MATH. SCAND. 8 (1960), 116–120

RÉCTIFICATION A L'ARTICLE « UNE CARACTÉRISATION ABSTRAITE DES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS »

JAAK PEETRE

La démonstration du théorème de [2] est manifestement incomplète: Ce n'est pas du tout évident que la famille $\{a^\alpha\}$ soit finie en chaque point [2, p. 216]. Ce n'est pas d'ailleurs difficile de la rendre complète sans changer beaucoup les idées originales. Nous préferons pourtant d'en donner une autre démonstration qui nous permet de traiter une situation plus générale. — Je tiens à remercier M. Carleson qui m'a communiqué l'erreur dans la démonstration originale et qui m'a proposé le principe de cette nouvelle démonstration.

Soit Ω un ouvert de R^n. Soit P une application linéaire de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$ ayant la propriété suivante:

$$\text{supp}\, Pf \subset \text{supp} f . \tag{1}$$

(Ceci équivaut à dire que P est un homomorphisme du faisceau $\tilde{\mathscr{E}}$ dans le faisceau $\tilde{\mathscr{D}}'$, cf. [2].) Nous allons voir que cette condition entraîne à peu près la continuité de P (th. 1 et th. 2). Introduisons les normes

$$\|f\|_k = \sup |D_\alpha f(x)|, \qquad |\alpha| \leqq k, \quad x \in \Omega ,$$

dans $\mathscr{D}(\Omega)$ et les normes duales

$$\|g\|_{-k} = \|g, U\|_{-k} = \sup |\langle g,f\rangle|/\|f\|_k, \qquad f \in \mathscr{D}(U) ,$$

dans $\mathscr{D}'(\Omega)$, U étant un ouvert relativement compact de Ω. Étant donnés $g \in \mathscr{D}'(\Omega)$ et U, on a $\|g, U\|_{-k} < +\infty$ pour k suffisamment grand. Étant donnés $x \in \Omega$ et k, soit $j = j(k,x)$ les plus petit des nombres $+\infty$ et (s'il existe) le plus petit j tel que

$$\sup \|Pf, U\|_{-k}/\|f\|_j < +\infty, \qquad f \in \mathscr{D}(U) ,$$

pour un voisinage convenable U de x. Nous dirons que x est un point de continuité s'il existe un voisinage U de x tel que la restriction de P à

Reçu le 4 avril, 1960.

$\mathscr{D}(U)$ soit continue comme application de $\mathscr{D}(U)$ dans $\mathscr{D}'(U)$, et qu'il est un point de discontinuité dans le cas contraire. Soit Λ l'ensemble des points de discontinuité de P. Si $x \in \Lambda$, on a $j = +\infty$ pour tout k; si $x \notin \Lambda$, on a $j < +\infty$ pour k suffisamment grand.

LEMME. *L'ensemble Λ est localement fini. Pour tout ouvert relativement compact U de Ω, la fonction $j(k,x)$ est bornée dans $U - \Lambda$ pour k suffisamment grand.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de démontrer qu'on ne peut pas trouver une suite (x_p) dans U avec $x_p \neq x_q$ pour $p \neq q$ et deux suites d'entiers (j_p) et (k_p) tendant vers l'infini telles que

$$j_p < j(k_p, x_p) .$$

Dans une telle situation, nous pouvons successivement trouver des ouverts U_p tels que $x_p \in U_p$ et $U_p \cap U_q = \emptyset$ pour $p \neq q$, et des fonctions $f_p \in \mathscr{D}(U_p)$ telles que

$$\|f_p\|_{j_p} = 2^{-p} \qquad \text{et} \qquad \|Pf_p\|_{-k_p} \geqq 2^p .$$

On a $f = \sum f_p \in \mathscr{D}(U)$ et $Pf = Pf_p$ dans U_p. Par conséquent, on a

$$\|Pf, U\|_{-k_p} \geqq \|Pf_p\|_{-k_p} \geqq 2^p$$

pour tout p, ce qui est absurde.

THÉORÈME 1. *Soit P une application linéaire de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$ ayant la propriété* (1). *Il existe une famille de distributions $\{a^\alpha\}$, localement finie et unique en dehors de Λ, telle que*

$$\operatorname{supp}\left(Pf - \sum a^\alpha D_\alpha f\right) \subset \Lambda$$

pour $f \in \mathscr{D}(\Omega)$.

(Une famille de distributions est dite localement finie, si dans toute partie compacte de Ω, on a $a^\alpha = 0$ pour α suffisamment grand.)

DÉMONSTRATION. Soit U un ouvert relativement compact de Ω. Il résulte du lemme qu'on peut trouver des entiers j et k tels que tout $x_0 \in U - \Lambda$ admet un voisinage V tel que

$$|\langle Pf, g\rangle| \leqq C \|f\|_j \|g\|_k$$

pour $f \in \mathscr{D}(V)$ et $g \in \mathscr{D}(V)$, C étant une constante. Donc, en vertu du théorème des noyaux, il existe une distribution $Q \in \mathscr{D}'(V \times V)$ telle que

$$\langle Pf, g\rangle = \langle\langle Q(x,y),\ f(x)g(y)\rangle\rangle$$

pour $f \in \mathscr{D}(V)$ et $g \in \mathscr{D}(V)$. $(\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$ y désigne la dualité dans l'espace produit, pour la distinguer de la dualité $\langle\, ,\rangle$ dans l'espace simple.) Grâce à l'hypothèse (1), le support de Q est contenu dans le diagonal D de $V\times V$. Par conséquent, m etant un nombre $\leqq j+k+2n+1$, on a

$$\begin{aligned}\langle\langle Q,h\rangle\rangle &= \langle\langle Q(x,y),\ h(x,y)\rangle\rangle \\ &= \sum \langle\langle Q^{\alpha\beta}(x,y),\ (D_x)_\alpha (D_y)_\beta h(x,y)\rangle\rangle, \qquad |\alpha|+|\beta| \leqq m\,,\end{aligned}$$

pour toute $h\in\mathscr{D}(V\times V)$, les $Q^{\alpha\beta}$ étant des mesures à support dans D. En prenant $h(x,y)=f(x)g(y)$, on en trouve

$$\langle Pf,g\rangle = \sum \langle b^{\alpha\beta}, D_\alpha f D_\beta g\rangle\,,$$

$b^{\alpha\beta}$ étant la projection de $Q^{\alpha\beta}$ sur V, ou encore

$$\langle Pf,g\rangle = \sum \langle D_\beta(b^{\alpha\beta}D_\alpha f),g\rangle\,,$$

d'où facilement

$$Pf = \sum a^\alpha D_\alpha f, \qquad |\alpha| \leqq m\,,$$

pour $f\in\mathscr{D}(V)$, les a^α étant des distributions dans $\mathscr{D}'(V)$. Soit maintenant f une fonction dans $\mathscr{D}(\Omega)$ qui est égale à 1 dans V. Alors on voit que

$$Pf = a^0$$

dans V. En particulier, il en résulte que a^0 est uniquement déterminé par P et qu'elle peut être prolongée comme distribution dans U entier. En prenant successivement au lieu de la fonction 1 des monômes x^α, on voit que la même condition a lieu pour toutes les a^α. Donc on a

$$\operatorname{supp}\big(Pf-\sum a^\alpha D_\alpha f\big) \subset \Lambda$$

pour toute $f\in\mathscr{D}(U)$. Comme U est arbitraire, le théorème est démontré.

Remarque. L'ordre de la distribution Q est au plus $m=j+k+2n+1$, cf. la démonstration d'Ehrenpreis [1] du théorème des noyaux, en particulier le lemme 1:

Soit K un voisinage fermé cubique de x_0 contenu dans V. On peut développer toute fonction $h\in\mathscr{D}(K\times K)$ en série de Fourier dans $K\times K$, les coefficients étant à décroissance rapide. En multipliant les exponentielles par un produit $\varphi(x)\psi(y)$ dans $\mathscr{D}(V\times V)$, égal à 1 dans $K\times K$, on trouve que, étant donnés j, k et m avec $m>j+k+2n$, toute h admet une décomposition de la forme:

$$h(x,y) = \sum_\nu \lambda_\nu f_\nu(x) g_\nu(y)\,; \qquad f_\nu \in \mathscr{D}(V), \quad g_\nu \in \mathscr{D}(V), \quad \lambda_\nu \in C\,,$$

telles que les inégalités suivantes ont lieu:

$$\|f_\nu\|_j \leqq 1, \quad \|g_\nu\|_k \leqq 1, \quad \sum_\nu |\lambda_\nu| \leqq \gamma \|h\|_m ,$$

γ étant une constante qui ne dépend pas de h. Donc, si l'on a

$$\langle Pf,g \rangle = \langle\langle Q(x,y),\ f(x)g(y) \rangle\rangle$$

et

$$|\langle Pf,g \rangle| \leqq C \|f\|_j \, \|g\|_k$$

pour $f \in \mathscr{D}(V)$ et $g \in \mathscr{D}(V)$, on trouve que

$$\begin{aligned} |\langle\langle Q,h \rangle\rangle| &\leqq \sum_\nu |\lambda_\nu| \, |\langle\langle Q(x,y), f_\nu(x) g_\nu(y) \rangle\rangle| \\ &= \sum_\nu |\lambda_\nu| \, |\langle Pf_\nu, g_\nu \rangle| \leqq \sum_\nu |\lambda_\nu| C \|f_\nu\|_j \, \|g_\nu\|_k \\ &\leqq \gamma C \|h\|_m \end{aligned}$$

pour $h \in \mathscr{D}(K \times K)$, ce qui montre que Q est d'ordre au plus m.

Le théorème 1 est le meilleur possible, c'est-à-dire qu'il peut arriver que

$$P - \sum a^\alpha D_\alpha \neq 0 .$$

En effet, soit $x_0 \in \Omega$ et choisissons une forme linéaire F définie pour des suites $\{c_\alpha\}$, telle qu'on n'a pas

$$F = \sum b^\alpha c_\alpha$$

pour une suite *finie* $\{b^\alpha\}$. Alors

$$(Pf)(x) = F\big(\{D_\alpha f(x_0)\}\big)\, \delta(x - x_0)$$

a les propriétés désirées sans être continue; on a $\operatorname{supp} Pf \subset \{x_0\}$ et P est continue sauf au point x_0. Du théorème 1 on déduit immédiatement le résultat suivant.

THÉORÈME 2. *Soit H un sous-espace de $\mathscr{D}'(\Omega)$, stable pour la multiplication avec d'éléments de $\mathscr{D}(\Omega)$, et supposons que H n'ait pas d'éléments à support localement fini. Soit P une application linéaire de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans H ayant la propriété* (1). *Il existe une famille unique de distributions $\{a^\alpha\}$, localement finie et localement dans H, telle que*

$$Pf = \sum a^\alpha D_\alpha f$$

pour $f \in \mathscr{D}(\Omega)$.

Si l'on prend $H = \mathscr{D}(\Omega)$, on retrouvera le théorème de [2]. Dans ce cas particulier, on peut se passer du théorème des noyaux et la démonstration se simplifie considérablement.

BIBLIOGRAPHIE

1. L. Ehrenpreis, *On the theory of kernels of Schwartz,* Proc. Amer. Math. Soc. 7 (1956), 713–718.
2. J. Peetre, *Une caractérisation abstraite des opérateurs différentiels,* Math. Scand. 7 (1959), 211–218.

UNIVERSITÉ DE LUND, SUÈDE