisoren von m im Körper P_m.*

Dieses Korollar hat eine gewisse Bedeutung für die Arbeit von Hasse [5], indem die dort behandelten Heckeschen L-Reihen sich als eigentlich erweisen.

Im nächsten Paragraphen soll eine Verschärfung der allgemeinen Weilschen Führerabschätzung $\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;m}) \mid m^2$ hergeleitet werden. Wegen der Sätze 1 und 2 brauchen wir nur Primzahlpotenzexponenten $m=l^\nu$ zu betrachten.

3. Verschärfung der Weilschen Führerabschätzung.

Satz 3. *Für ungerade Primzahlpotenzexponenten l^ν gilt folgende obere, von ν unabhängige Abschätzung der Führer der Grössencharaktere:*

$$\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;l^\nu}) \mid l\mathfrak{l}_l\mathfrak{l}_{l^2} .$$

Beweis durch Induktion nach ν. Nach Hasse [5] ist die Behauptung richtig für $\nu=1$, da der Führer in diesem Fall höchstens $\mathfrak{l}_l^2$ beträgt.

Der Fall $\nu=2$ muss gesondert behandelt werden: Für die zu l primen Primdivisoren $\mathfrak{p}$ ist

$$\omega_{\mu_1,\mu_2;l^2}(\mathfrak{p}) = -\sum_{\xi_1+\xi_2\equiv 1 \bmod \mathfrak{p}} \left(\frac{\xi_1}{\mathfrak{p}}\right)_{l^2}^{\mu_1} \left(\frac{\xi_2}{\mathfrak{p}}\right)_{l^2}^{\mu_2} = -\sum_{\substack{\xi \bmod \mathfrak{p}\\ \xi\not\equiv 0,1}} \left(\frac{\xi}{\mathfrak{p}}\right)_{l^2}^{\mu_1} \left(\frac{1-\xi}{\mathfrak{p}}\right)_{l^2}^{\mu_2} .$$

Diese Summe kann (nach einer Methode von Hasse) leicht $\bmod \mathfrak{l}_{l^2}^2$ bestimmt werden. Da trivialerweise

$$\sum_{\substack{\xi \bmod \mathfrak{p}\\ \xi\not\equiv 0,1}} \left(\frac{\xi}{\mathfrak{p}}\right)_{l^2}^{\mu_1} = -1 ,$$

können wir die obige Jacobische Summe auch folgendermassen schreiben:

$$\omega_{\mu_1,\mu_2;l^2}(\mathfrak{p}) = 1 - \sum_{\substack{\xi \bmod \mathfrak{p}\\ \xi\not\equiv 0,1}} \left(\frac{\xi}{\mathfrak{p}}\right)_{l^2}^{\mu_1} \left[\left(\frac{1-\xi}{\mathfrak{p}}\right)_{l^2}^{\mu_2} - 1\right] .$$

Als Einheitswurzel höchstens l^2-ter Ordnung ist jedes der Potenzrestsymbole $(\xi/\mathfrak{p})_{l^2}^{\mu_1}$ und $((1-\xi)/\mathfrak{p})_{l^2}^{\mu_2} \equiv 1 \bmod \mathfrak{l}_{l^2}$. Hieraus ergibt sich die Kongruenz

$$\left(\frac{\xi}{\mathfrak{p}}\right)_{l^2}^{\mu_1}\left[\left(\frac{1-\xi}{\mathfrak{p}}\right)_{l^2}^{\mu_2}-1\right] \equiv \left(\frac{1-\xi}{\mathfrak{p}}\right)_{l^2}^{\mu_2}-1 \bmod \mathfrak{l}_{l^2}^2, \quad \xi \not\equiv 0, 1 \bmod \mathfrak{p}$$

und somit

$$\omega_{\mu_1,\mu_2;l^2}(\mathfrak{p}) \equiv 1-\sum_{\substack{\xi \bmod \mathfrak{p}\\ \xi\not\equiv 0,1}}\left[\left(\frac{1-\xi}{\mathfrak{p}}\right)_{l^2}^{\mu_2}-1\right] \equiv N(\mathfrak{p}) \equiv 1 \bmod \mathfrak{l}_{l^2}^2 .$$

Infolgedessen gilt für jeden zu l primen Divisor $\mathfrak{a}$

$$\omega_{\mu_1,\mu_2;l^2}(\mathfrak{a}) \equiv 1 \bmod \mathfrak{l}_{l^2}^2 . \tag{3.1}$$

Sei jetzt α eine beliebige Zahl, die der Kongruenz

$$\alpha \equiv 1 \bmod l\mathfrak{l}_l\mathfrak{l}_{l^2}$$

genügt. Dann soll sich $\chi_{\mu_1,\mu_2;l^2}(\alpha)=1$ herausstellen. Nach Hasse [3] ist α eine $\mathfrak{l}_{l^2}$-adische l-te Potens $\alpha=\bar{\alpha}_0{}^l$, wobei für die zugehörige Bewertung

$$w_{\mathfrak{l}_{l^2}}(\bar{\alpha}_0-1) = w_{\mathfrak{l}_{l^2}}\left(\frac{\alpha-1}{l}\right)$$

gilt. Daher gibt es ein α_0 aus P_{l^2}, so dass

$$\alpha \equiv \alpha_0{}^l \bmod l^4 \quad \text{und} \quad \alpha_0 \equiv 1 \bmod \mathfrak{l}_l\mathfrak{l}_{l^2} .$$

Da l^4 der Weilsche Erklärungsmodul für $\omega_{\mu_1,\mu_2;l^4}$ ist, erhält man

$$\chi_{\mu_1,\mu_2;l^2}(\alpha) = \chi_{\mu_1,\mu_2;l^2}(\alpha_0)^l .$$

Aus $\alpha_0\equiv 1 \bmod \mathfrak{l}_l\mathfrak{l}_{l^2}$ folgt

$$\omega_{\mu_1,\mu_2;l^2}(\alpha_0) \equiv \chi_{\mu_1,\mu_2;l^2}(\alpha_0) \bmod \mathfrak{l}_l\mathfrak{l}_{l^2}, \quad \text{insbesondere} \bmod \mathfrak{l}_{l^2}^2 ,$$

und durch Hinzunahme der allgemeinen Kongruenz (3.1) weiter

$$\chi_{\mu_1,\mu_2;l^2}(\alpha_0) \equiv 1 \bmod \mathfrak{l}_{l^2}^2 .$$

Hieraus ist ersichtlich, dass $\chi_{\mu_1,\mu_2;l^2}(\alpha_0)$ entweder 1 oder eine primitive l-te Einheitswurzel ist. Folglich ist

$$\chi_{\mu_1,\mu_2;l^2}(\alpha) = \chi_{\mu_1,\mu_2;l^2}(\alpha_0)^l = 1, \qquad \text{w.z.b.w.}$$

Fall $\nu>2$: Die Abschätzung sei bereits für Grössencharaktere im Körper $P_{l^{\nu-1}}$ bewiesen. Es sei α eine beliebige Zahl in P_{l^ν}, die der Kongruenz

$$\alpha \equiv 1 \bmod l\mathfrak{l}_l\mathfrak{l}_{l^2} \tag{3.2}$$

genügt. Es soll $\chi_{\mu_1,\mu_2;l^\nu}(\alpha)=1$ gezeigt werden.

Wie früher folgert man aus (3.2), dass es ein α_0 in P_{l^ν} gibt, für welches

$$\alpha \equiv \alpha_0{}^l \mod l^{2\nu} \quad \text{und} \quad \alpha_0 \equiv 1 \mod \mathfrak{l}_l \mathfrak{l}_{l2} .$$

Da $l^{2\nu}$ Erklärungsmodul für $\omega_{\mu_1, \mu_2; l^\nu}$ ist, erhält man

$$\chi_{\mu_1, \mu_2; l^\nu}(\alpha) = \chi_{\mu_1, \mu_2; l^\nu}(\alpha_0{}^l) . \tag{3.3}$$

Aus $\alpha_0{}^l \equiv 1 \mod l$ und Lemma 1 folgt

$$\chi_{\mu_1, \mu_2; l^\nu}(\alpha_0{}^l) \equiv \omega_{\mu_1, \mu_2; l^\nu}(\alpha_0{}^l) \equiv \omega_{\mu_1 l, \mu_2 l; l^\nu}(\alpha_0) \mod l \tag{3.4}$$

und dann durch Anwendung der Davenport-Hasseschen Reduktionsformel weiter

$$\omega_{\mu_1 l, \mu_2 l; l^\nu}(\alpha_0) = \omega_{\mu_1, \mu_2; l^{\nu-1}}[N_{l^\nu / l^{\nu-1}}(\alpha_0)] . \tag{3.5}$$

Für α_0 sei

$$\alpha_0 = 1 + \lambda_l \lambda_{l2} \gamma, \qquad \gamma \text{ ganz für } \mathfrak{l}_{l^\nu} ,$$

angesetzt, wo $\lambda_l = 1 - \zeta_l \cong \mathfrak{l}_l$ und $\lambda_{l2} = 1 - \zeta_{l2} \cong \mathfrak{l}_{l2}$.

Wir werden jetzt $N_{l^\nu / l^{\nu-1}}(\alpha_0)$ explizit auswerten:

$$N_{l^\nu / l^{\nu-1}}(\alpha_0) = \prod_{i=0}^{l=1} (1 + \lambda_l \lambda_{l2} \sigma^i \gamma) = 1 + \sum_{n=1}^{l} (\lambda_l \lambda_{l2})^n S_n(\gamma) ,$$

wo σ ein erzeugender Automorphismus von $P_{l^\nu}/P_{l^{\nu-1}}$ ist (wegen $\nu > 2$ ist $\sigma\lambda_{l2} = \lambda_{l2}$), und S_n, $1 \leqq n \leqq l$, die symmetrischen Grundfunktionen der relativkonjugierten von γ bezeichnen, von denen speziell die erste $S_1(\gamma) = S_{l^\nu / l^{\nu-1}}(\gamma)$ und die letzte $S_l(\gamma) = N_{l^\nu / l^{\nu-1}}(\gamma)$ ist. Wir können (einem Gedanken von Takagi folgend) für $1 \leqq n \leqq l-1$ die S_n zusammensetzenden $\binom{l}{n}$ Summanden in $\binom{l}{n}/l$ Abteilungen gruppieren, derart dass die l Summanden einer jeden solchen Abteilung unter sich zyklisch, d.h. durch die Automorphismen $1, \sigma, \ldots, \sigma^{l-1}$ zusammenhängen. Demnach stellt sich $S_n(\gamma)$ als Summe von $\binom{l}{n}/l$ Relativspuren in der Form

$$S_n(\gamma) = \sum_{k_n} S_{l^\nu / l^{\nu-1}}(\gamma_{k_n})$$

dar. Zusammengefasst ergibt sich hierdurch

$$N_{l^\nu / l^{\nu-1}}(\alpha_0) = 1 + \sum_{n=1}^{l-1} (\lambda_l \lambda_{l2})^n \cdot \sum_{k_n} S_{l^\nu / l^{\nu-1}}(\gamma_{k_n}) + \lambda_l^l \lambda_{l2}^l N_{l^\nu / l^{\nu-1}}(\gamma) .$$

Für die Relativdifferente von $P_{l^\nu}/P_{l^{\nu-1}}$ gilt $\mathfrak{D}_{l^\nu, l^{\nu-1}} \cong l$. Jede der auftretenden Relativspuren $S_{l^\nu / l^{\nu-1}}(\gamma_{k_n}) = l S_{l^\nu / l^{\nu-1}}(\gamma_{k_n}/l)$ ist daher durch l teilbar, Da ferner $\lambda_l^l \lambda_{l2}^l \cong l \mathfrak{l}_l \mathfrak{l}_{l2}^l$, ergibt sich alles in allem

$$N_{l^\nu / l^{\nu-1}}(\alpha_0) \equiv 1 \mod l \mathfrak{l}_l \mathfrak{l}_{l2} .$$

Nach Induktionsannahme ist nun $l\mathfrak{l}_l\mathfrak{l}_{l_2}$ Erklärungsmodul für die Grössencharaktere in $P_{l^{\nu-1}}$, und daher

$$\chi_{\mu_1,\mu_2;\,l^{\nu-1}}[N_{l^\nu/l^{\nu-1}}(\alpha_0)] = 1\,.$$

Aus $N_{l^\nu/l^{\nu-1}}(\alpha_0) \equiv 1 \mod l$ folgt

$$1 = \chi_{\mu_1,\mu_2;\,l^{\nu-1}}[N_{l^\nu/l^{\nu-1}}(\alpha_0)] \equiv \omega_{\mu_1,\mu_2;\,l^{\nu-1}}[N_{l^\nu/l^{\nu-1}}(\alpha_0)] \mod l\,.$$

Durch Vergleich mit (3.3), (3.4) und (3.5) ergibt sich

$$\chi_{\mu_1,\mu_2;\,l^\nu}(\alpha) \equiv 1 \mod l$$

und somit

$$\chi_{\mu_1,\mu_2;\,l^\nu}(\alpha) = 1, \qquad \text{w.z.b.w.}$$

Es sind jetzt nur noch die Potenzen von 2 zu untersuchen. Hierüber beweisen wir folgenden

Satz 4. *Für die Grössencharaktere* $\omega_{\mu_1,\mu_2;\,2^\nu}$ in P_{2^ν} *gilt die Führerabschätzung*

$$\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;\,2^\nu}) \mid 8(1-i)\,.$$

Beweis durch Induktion nach ν. Zufolge Hasse [5] ist der Satz wahr für $\nu=2$. Es gelte nun die Behauptung für die Grössencharaktere in $P_{2^{\nu-1}}$. Für eine beliebige Zahl α aus P_{2^ν} mit

$$\alpha \equiv 1 \mod 8(1-i)$$

soll $\chi_{\mu_1,\mu_2;\,2^\nu}(\alpha) = 1$ nachgewiesen werden.

Wie vorher gibt es nach den geläufigen Sätzen der $\mathfrak{p}$-adik ein α_0, derart dass

$$\alpha \equiv \alpha_0^2 \mod 2^{2\nu} \quad \text{und} \quad \alpha_0 \equiv 1 \mod 4(1-i)$$

und somit

$$\chi_{\mu_1,\mu_2;\,2^\nu}(\alpha) = \chi_{\mu_1,\mu_2;\,2^\nu}(\alpha_0)^2.$$

Durch wiederholte Anwendung des Verfahrens auf α_0 ergibt sich die Existenz eines β_0 mit

$$\alpha_0 \equiv \beta_0^2 \mod 2^{2\nu} \quad \text{und} \quad \beta_0 \equiv 1 \mod 2(1-i)\,,$$

$$\chi_{\mu_1,\mu_2;\,2^\nu}(\alpha_0) = \chi_{\mu_1,\mu_2;\,2^\nu}(\beta_0)^2. \tag{3.6}$$

Wegen Lemma 1 und $\beta_0^2 \equiv 1 \mod 2$ ist

$$\chi_{\mu_1,\mu_2;\,2^\nu}(\beta_0^2) \equiv \omega_{\mu_1,\mu_2;\,2^\nu}(\beta_0^2) \equiv \omega_{2\mu_1,2\mu_2;\,2^\nu}(\beta_0) \mod 2\,. \tag{3.7}$$

Jetzt sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1.) $\omega_{2\mu_1, 2\mu_2; 2^\nu}(\beta_0)$ ist »trivial«, d.h. eine der Zahlen $2\mu_1, 2\mu_2, 2(\mu_1+\mu_2)$ ist durch 2^ν teilbar.

2.) $\omega_{2\mu_1, 2\mu_2; 2^\nu}(\beta_0)$ ist ein Grössencharakter (allerdings mit imprimitivem Exponentenpaar).

ad 1.) Hier wird $\omega_{2\mu_1, 2\mu_2; 2^\nu}(\beta_0)=1$, da dies für jeden in β_0 enthaltenen Primdivisor zutrifft. Falls $2\mu_1$, oder $2\mu_2 \equiv 0 \mod 2^\nu$, entnimmt man dies unmittelbar aus der Summendefinition; für $2(\mu_1+\mu_2)\equiv 0 \mod 2^\nu$, wo μ_1 und μ_2 ungerade sind, gilt bekanntlich für jeden Primdivisor $\mathfrak{p}$

$$\omega_{2\mu_1, 2\mu_2; 2^\nu}(\mathfrak{p}) = \left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right)_{2^\nu}^{2\mu_1} = \left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right)_{2^{\nu-1}}^{\mu_1} = (-1)^{\frac{N(\mathfrak{p})-1}{2^{\nu-1}}} = 1 .$$

(Siehe Hasse [4] § 20.4. Die dortigen Betrachtungen für Primkörper können ohne weiteres auf beliebige Galois-Felder übertragen werden.) Aus (3.6) und (3.7) folgt somit

$$\chi_{\mu_1, \mu_2; 2^\nu}(\alpha_0) = \chi_{\mu_1, \mu_2; 2^\nu}(\beta_0{}^2) \equiv 1 \mod 2 .$$

Folglich ist

$$\chi_{\mu_1, \mu_2; 2^\nu}(\alpha_0) = \pm 1 \quad \text{und} \quad \chi_{\mu_1, \mu_2; 2^\nu}(\alpha) = \chi_{\mu_1, \mu_2; 2^\nu}(\alpha_0)^2 = 1 .$$

ad 2.) Wir verwenden hier wiederum die Davenport-Hassesche Reduktionsformel

$$\omega_{2\mu_1, 2\mu_2; 2^\nu}(\beta_0) = \omega_{\mu_1, \mu_2; 2^{\nu-1}}[N_{2^\nu/2^{\nu-1}}(\beta_0)] . \tag{3.8}$$

Ähnlich wie bei Satz 3 besteht die Kongruenz

$$N_{2^\nu/2^{\nu-1}}(\beta_0) \equiv 1 \mod 4(1-i) .$$

Da somit $N_{2^\nu/2^{\nu-1}}(\beta_0)^2 \equiv 1 \mod 8(1-i)$, ist nach Induktionsannahme

$$\chi_{\mu_1, \mu_2; 2^{\nu-1}}[N_{2^\nu/2^{\nu-1}}(\beta_0)^2] = 1$$

und daher

$$\chi_{\mu_1, \mu_2; 2^{\nu-1}}[N_{2^\nu/2^{\nu-1}}(\beta_0)] = \pm 1 .$$

Da insbesondere

$$N_{2^\nu/2^{\nu-1}}(\beta_0) \equiv 1 \mod 2 ,$$

muss

$$\pm 1 = \chi_{\mu_1, \mu_2; 2^{\nu-1}}[N_{2^\nu/2^{\nu-1}}(\beta_0)] \equiv \omega_{\mu_1, \mu_2; 2^{\nu-1}}[N_{2^\nu/2^{\nu-1}}(\beta_0)] \mod 2$$

gelten. Zusammengefasst erhält man aus (3.6), (3.7) und (3.8)

$$\chi_{\mu_1, \mu_2; 2^\nu}(\alpha_0) = \chi_{\mu_1, \mu_2; 2^\nu}(\beta_0{}^2) \equiv \pm 1 \mod 2 ,$$

was $\chi_{\mu_1, \mu_2; 2^\nu}(\alpha_0) = \pm 1$ nach sich zieht, und daher

$$\chi_{\mu_1, \mu_2; 2^\nu}(\alpha) = \chi_{\mu_1, \mu_2; 2^\nu}(\alpha_0)^2 = 1, \qquad \text{w.z.b.w.}$$

4. Schlussnote.

Die Exponentenpaare (μ_1, μ_2) waren in **2.** und **3.** der Bedingung $(\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2), m) = 1$ für ungerades m und $(\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2), m) \mid 2^{a-1}$ für gerades m mit $2^a \| m$ unterworfen. Wir werden jetzt sehen, wie die Ergebnisse sich übertragen lassen, wenn man sich von dieser Einschränkung befreit und die Exponentenpaare nur der Bedingung $\mu_1, \mu_2, (\mu_1+\mu_2) \not\equiv 0 \bmod m$ und $(\mu_1, \mu_2, m) = 1$ unterwirft. Dann versagt die in **2.** erwähnte Beziehung zwischen den Grössencharakteren in P_m und $P_{l_i^{\nu_i}}$. Denn die den $\omega_{\mu_1,\mu_2;m}$ zugeordneten $\omega_{\mu_1,\mu_2;l_i^{\nu_i}}$ können ja trivial werden, falls $l_i^{\nu_i}$ in einer der Zahlen $\mu_1, \mu_2, \mu_1+\mu_2$ aufgeht. Vermöge der Summendefinition erhält man für Primdivisoren $\mathfrak{p}$

$$\omega_{\mu_1,\mu_2;l_i^{\nu_i}}(\mathfrak{p}) = \left\{\begin{array}{lll} 1 & \text{falls} & l_i^{\nu_i} \mid \mu_1 \quad \text{oder} \quad l_i^{\nu_i} \mid \mu_2 \\ \left(\dfrac{-1}{\mathfrak{p}}\right)_{l_i^{\nu_i}}^{\mu_1} & \text{falls} & l_i^{\nu_i} \mid (\mu_1+\mu_2) \end{array}\right\}.$$

Für ungerades l_i ist natürlich $(-1/\mathfrak{p})_{l_i^{\nu_i}}^{\mu_1} = 1$; für $l_i = 2$ ergibt sich

$$\omega_{\mu_1,\mu_2;l_i^{\nu_i}}(\mathfrak{a}) = \left(\frac{-1}{\mathfrak{a}}\right)_{l_i^{\nu_i}}^{\mu_1}.$$

Auf Zahlen α spezialisiert entsteht dadurch ein Zahlcharakter, der für $l_i^{\nu_i} \mid (\mu_1+\mu_2)$ und $l_i = 2$ einen in 4 aufgehenden Führer besitzt, sonst aber den identischen Einscharakter darstellt. Fasst man in diesen entarteten Fällen $\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;l_i^{\nu_i}})$ als Führer der hier erwähnten Charaktere auf, so kann von den Sätzen 1. und 2. die obere Abschätzung (Teil I) entsprechend) aufrechterhalten werden, allerdings nur mit einer Modifikation:

Satz 2a. *Im Körper P_m besteht folgende Abschätzung des Führers des Grössencharakters $\omega_{\mu_1,\mu_2;m}$:*

$$\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;m}) \mid \text{kl. gem. Vielf. v.} \left[\prod_{i=1}^{r} \mathfrak{l}_{l_i^{\nu_i}}, \prod_{i=1}^{r} \mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;l_i^{\nu_i}})\right],$$

falls m die Primzerlegung $m = \prod_{i=1}^{r} l_i^{\nu_i}$ besitzt.

Die in **3.** gegebenen Abschätzungen können ohne weiteres auf den allgemeinen Fall übertragen werden. Mittels der dortigen Methoden erreicht man sogar leicht folgende Verschärfung von Satz **3**:

Satz 3a. *Für ungerade Primzahlpotenzen l besteht folgende Führerabschätzung der Grössencharaktere $\omega_{\mu_1,\mu_2;l^\nu}$:*

$$\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;l^\nu}) \mid l\mathfrak{l}_l\mathfrak{l}_{l^{\mathrm{Min}(\varrho+2,\nu)}},$$

wo ϱ durch $l^\varrho \| \mu_1\mu_2$ bestimmt ist.

Aus den Sätzen 2a, 3a, und 4 (der letztere auf den allgemeinen Fall übertragen) ergibt sich jetzt zusammengenommen folgender

Satz 5. *Für den Führer des Grössencharakters* $\omega_{\mu_1,\mu_2;m}$ *gilt für ungerades* m *mit der Primzerlegung* $m=\prod_{i=1}^r l_i^{\nu_i}$ *die Abschätzung*

$$\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;m}) \mid \prod_{i=1}^{r} l_i \mathfrak{l}_{l_i} \mathfrak{l}_{l_i^2},$$

und für gerades $m=2^a\prod_{i=1}^r l_i^{\nu_i}$

$$\mathfrak{f}(\omega_{\mu_1,\mu_2;m}) \mid 8(1-i)\prod_{i=1}^{r} l_i \mathfrak{l}_{l_i} \mathfrak{l}_{l_i^2}.$$

In beiden Fällen ist die Abschätzung nur von den in m vorkommenden Primteilern abhängig.

LITERATURVERZEICHNIS

1. H. Davenport und H. Hasse, *Die Nullstellen der Kongruenzzetafunktionen in gewissen zyklischen Fällen*, J. Reine Angew. Math. 172 (1934), 151–182.
2. H. Hasse, *Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper* II, Jber. Deutsch. Math. Verein. Ergänzungsband 6 (1930).
3. H. Hasse, *Klassenkörpertheorie*, vervielf. Vorlesungsausarbeitung, Marburg, 1932–33.
4. H. Hasse, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Berlin, 1950.
5. H. Hasse, *Zetafunktionen und L-Funktionen zu einem arithmetischen Funktionenkörper vom Fermatschen Typus*, Abh. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math.-Nat. 1954 Heft 4 (1955).
6. H. Hasse, *Über die Charakterführer zu einem arithmetischen Funktionenkörper vom Fermatschen Typus*, Wiss. Veröffentlichungen der Nationalen Technischen Universität, Athen, No. 12 (1957).
7. A. Weil, *On Jacobi sums as »Grössencharaktere«*, Trans. Amer. Math. Soc. 73 (1952), 487–495.

UNIVERSITÄT KOPENHAGEN, DÄNEMARK