MATH. SCAND. 8 (1960), 105–115

# DERIVIERTE SCHNITTE BEI DER TRANSFORMATION VON MANNIGFALTIGKEITEN

JOSEF WEIER

## Einleitung.

Seien $n \geqq 2$ eine natürliche Zahl, $M$ eine $(2n-1)$-dimensionale und $N$ eine $n$-dimensionale orientierte zusammenhängende geschlossene polyedrale Mannigfaltigkeit, ferner $f, g\colon M \to N$ stetige Abbildungen. Man kann, wie dies unten dargelegt ist, annehmen, dass die Menge aller Punkte $p \in M$ mit $f(p)=g(p)$ ein endliches $(n-1)$-Polyeder $A$ ist. Über $A$ liegt ein durch $(f, g)$ bestimmter ganzzahliger $(n-1)$-Zyklus $z$. Seien $z_1, z_2, \ldots, z_r$ die unten erklärten Homotopiekomponenten von $z$ bezüglich $(f, g)$ und, sofern solche existieren, $j \neq k$ zwei der Zahlen $1, 2, \ldots, r$ derart, dass $z_j \sim 0$.

Die ganzzahligen $n$-Ketten $x$ aus $M$ mit $\partial x = z_j$ zerfallen in Äquivalenzklassen

$$Y_{j1}, Y_{j2}, \ldots$$

durch die Festsetzung, dass zwei solche Ketten, sie mögen $x_1$ und $x_2$ heissen, zur gleichen Klasse gehören, wenn $x_1 - x_2 \sim 0$. Für $i = 1, 2, \ldots$ sei dann $\sigma_{jki}$ die Schnittzahl von $(y_i, z_k)$, wobei $y_i$ eine Kette aus $Y_{ji}$ bedeutet.

Ist $z_j \nsim 0$ und $z_k \sim 0$, so erklären sich die Zahlen $\sigma_{jki}$ analog inbezug auf $z_k$ statt inbezug auf $z_j$. Wenn gleichzeitig $z_j \nsim 0$ und $z_k \nsim 0$, so sei $\sigma_{jki} = 0$; ebenso wenn $j = k$. Die Zahlen

$$\sigma_{jki}, \quad j = 1, 2, \ldots, r; \quad k = 1, 2, \ldots, r; \quad i = 1, 2, \ldots,$$

bilden dann das »*Schnittsystem erster Art*« von $(f, g)$.

Zur Erklärung der Zahlen $\sigma^*{}_{jki}$ sei wieder $j \neq k$ und $z_j \sim 0$. Es bedeute $y$ eine Kette aus $Y_{ji}$. Zwei Punkte $a_1, a_2$ der Menge

$$|y| \cap |z_k|$$

mögen zur gleichen »*Schnittklasse*« von $(y, z_k)$ bezüglich $(f, g)$ gehören, wenn eine $a_1$ mit $a_2$ innerhalb des $n$-Polyeders $|y|$ verbindende Kurve $\{c^\tau\}$ existiert, so dass $\big(f(c^\tau),\ 0 \leqq \tau \leqq 1,\ g(c^\tau),\ 1 \geqq \tau \geqq 0\big)$ innerhalb $N$ null-

Eingegangen am 25. September 1959.

homotop ist. Man kann, dies wird im zweiten Abschnitt erläutert, annehmen, dass $|y| \cap |z_k|$ aus endlich vielen Punkten besteht. Diese Punkte zerfallen also in endlich viele Schnittklassen

$$b_{l1}, b_{l2}, \ldots, \qquad l = 1, 2, \ldots .$$

Der Gedanke, die Schnittpunkte in Klassen zusammenfassen, geht auf eine bekannte Klassendefinition von J. Nielsen zurück, die er meines Wissens zuerst in [2] angegeben hat.

Ist $\xi(b_{lm})$ die Schnittzahl [3] von $(y, z_k)$ im Punkte $b_{lm}$ und $\beta_l$ die Zahl

$$\beta_l = \sum_m \xi(b_{lm}) ,$$

so bilden die Zahlen $\beta_1, \beta_2, \ldots$ das »*Schnittsystem zweiter Art*« von $(y, z_k)$ bezüglich $(f, g)$. Die Anzahl der $\beta_i \neq 0$ heisse

$$\sigma^*_{jki}(y) .$$

Hierauf ist $\sigma^*_{jki}$ die kleinste unter den Zahlen $\sigma^*_{jki}(y)$, wenn man $y$ die Äquivalenzklasse $Y_{ji}$ durchlaufen lässt.

Im Falle $j \neq k$, $z_j \nsim 0$, $z_k \sim 0$ erklärt sich $\sigma^*_{jki}$ analog. In allen übrigen Fällen ist wieder $\sigma^*_{jki} = 0$. Die Zahlen

$$\sigma^*_{jki}, \qquad j = 1, 2, \ldots, r; \quad k = 1, 2, \ldots, r; \quad i = 1, 2, \ldots ,$$

bilden das »*Schnittsystem zweiter Art*« von $(f, g)$.

Von Nullen und Umordnungen abgesehen, sind die Schnittsysteme erster und zweiter Art von $(f, g)$ eindeutig bestimmt. Dies wird unten präzisiert.

Ist das Abbildungspaar $(f', g')$ zu $(f, g)$ homotop, also $f'$ zu $f$ und $g'$ zu $g$ homotop, so sind die Schnittsysteme erster und zweiter Art von $(f, g)$ zu den entsprechenden von $(f', g')$ äquivalent. Die Äquivalenz ist dabei so definiert: Sind $T$ eine Menge von Tripeln $(j, k, i)$ natürlicher Zahlen $j, k, i$, kurz eine Tripelmenge, und $T'$ eine weitere Tripelmenge, ferner $\varphi$ und $\varphi'$ eindeutige Abbildungen von $T$, $T'$ in die ganzen Zahlen, so bezeichnen wir $\varphi$ und $\varphi'$ als »*äquivalent*«, wenn eine Teilmenge $T^*$ von $T$ und eine eineindeutige Abbildung $h: T^* \to T'$, existieren, die die Eigenschaften haben:

$$\begin{aligned} \varphi(j, k, i) &= 0 && \text{für alle } (j, k, i) \in T - T^* , \\ \varphi'(j, k, i) &= 0 && \text{für alle } (j, k, i) \in T' - h(T^*) , \\ \varphi(j, k, i) &= \varphi' h(j, k, i) && \text{für alle } (j, k, i) \text{ aus } T^* . \end{aligned}$$

Sei etwa $g$ eine unwesentliche Abbildung. Dann gilt: die Abbildung $f$ ist sicher wesentlich, wenn wenigstens eine der Zahlen $\sigma_{jki} \neq 0$. Verschwinden alle $\sigma_{jki}$, so liefert das Schnittsystem zweiter Art weitere Bedingungen: es ist $f$ wesentlich, wenn wenigstens ein $\sigma^*_{jki} \neq 0$.

**1. Präliminarien.**

Die Mannigfaltigkeiten $M$ und $N$ der Einleitung mögen in einem euklidischen Raume liegen. Sind $f, f', g$: $M \to N$ stetige Abbildungen, $U$ eine $(2n-1)$-Zelle in $M$ und $V$, $W$ zwei $n$-Zellen in $N$, so heisse $(f', g)$ eine »*lokale Homotopie*« von $(f, g)$ bezüglich $(U, V, W)$, wenn

$$f'|M-U = f|M-U, \qquad f(\overline{U}) \cup f'(\overline{U}) \subset V, \qquad g(\overline{U}) \subset W,$$

und überdies gilt: ist $V \cap W \neq 0$, so gibt es eine $n$-Zelle $X$ in $N$ mit $V \cup W \subset X$. Das Abbildungspaar $(f, g)$: $M \to N$ heisse »*regulär*«, wenn die Menge aller Punkte $p \in M$ mit $f(p) = g(p)$ ein endliches Polyeder $A$ einer Dimension $\leqq n-1$ ist. Wir bezeichnen $A$ auch mit

$$s(f, g)\,.$$

Über $s(f, g)$ liegt ein endlicher ganzzahliger $(n-1)$-Zyklus $z$. Dies ist in [4] für den Fall ausführlich dargelegt, dass $g(M)$ ein Punkt aus $N$ ist. Man vergleiche diese Arbeit auch, was Simplexe, Zellen, Polyeder und den Abstand $d$ betrifft. Im allgemeinen Falle erklärt sich $z$ fast ebenso. Statt $z$ schreiben wir auch

$$\sigma(f, g)\,.$$

Es heisse $z$ der »durch $(f, g)$ bestimmte Zyklus« über $A$. Offenbar ist $s(f, g) = |\sigma(f, g)|$, wobei wie üblich $|\ldots|$ den Übergang von der Kette zum Trägerpolyeder der Kette bezeichnet. Sind $x, y$ endliche ganzzahlige Ketten in $M$ mit

$$\dim x + \dim y = \dim M \qquad \text{und} \qquad |\partial x| \cap |\partial y| = 0\,,$$

so bezeichne $\sigma(x, y)$ die Schnittzahl (im Sinne von [1] und [3, S. 137–147]) von $(x, y)$.

*Die so erklärte Bedeutung von $n$, $M$, $N$, $s$ und $\sigma$ gelte bis zum Schlusse dieser Arbeit.*

Mit der im ersten Absatz dieses Abschnittes definierten Bedeutung von $f, g$: $M \to N$ und $z = \sigma(f, g)$ seien $y_1, y_2, \ldots$ die Komponenten von $z$. Zwei $y_i$, sie mögen $y_j$ und $y_k$ heissen, gehören dann zur gleichen »*Homotopiekomponente*« von $(f, g)$, wenn ein Punkt $a$ in $y_j$, ein Punkt $b$ in $y_k$ und eine $a$ mit $b$ verbindende Kurve $\{c^\tau\}$ in $M$ existieren, so dass die geschlossene Kurve

$$\left(f(c^\tau),\ 0 \leqq \tau \leqq 1,\quad g(c^\tau),\ 1 \geqq \tau \geqq \tau 0\right)$$

innerhalb $N$ nullhomotop ist.

Auf einen Beweis der folgenden Sätze 1 bis 3 verzichten wir, da verwandte Aussagen in meiner oben zitierten Arbeit erläutert sind.

THEOREM 1. *Seien $y$, $z$ zwei zueinander fremde endliche ganzzahlige $(n-1)$-Zyklen in $M$ ferner $A$, $B$ zwei $n$-Ketten in $M$ mit $\partial A = \partial B = y$ und $A - B \sim 0$. Dann ist $\sigma(A, z) = \sigma(B, z)$.*

THEOREM 2. *Sind $f, g: M \to N$ stetige Abbildungen, $U$ eine in $M$ offene Menge mit $s(f, g) \subset U$ und $\varepsilon$ eine positive Zahl, so existiert eine stetige Abbildung $f': M \to N$ mit $f|M-U = f'|M-U$ und $d(f, f') < \varepsilon$ derart, dass $s(f', g)$ ein endliches Polyeder einer Dimension $\leqq n-1$ ist.*

THEOREM 3. *Seien $f$, $f'$, $g$: $M \to N$ stetige Abbildungen, $s(f, g)$ und ebenso $s(f', g)$ ein endliches Polyeder einer Dimension $\leqq n-1$. Dann gibt es Abbildungen*

$$f_0, \ldots, f_r: M \to N \qquad \textit{mit} \qquad f_0 = f \quad \textit{und} \quad f_r = f'$$

*und den weiteren Eigenschaften: für alle $i > 0$ ist $(f_i, g)$ eine lokale Homotopie von $(f_{i-1}, g)$, für alle $i$ ist $s(f_i, g)$ ein endliches Polyeder einer Dimension $\leqq n-1$.*

THEOREM 4. *Seien $f$, $f'$, $g$: $M \to N$ stetige Abbildungen, $(f', g)$ eine lokale Homotopie von $(f, g)$ bezüglich $(U, V, W)$ und $(f, g)$ wie $(f', g)$ regulär. Dann lassen sich die Homotopiekomponenten von $(f, g)$ derart mit*

$$z_1, z_2, \ldots, z_r$$

*bezeichnen, dass gilt: jedes $z_i$ mit $i \geqq 2$ ist zu $\overline{U}$ fremd und Homotopiekomponente von $(f', g)$; ausser den $z_2, \ldots, z_r$ besitzt $(f', g)$ höchstens zwei weitere Homotopiekomponenten; hat $(f', g)$ zwei weitere Homotopiekomponenten $\zeta_1$ und $\zeta_2$, so ist*

$$\zeta_1 = z_1, \qquad z_1 \cap \overline{U} = 0, \qquad \zeta_2 \subset U;$$

*hat $(f', g)$ genau eine weitere Homotopiekomponente $z_1'$, so ist entweder $z_1' = z_1$ und $z_1 \cap \overline{U} = 0$, oder es gibt eine endliche $n$-Kette $y$ in $\overline{U}$ mit*

$$z_1' - z_1 = \partial y;$$

*hat $(f', g)$ keine weitere Homotopiekomponente, so ist $z_1 \subset \overline{U}$.*

BEWEIS. Mit $z = \sigma(f, g)$ und $z' = \sigma(f', g)$ gehören alle Punkte aus dem Durchschnitt $z \cap \overline{U}$ zur gleichen Homotopiekomponente von $(f, g)$, ebenso alle Punkte aus $z' \cap \overline{U}$ zur gleichen Homotopiekomponente von $(f', g)$. Also lassen sich die Homotopiekomponenten von $(f, g)$ so mit $z_1, z_2, \ldots, z_r$ bezeichnen, dass $z_i$ zu $\overline{U}$ fremd für alle $i \geqq 2$. Jedes $z_i$ mit $i \geqq 2$ ist auch

Homotopiekomponente von $(f', g)$. Weiterhin unterscheiden wir drei Fälle.

Wenn *erstens* $z' \cap \overline{U} = 0$, so ist $z' - (z_2 + \ldots + z_r) \subset z_1$. Im Falle $z' = z_2 + \ldots + z_r$ ist nichts weiter zu beweisen. Im anderen Falle setzen wir $z_1' = z_1 - \overline{U}$. Wegen $z' \cap (\overline{U} - U) = 0$ ist auch $z \cap (\overline{U} - \mathrm{U}) = 0$. Also besteht $z_1 - \overline{U}$ aus Komponenten von $z_1$. Hier ist also Satz 4 richtig.

Es sei *zweitens* $z' \cap \overline{U} \neq 0$ und $z_1 - U = 0$. Hier setzen wir $z_1' = z' \cap \overline{U}$. Dann ist $z_1' + z_1 \subset \overline{U}$. Daher gibt es eine $n$-Kette $y$ in $\overline{U}$ mit $z_1' - z_1 = \partial y$. Auch hier ist Satz 4 richtig.

Verbleibt *drittens* der Fall, dass $z' \cap \overline{U} \neq 0$ und $z_1 - U \neq 0$. Sei $\xi_1$ die $z_1 - U$ enthaltende Homotopiekomponente von $(f', g)$ und $\xi_2$ die $z' \cap \overline{U}$ enthaltende Homotopiekomponente von $(f', g)$, wobei nicht notwendig $\xi_1 \neq \xi_2$ gilt. Unmittelbar aus der Erklärung der $\xi_i$ und $z_i$ folgt, dass

$$z' = \xi_1 + \xi_2 + (z_2 + \ldots + z_r) .$$

Ist $\xi_1 = \xi_2$, so sei $z_1' = \xi_1 = \xi_2$. Hier liegt $z_1' - z_1$ in $\overline{U}$, also existiert ein $y$ von der in Satz 4 erklärten Art.

Jetzt sei $\xi_1 \neq \xi_2$. Wir setzen $\zeta_i = \xi_i$ für $i = 1, 2$. Angenommen, es wäre $z_1 \cap \overline{U} \neq 0$. Dann seien $a$ ein Punkt aus $z_1 \cap \overline{U}$, $b$ ein Punkt aus $z_1 - U$ und $\{c^\tau\}$ eine $a$ mit $b$ verbindende Kurve, so dass $\big(f(c^\tau),\ 0 \leqq \tau \leqq 1,\ g(c^\tau),\ 1 \geqq \tau \geqq 0\big)$ in $N$ nullhomotop ist. Sei $a'$ ein Punkt aus $\xi_2 \cap \overline{U}$ und $\{e^\tau\}$ eine $a'$ mit $a$ innerhalb $U$ verbindende Kurve. Dann bestätigt man leicht, dass die geschlossene Kurve

$$\big(f'(e^\tau),\ 0 \leqq \tau \leqq 1,\ f'(c^\tau),\ 0 \leqq \tau \leqq 1,\ g(c^\tau),\ 1 \geqq \tau \geqq 0,\ g(e^\tau),\ 1 \geqq \tau \geqq 0\big)$$

in $N$ nullhomotop ist, dass also $a'$ und $b$ zur gleichen Homotopiekomponente von $(f', g)$ gehören. Dabei ist aber $b \in \xi_1$ und $a' \in \xi_2$: ein Widerspruch. Mithin $z_1 \cap \overline{U} = 0$, wie in Satz 4 behauptet.

## 2. Eindeutigkeit der Schnittsysteme zweiter Art.

Seien $y$ eine endliche ganzzahlige $n$-Kette in $M$, weiter $f, g \colon M \to N$ stetige Abbildungen, $(f, g)$ regulär und $z$ eine Homotopiekomponente von $(f, g)$, so dass

$$|\partial y| \cap |z| = 0$$

und $|y| \cap |z|$ aus höchstens endlich vielen Punkten besteht. Ist $|y| \cap |z|$ leer, so besteht das Schnittsystem zweiter Art von $(y, z)$ bezüglich $(f, g)$ nur aus der Zahl Null. Jetzt seien

$$a_1, a_2, \ldots$$

die endlich vielen Punkte der Menge $|y| \cap |z| \neq 0$. Es bedeute $\xi(a_i)$ die Schnittzahl von $(y, z)$ in $a_i$.

Zwei $a_i$, etwa $a_j$ und $a_k$, mögen zur gleichen »*Schnittklasse*« von $(y, z)$ bezüglich $(f, g)$ gehören, wenn in dem $n$-Polyeder $|y|$ eine $a_j$ mit $a_k$ verbindende Kurve $\{c^\tau\}$ existiert derart, dass $\big(f(c^\tau),\ 0 \leqq \tau \leqq 1,\ g(c^\tau),\ 1 \geqq \tau \geqq 0\big)$ innerhalb $N$ nullhomotop ist. Dadurch zerfallen die $a_i$ in endlich viele Klassen $b_{i1}, b_{i2}, \ldots, i = 1, 2, \ldots$, die vorgenannten Schnittklassen. Die Schnittzahl der Klasse $B_i = \bigcup_j b_{ij}$ ist die Zahl $\beta_i = \sum_j \xi(b_{ij})$. Hierauf bilden die Zahlen $\beta_1, \beta_2, \ldots$ das »*Schnittsystem zweiter Art*« von $(y, z)$ bezüglich $(f, g)$.

Seien $\{f^\tau\}$: $M \to N$ eine Homotopie, $g$: $M \to N$ eine stetige Abbildung, $(f^\tau, g)$ für alle $\tau$ regulär und $z$ der Zyklus $\sigma(f^0, g)$. Existiert dann eine Homotopie $\{\varphi^\tau\}$ eineindeutiger simplizialer Abbildungen von $z$ in $M$ derart, dass $\varphi^0$ die Identität und $\varphi^\tau(z)$ für alle $\tau$ der Zyklus $\sigma(f^\tau, g)$ ist, so heisse $\{(f^\tau, g)\}$ eine »*kanonische Homotopie*«.

THEOREM 5. *Eindeutigkeitssatz. Seien $y$ eine in $M$ gelegene ganzzahlige endliche $n$-Kette, $\{(f^\tau, g)\}$: $M \to N$ eine kanonische Homotopie, $z$ eine Homotopiekomponente von $(f^0, g)$, weiter $z^\tau$ die $z$ entsprechende Homotopiekomponente von $(f^\tau, g)$ und*

$$|\partial y| \cap |z^\tau| = 0 \quad \textit{für alle } \tau .$$

*Für $i = 0, 1$ bestehe $|y| \cap |z^i|$ aus nur endlich vielen Punkten. Dann lässt sich das Schnittsystem zweiter Art von $(y, z^i)$ bezüglich $(f^i, g)$ derart mit*

$$(\alpha_1{}^i, \alpha_2{}^i, \ldots, \alpha_r{}^i, \beta_1{}^i, \beta_2{}^i, \ldots)$$

*bezeichnen, dass $\alpha_j{}^0 = \alpha_j{}^1$ für $j = 1, \ldots, r$ und $\beta_j{}^i = 0$ für alle $(i, j)$.*

BEWEIS. Wie Theorem 3 in meiner oben zitierten Arbeit [4] und wie Theorem 3 oben ergibt sich, dass man $\{(f^\tau, g)\}$ in lokale Homotopien zerlegen, dass man also in die Voraussetzungen den Zusatz aufnehmen kann: es ist $(f^1, g)$ eine lokale Homotopie von $(f^0, g)$ bezüglich $(U, V, W)$.

Seien $B_1, B_2, \ldots$ die schon in der Einleitung erwähnten Schnittklassen von $(y, z^0)$ bezüglich $(f^0, g)$. Unter den Klassen $B_k$ gibt es höchstens eine, die zu $U$ nicht fremd ist. Denn alle in $U$ liegenden Punkte des Durchschnittes $|y| \cap |z^0|$ liegen in der gleichen Schnittklasse von $(y, z^0)$ bezüglich $(f^0, g)$. Sei etwa $B_k \cap \overline{U} = 0$ für alle $k \geqq 2$. Dann ist jedes $B_k$ mit $k \geqq 2$ auch Schnittklasse von $(y, z^1)$ bezüglich $(f^1, g)$.

Für $i = 0,1$ sei $A^i$ die Menge der in $U$ liegenden Punkte von $|y| \cap |z^i|$. Ist $A^i$ leer, so setzen wir $\xi(A^i) = 0$. Sonst seien $p_1{}^i, p_2{}^i, \ldots$ die Punkte von $A^i$, weiter $\xi(p_j{}^i)$ die Schnittzahl von $(y, z^i)$ in $p_j{}^i$ und $\xi(A^i) = \sum_j \xi(p_j{}^i)$. Dann ist

$$\xi(A^0) = \xi(A^1) .$$

Denn $\{f^\tau\}$ ist ja eine Deformation von $f$, die $f$ auf $M - U$ festhält. Bei einer solchen Deformation kann sich aber die Summe derjenigen Schnittzahlen nicht ändern, die zu Punkten aus $U$ gehören.

Ist $A^i \neq 0$, so liegen alle Punkte von $A^i$ in der gleichen Schnittkomponente $C^i$ von $(y, z^i)$ bezüglich $(f^i, g)$. Denn es ist $f^i(\overline{U}) \cup g(\overline{U}) \subset V \cup W$, weiter $V \cap W \neq 0$ und daher $V \cap W$ in einer $n$-Zelle aus $N$ gelegen. Im Falle $A^0 \neq 0 \neq A^1$ ist also

$$\xi(C^0) = \xi(C^1) .$$

Ist $A^0$ leer und $A^1 \neq 0$, so ist $\xi(A^1) = 0$. Ist $A^1$ leer und $A^0 \neq 0$, so ist $\xi(A^0) = 0$. In allen von $A^0 \neq 0 \neq A^1$ verschiedenen Fällen ist daher

$$\xi(A^0) = \xi(A^1) = 0 .$$

In diesen Fällen trägt also weder $A^0$ zum Schnittsystem von $(f^0, g)$ noch $A^1$ zum Schnittsystem von $(f^1, g)$ etwas bei. Im Falle $A^0 \neq 0 \neq A^1$ sichert die Gleichung $\xi(C^0) = \xi(C^1)$ die Äquivalenz der Schnittsysteme.

Theorem 6. *Existenzsatz. Seien $P$ ein homogenes endliches $n$-Polyeder in $M$, $\varepsilon$ eine positive Zahl und $f$, $g$: $M \to N$ stetige Abbildungen, $(f, g)$ regulär, $z$ der Zyklus $\sigma(f, g)$ und*

$$|\partial y| \cap |z| = 0 .$$

*Dann gibt es eine kanonische $\varepsilon$-Homotopie $\{(f^\tau, g)\}$ von $(f, g)$, so dass die Zyklen $z^\tau = \sigma(f^\tau, g)$ die Eigenschaften haben:*

$$|\partial y| \cap |z^\tau| = 0 \text{ für alle } \tau ,$$

*es besteht $|y| \cap |z^1|$ aus höchstens endlich vielen Punkten.*

Beweis. Seien $K$ eine simpliziale Zerlegung von $M$, die in $z$ eine simpliziale Zerlegung $z'$ induziert, und $a$ ein Eckpunkt von $z'$, ferner $A$ der abgeschlossene Stern von $a$ in $K$. Ist $K$ hinreichend fein, so gibt es eine $(2n-1)$-Zelle $U$ in $M$ und eine $n$-Zelle $V$ in $N$ mit $A \subset U$ und $f(\overline{U}) \cup g(\overline{U}) \subset V$. Fürs folgende kann man annehmen, dass $U$ und $V$ Simplexe sind.

Ist $a'$ ein von $a$ hinreichend wenig entfernter Punkt aus $A$, $a^\tau$ der Punkt $(1-\tau)a + \tau a'$, setzt man $\varphi^\tau(a^\tau) = a$ und $\varphi^\tau(b) = b$ für jeden von $a$ verschiedenen Eckpunkt $b$ aus $K$, so bestimmt $\varphi^\tau$ für $0 \leqq \tau \leqq 1$ eine topologische Selbstabbildung von $M$. Setzt man

$$F^\tau(p) = g(p) + [f\varphi^\tau(p) - g\varphi^\tau(p)]$$

in allen $(p, \tau)$ mit $p \in M$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$, so ist $\varphi^{-\tau}(z')$ gerade der Zyklus $\sigma(F^\tau, g)$. Denn ist $p$ ein Punkt aus $\varphi^{-\tau}(|z|)$ und $q$ der Punkt $\varphi^\tau(p)$ aus $|z|$, so ist

$$f\varphi^\tau(p) - g\varphi^\tau(p) = f(q) - g(q) ,$$

und wegen $q \in |z|$ ist $f(q) = g(q)$. Die Homotopie $\{(F^\tau, g)\}$, die offenbar kanonisch ist, zeigt, wie man den Zyklus $z$ innerhalb $M$ topologisch verschieben kann.

Wegen $|\partial y| \cap |z| = 0$ ist auch der deformierte Zyklus zu $|\partial y|$ fremd, sofern nur die Deformation hinreichend klein ist. Der Durchschnitt $|y| \cap |z^1|$ besteht sicher dann aus höchstens endlich vielen Punkten, wenn sich $z^1$ zu $y$ in allgemeiner Lage befindet. Offenbar lässt sich aber $z$ mit Hilfe von Deformationen $\{F^\tau\}$ in allgemeine Lage zu $y$ bringen.

Damit ist Theorem 6 bewiesen.

Sind $y$ eine $n$-Kette in $M$ und $f, g$: $M \to N$ stetige Abbildungen, $(f, g)$ regulär und $z$ eine Homotopiekomponente von $(f, g)$ mit $|\partial y| \cap |z| = 0$, so gibt es nach Theorem 6 eine kanonische Homotopie $\{(f^\tau, g)\}$ von $(f, g)$ derart, dass die $z$ entsprechende Homotopiekomponente $z^\tau$ von $(f^\tau, g)$ die beiden Eigenschaften hat:

$$|\partial y| \cap |z^\tau| = 0 \qquad \text{für alle } \tau ,$$

die Menge $|y| \cap |z^1|$ ist endlich. Hierauf ist das »*Schnittsystem zweiter Art*« von $(y, z)$ bezüglich $(f, g)$ das oben definierte Schnittsystem zweiter Art von $(y, z^1)$ bezüglich $(f^1, g)$. Nach Theorem 5 ist diese Erklärung, von Nullen und Umordnungen abgesehen, eindeutig.

### 3. Äquivalenz der Schnittsysteme erster Art.

Sind $f, g$: $M \to N$ stetige Abbildungen, $(f, g)$ regulär und $z_1, z_2, \ldots, z_r$ die Homotopiekomponenten von $(f, g)$, so sind die Zahlen $\sigma_{jki}$ der Einleitung, die wir hier mit $\sigma_{jki}(f, g)$ bezeichnen wollen, so definiert. Wenn $j = k$ oder gleichzeitig $z_j \nsim 0$ und $z_k \nsim 0$, ist $\sigma_{jki}(f, g) = 0$. Wenn $z_j \nsim 0$ und $z_k \sim 0$, so seien

$$Y_{k1}, Y_{k2}, \ldots$$

die Äquivalenzklassen von $n$-Ketten $x$ mit $\partial x = z_k$ und $y_i$ eine Kette aus $Y_{ki}$. Hier ist $\sigma_{jki}(f, g)$ die Schnittzahl von $(z_j, y_i)$. Der Fall $z_j \sim 0$, $j \neq k$ ist schon eingangs ausführlich behandelt. Die Zahlen $\sigma_{jki}(f, g)$ bilden das Schnittsystem erster Art von $(f, g)$. Ersichtlich ist dieses System bis auf Nullen und Umordnungen durch die vorstehenden Definitionen eindeutig festgelegt.

Theorem 7. *Seien $f, f', g$: $M \to N$ stetige Abbildungen, $(f', g)$ eine lokale Homotopie von $(f, g)$ bezüglich $(U, V, W)$ und $(f, g)$ wie $(f', g)$ regulär. Dann ist das Schnittsystem erster Art von $(f, g)$ zum Schnittsystem erster Art von $(f', g)$ äquivalent.*

Beweis. Sind alle Homotopiekomponenten von $(f, g)$ und ebenso alle von $(f', g)$ zu $U$ fremd, so ist nichts weiter zu beweisen. Im Sinne von

Theorem 4 seien nun $z_1, z_2, \ldots, z_r$ die Homotopiekomponenten von $(f, g)$ und $z_1', z_2, \ldots, z_r$ diejenigen von $(f', g)$, weiter $y$ eine endliche $n$-Kette in $U$ mit

$$z_1' - z_1 = \partial y$$

und $j$ eine der Zahlen $2, \ldots, r$. Die beiden anderen in Theorem 4 erwähnten Fälle sind offenbar trivial. Wenn $z_1 \nsim 0$, so ist auch $z_1' \nsim 0$. Hier ist also

$$\sigma_{1ji}(f, g) = 0 = \sigma_{1ji}(f', g) \qquad \text{für alle } i\,.$$

Für $k \geqq 2$ sind die Gleichungen $\sigma_{kji}(f, g) = \sigma_{kji}(f', g)$ trivial, da dann $z_j$ wie $z_k$ zu $\overline{U}$ fremd ist.

Jetzt seien $z_1 \sim 0$ und $Y_{1i}$ die Äquivalenzklassen von $n$-Ketten $x$ aus $M$ mit $\partial x = z_1$. Für alle $i$ bedeute $y_i$ eine Kette aus $Y_{1i}$ und $Y_{1i}'$ die Menge aller $n$-Ketten $x+y$ mit $x \in Y_{1i}$. Dann sind die $Y_{1i}'$ die Äquivalenzklassen von $z_1'$: Sei *erstens* $\xi$ eine $n$-Kette mit $\partial\xi = z_1'$. Dann ist $z_1 = z_1' - \partial y = \partial(\xi - y)$, daher $\xi - y$ in einem $Y_{1i}$ gelegen, also $(\xi - y) + y = \xi$ in einem $Y_{1i}'$. Liegen *zweitens* $\xi_1$ und $\xi_2$ in $Y_{1i}'$, so gibt es $n$-Ketten $x_1$, $x_2$ in $Y_{1i}$ mit $\xi_1 = x_1 + y$ und $\xi_2 = x_2 + y$. Also ist $\xi_1 - \xi_2 = x_1 - x_2$ nullhomolog. Mithin gehören $\xi_1$, $\xi_2$ zur gleichen Äquivalenzklasse von $z'$. *Drittens* sind $n$-Ketten, die in verschiedenen $Y_{1i}'$ liegen, nicht äquivalent bezüglich $z_1'$.

Somit genügt es zu zeigen, dass die Schnittzahl von $(y_i, z_j)$ gleich der Schnittzahl von $(y_i + y, z_j)$ ist. Hierzu wiederum braucht man nur nachzuweisen, dass die Schnittzahl von $(y, z_j)$ Null ist. Diese Schnittzahl ist sicher Null, wenn $z_j$ zu $U$ fremd ist. Denn $y$ liegt in $U$.

Angenommen, es existierte ein Punkt $a_0$ in $|z_j| \cap \overline{U}$. Wegen $z_1' - z_1 = \partial y$ und $y \subset U$ gibt es einen Punkt $a_1$ in $|z_1'| \cap \overline{U}$. Ist dann $\{b^\tau\}$ eine $a_0$ mit $a_1$ innerhalb $U$ verbindende Kurve, so liegt die Kurve $(f'(b^\tau),\ 0 \leqq \tau \leqq 1,\ g(b^\tau),\ 1 \geqq \tau \geqq 0)$ in $V \cup W$. Wegen $f'(a_i) = g(a_i)$ ist $V \cap W \neq 0$. Nach der Erklärung einer lokalen Homotopie gibt es also eine $n$-Zelle $X$ in $N$ mit $V \cup W \subset X$. Die zuletzt genannte Kurve ist also nullhomotop in $N$. Also würden $a_0$ und $a_1$ zur gleichen Homotopiekomponente von $(f', g)$ gehören, während doch $z_1' \neq z_j$.

Offenbar bleiben die Theoreme 3 und 7 richtig, wenn man statt von $f, f', g$ von $f, g, g'$ ausgeht. Aus den genannten Sätzen folgt daher:

Theorem 8. *Sind $f, f', g, g'$: $M \to N$ stetige Abbildungen, $f$ zu $f'$ homotop, $g$ zu $g'$ homotop, $(f, g)$ regulär und $(f', g')$ regulär, so ist jedes Schnittsystem erster Art von $(f, g)$ zu jedem Schnittsystem erster Art von $(f', g')$ äquivalent.*

Wegen Theorem 2 kann man daher definieren: Sind $f, g$: $M \to N$ stetige Abbildungen, so ist das Schnittsystem erster Art von $(f, g)$ das

Schnittsystem erster Art von $(f', g)$, wobei $f'$ eine zu $f$ benachbarte Abbildung ist derart, dass $s(f', g)$ ein endliches Polyeder einer Dimension $\leqq n-1$ ist.

### 4. Äquivalenz der Schnittsysteme zweiter Art.

Die Bedeutung von $f$, $g$, $z_j \nsim 0$, $z_k \sim 0$ und $Y_{ki}$ sei die gleiche wie im dritten Abschnitte. Ist $y$ eine $n$-Kette aus $Y_{ki}$, so bestimmt, wie dies in der Einleitung und im zweiten Abschnitte dargelegt ist, $(z_j, y)$ bezüglich $(f, g)$ ein Schnittsystem zweiter Art $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ mit

$$\sum \alpha_l = \sigma_{jki}(f, g) .$$

Ist dann $\sigma^*_{jki}(y, f, g)$ die Anzahl der $\alpha_l \neq 0$, so ist

$$\sigma^*_{jki}(f, g) = \min[\sigma^*_{jki}(y, f, g);\ y \in Y_{ki}] .$$

Die übrigen Fälle sind schon in der Einleitung behandelt.

THEOREM 9. *Seien $f$, $f'$, $g$: $M \to N$ stetige Abbildungen, $(f', g)$ eine lokale Homotopie von $(f, g)$ bezüglich $(U, V, W)$ und $(f, g)$ wie $(f', g)$ regulär. Dann ist das Schnittsystem zweiter Art von $(f, g)$ äquivalent zum Schnittsystem zweiter Art von $(f', g)$.*

BEWEIS. Die beiden ersten Absätze aus dem Beweis zu Theorem 7 kann man fast wörtlich übernehmen: Man braucht dort lediglich $\sigma$ durch $\sigma^*$ zu ersetzen.

Zu jedem $\sigma^*_{1ji}(f, g)$ gibt es eine Kette $x_i$ in $Y_{1i}$ derart, dass die Anzahl derjenigen Schnittklassen von $(x_i, z_j)$ bezüglich $(f, g)$, deren Schnittzahl $\neq 0$, gleich $\sigma^*_{1ji}(f, g)$ ist und dass sich $x_i$ zu $z_j$ in allgemeiner Lage befindet.

Dem nachstehenden Lemma zufolge ist die Anzahl der Schnittklassen von $(x_i + y, z_j)$ bezüglich $(f', g)$ mit einer Schnittzahl $\neq 0$ gleich $\sigma^*_{1ji}(f, g)$. Also ist

$$\sigma^*_{1ji}(f', g) \leqq \sigma^*_{1ji}(f, g) .$$

Schliesst man in umgekehrter Richtung von $(f', g)$ auf $(f, g)$, so gelangt man zur Ungleichung $\sigma^*_{1ji}(f, g) \leqq \sigma^*_{1ji}(f', g)$. Mithin gilt das Gleichheitszeichen.

Die in das folgende Lemma eingefügte Voraussetzung, es stimmten $(f, g)$ und $(f', g)$ in der Anzahl ihrer Homotopiekomponenten überein, dient dem Zweck, jene Fälle von Theorem 4 auszuschliessen, die für den Beweis von Theorem 9 trivial sind.

LEMMA. *Die Bedeutung von $f$, $f'$, $g$, $U$, $V$, $W$ sei die gleiche wie in Theorem 9. Es mögen $(f, g)$ und $(f', g)$ in der Anzahl ihrer Homotopiekompo-*

*nenten übereinstimmen. Seien* $z_1 \neq z_2$ *Homotopiekomponenten von* $(f, g)$ *und* $z_1'$ *die* $z_1$ *im Sinne von Theorem 4 entsprechende Homotopiekomponente von* $(f', g)$. *Ferner seien* $x$ *eine n-Kette in* $M$ *und* $y$ *eine n-Kette in* $U$ *mit*

$$z_1 = \partial x \qquad \textit{und} \qquad z_1' - z_1 = \partial y \, .$$

*Dann ist das Schnittsystem zweiter Art von* $(x, z_2)$ *bezüglich* $(f, g)$ *äquivalent zu demjenigen von* $(x+y, z_2)$ *bezüglich* $(f', g)$.

Beweis. Sind $a, b$ Punkte aus $|x| \cap |z_2|$, die bezüglich $(f, g)$ zur gleichen Schnittklasse von $(x, z_2)$ gehören, so gehören sie auch zur gleichen Schnittklasse bezüglich $(f', g)$. Das folgt aus $f(\overline{U}) \cup f'(\overline{U}) \subset V$. Somit genügt es nachzuweisen, dass die Menge $|y| \cap |z_2|$ leer ist.

Angenommen, diese Menge sei nicht leer. Dann existiert ein Punkt $c_1$ in $|z_1'|$ und ein Punkt $c_2$ in $|z_2|$ mit $c_1 \cup c_2 \subset U$. Ist $\{c^\tau\}$ eine $c_1$ mit $c_2$ innerhalb $U$ verbindende Kurve, so ist $\big(f'(c^\tau),\ 0 \leqq \tau \leqq 1,\ g(c^\tau),\ 1 \geqq \tau \geqq 0\big)$ eine in $V \cup W$ gelegene Kurve, also $V \cap W \neq 0$ und daher die in Rede stehende Kurve nullhomotop in $N$. Also gehören $c_1$ und $c_2$ zur gleichen Homotopiekomponente von $(f', g)$, obschon doch $z_1' \neq z_2$ ist.

Wie im Anschluss an Theorem 7 kann man nun wieder mit Hilfe der Theoreme 2, 3 und 9 für beliebige stetige Abbildungen $f, g \colon M \to N$ das »*Schnittsystem zweiter Art*« des Paares $(f, g)$ erklären. Die Definition ist bis auf Äquivalenzen eindeutig.

Die eingangs angegebenen Voraussetzungen hinsichtlich der Mannigfaltigkeiten $M$ und $N$ sind scharf. Sie lassen sich abschwächen, indem man etwa Mannigfaltigkeiten im Sinne von [5, S. 244] oder auch Zellenkomplexe im Sinne von [5] zugrundelegt. Doch werden dann die geometrischen Verhältnisse viel unübersichtlicher.

## LITERATUR


1. J. W. Alexander, *On the intersection invariants of a manifold*, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 11 (1925), 143–146.
2. J. Nielsen, *Über topologische Abbildungen geschlossener Flächen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 3 (1924), 246–260.
3. K. Reidemeister, *Topologie der Polyeder*, 2. Aufl., Leipzig, 1953.
4. J. Weier, *Invariante Schnittsysteme stetiger Transformationen*, Math. Scand. 7 (1959), 33–48.
5. J. H. C. Whitehead, *Combinatorial homotopy*, Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), 213–245, 253–496.
6. R. L. Wilder, *Topology of manifolds*, New York, 1949.


UNIVERSITÄT FREIBURG I BR., DEUTSCHLAND