MATH. SCAND. 8 (1960), 277–286

SUR L'UNICITÉ RÉTROGRADE DANS LES PROBLÈMES MIXTES PARABOLIQUES

J.-L. LIONS et B. MALGRANGE

Introduction.

Étant donné un opérateur ou un système parabolique:

$$P = A(x,t,\partial/\partial x) + \partial/\partial t$$

où A est un opérateur fortement elliptique (>0) dans un ouvert $\Omega \subset R^n$, à coefficients dépendant de $x \in \Omega$ et $t \in [0,T]$, on considère une fonction $u(x,t)$, solution dans $\Omega \times]0,T[$ de l'équation $Pu = 0$, et vérifiant:

a) $u(x,T) = 0$,

b) les conditions aux limites sur la fontière de Ω correspondant à un problème mixte bien posé.

On dit qu'il y a « unicité rétrograde » si, dans ces conditions, u est identiquement nulle dans $\Omega \times]0,T[$.

Nous démontrons ici un résultat de ce type (avec quelques variantes en complément). Les solutions considérées sont des *solutions faibles*, en un sens qui sera précisé plus loin (évidemment, un théorème d'unicité est d'autant plus intéressant qu'il est relatif à des solutions plus faibles). La démonstration repose: 1) Sur les méthodes hilbertiennes de résolution des problèmes mixtes, cf. Lions [5] [7]. 2) Sur une inégalité a priori, du type introduit par Trèves [12], analogue à celles qui sont utilisées dans l'étude de « l'unicité du problème de Cauchy »: voir, à ce sujet, les travaux de Hörmander [2] [3] et de Caldéron [1] (et, plus précisément, la présentation donnée dans [8] ou [9] de ce dernier travail).

Un cas particulier de notre théorème 1.1 a été obtenu par Mizohata [10].

1. Un résultat d'unicité rétrograde.

On se donne deux espaces de Hilbert V et H, avec $V \subset H$; on suppose que l'injection de V dans H est continue et que V est dense dans H. Les notations sont les suivantes: si $u, v \in V$, $((u,v))$ désigne leur produit

Reçu le 22 septembre, 1960.

scalaire dans V et $\|u\| = ((u,u))^{\frac{1}{2}}$; si $f,g \in H$, (f,g) désigne leur produit scalaire dans H et $|f| = (f,f)^{\frac{1}{2}}$.

On considère une variable réelle $t \in [0,T]$, T fini. Pour chaque $t \in [0,T]$ on se donne une forme sesquilinéaire

$$u,v \to a(t;u,v)$$

continue sur $V \times V$.

La donnée du couple V,H et de la forme $a(t;u,v)$ définit un opérateur non borné $A(t)$ dans H de la façon suivante (cf. par exemple [5, Chap. II]): on désigne par $D[A(t)]$ l'ensemble des $u \in V$ tels que la forme semi-linéaire: $v \to a(t;u,v)$ soit continue sur V muni de la topologie induite par H($D[A(t)]$ peut être réduit à $\{0\}$); comme V est dense dans H, cette forme se prolonge alors par continuité en une forme semi-linéaire continue sur H, donc

$$a(t;u,v) = \big(A(t)u,v\big), \qquad A(t)u \in H\ ,$$

et on a ainsi défini un opérateur linéaire $A(t)$ de $D[A(t)]$ $\big($domaine de $A(t)\big)$ dans H.

Nous utiliserons également les espaces $L^2(0,T;X)$ (X étant un espace de Hilbert) des (classes de) fonctions de carré sommable sur $(0,T)$ à valeurs dans X.

Voici maintenant le « problème de l'unicité rétrograde » que nous allons considérer: *étant donnée une fonction u vérifiant les conditions suivantes*

(1.1) $\quad u \in L^2(0,T;V)$, $u' \in L^2(0,T;H)$,

(1.2) $\quad u(t) \in D[A(t)]$ *pour presque tout* $t \in (0,T)$,

(1.3) $\quad A(t)u(t) + u'(t) = 0\ ,$

(1.4) $\quad u(T) = 0\ ,$

quand peut-on affirmer que, $\forall\, t \in [0,T]$, *on a*: $u(t) = 0$? Nous allons donner (théorème 1.1) une condition (hypothèse I) suffisante pour qu'il en soit ainsi.

Remarque. La dérivée $u' = du/dt$ est prise au sens des distributions sur l'ouvert $]0,T[$ à valeurs dans H. Cf. [11] pour cette notion.

Si une fonction u vérifie (1.1) elle est presque partout égale à une fonction continue sur $[0,T]$ à valeurs dans H, de sorte que (1.4) a un sens. On peut préciser: u est presque partout égale à une fonction continue à valeurs dans un espace de Hilbert $V^{\frac{1}{2}}H^{\frac{1}{2}}$ intermédiaire entre V et H (cf. [6]).

Hypothèse I. On peut mettre $a(t;u,v)$ sous la forme $a_0(t;u,v)+$

$a_1(t; u,v)$, a_0 et a_1 étant, $\forall t \in [0,T]$, des formes sesquilinéaires continues sur $V \times V$ qui possèdent en outre les propriétés suivantes:

i) Pour tout u et $v \in V$, l'application $t \to a_j(t; u,v)$ est une fonction une fois continûment différentiable de $t \in [0,T]$ $(j=0,1)$.

ii) Pour tout u et $v \in V$, $a_0(t; u,v) = \overline{a_0(t; v,u)}$, et il existe λ et $\alpha > 0$ tels que, $\forall v \in V$, on ait:

$$a_0(t; v,v) + \lambda|v|^2 \geqq \alpha\|v^2\| .$$

iii) Pour tout u et $v \in V$, on a:

$$|a_1(t; u,v)| \leqq C_1\|u\|\cdot|v| ,$$

les c_j désignent des constantes.

Remarque. Il résulte de i), que, pour tout u et $v \in V$, les $a_j(t; u,v)$ sont bornés; d'après le théorème de Banach–Steinhaus, il existe donc $C > 0$ tel qu'on ait,

$$\forall t \in [0,T]: \ |a_j(t; u,v)| \leqq C\|u\|\cdot\|v\|;$$

en appliquant le même raisonnement aux

$$\frac{a_j(t';u,v) - a_j(t'';u,v)}{t'-t''}, \qquad t',t'' \in [0,T] ,$$

on trouve qu'il existe $C' > 0$ tel que, $\forall t \in [0,T]$, on ait:

$$|a_j'(t; u,v)| \leqq C'\|u\|\cdot\|v\| .$$

Cette remarque sera utilisée dans la démonstration du

Théorème 1.1. *Si l'hypothèse* I *est vérifiée, toute fonction u satisfaisant à* (1.1), (1.2), (1.8) *et* (1.4) *est nulle* (autrement dit, il y a « unicité rétrograde »).

Ce résultat s'applique à de nombreux problèmes mixtes (voir [5, chap. 6]).

2. Démonstration du Théorème 1.1.

Lemme 2.1. *Pour démontrer le théorème* 1.1, *on peut toujours supposer*

$$(2.1) \quad a_0(t; v,v) \geqq \alpha\|v\|^2, \qquad a_0(t; v,v) + \mathrm{Re}\, a_1(t; v,v) \geqq \tfrac{1}{2}\alpha\|v\|^2, \qquad v \in V .$$

Démonstration. En effet, si l'on change u en $\exp(kt)u$, k réel à choisir, les conditions (1.1), (1.2), (1.4) sont inchangées, et dans (1.3) cela revient à remplacer $A(t)$ par $A(t)+k$, donc $a(t; u,v)$ par $a(t; u,v) + k(u,v)$ d'où aussitôt le résultat (pour un choix convenable de k).

LEMME 2.2. *Sous les hypothèses du thèorème* 1.1, *toute fonction* u *qui vérifie* (1.1), ..., (1.4) *a la propriété suivante*:

$$t^{\frac{1}{2}}u' \in L^2(0,T;\, V)\,. \tag{2.2}$$

DÉMONSTRATION. Soit $w(t)$ la fonction égale à $u(t)$ pour $t \leqq T$, et à 0 pour $t \geqq T$. Prolongeons $a_j(t;\, u,v)$ pour $t \geqq T$, en désignant encore par $a_j(t;\, u,v)$ la fonction prolongée, de façon que les conditions (i), (ii), (iii) de l'hypothèse (I) aient lieu pour tout $t \geqq 0$ (Il est facile de voir que c'est possible, en diminuant au besoin α). Comme $u(T)=0$, on a alors, pour tout $v \in V$:

$$a\big(t;\, w(t),v\big) + \big(w'(t),v\big) = 0, \qquad t > 0\,. \tag{2.3}$$

Soit h un nombre >0; posons:

$$a^{(h)}(t;\, u,v) = h^{-1}[a(t+h;\, u,v) - a(t;\, u,v)], \qquad w_h(t) = h^{-1}\big(w(t+h)-w(t)\big)\,.$$

Lorsque $h \to 0$,

$$a^{(h)}(t;\, u,v) \to a'(t;\, u,v) = \frac{d}{dt}\,a(t;\, u,v)\,.$$

On déduit de (2.3):

$$a\big(t+h;\, w_h(t),v\big) + a^{(h)}\big(t;\, w(t),v\big) + \big(w_h{}'(t),v\big) = 0\,,$$

faisant dans cette relation $v = w_h(t)$, et prenant la partie réelle du résultat, il vient

$$2\,\mathrm{Re}\, a\big(t+h;\, w_h(t),w_h(t)\big) + 2\,\mathrm{Re}\, a^{(h)}\big(t;\, w(t),w_h(t)\big) + \frac{d}{dt}\,|w_h(t)|^2 = 0$$

(p.p. en t). Multipliant par t et intégrant sur $(0,\infty)$ (ce qui a un sens, puisque w est nulle pour $t>T$), on obtient

$$2\,\mathrm{Re}\int_0^\infty t\, a\big(t+h;\, w_h(t),w_h(t)\big)\,dt + 2\,\mathrm{Re}\int_0^\infty t a^{(h)}\big(t;\, w(t),w_h(t)\big)\,dt - \\ - \int_0^\infty |w_h(t)|^2 dt = 0\,.$$

Utilisant (2.1) et l'hypothèse (I), (i) (avec la remarque qui la suit), on en déduit:

$$\alpha\int_0^\infty t\,\|w_h(t)\|^2\,dt \leqq c_2\int_0^\infty t\,\|w(t)\|\;\|w_h(t)\|\,dt + \int_0^\infty |w_h(t)|^2\,dt\,,$$

et l'on en déduit

$$\int_0^\infty t\,\|w_h(t)\|^2\,dt \leqq c_3\bigg(\int_0^\infty t\,\|w(t)\|^2\,dt + \int_0^\infty |w_h(t)|^2\,dt\bigg)\,.$$

Comme $w' \in L^2(0,\infty; H)$, la quantité $\int_0^\infty |w_h(t)|^2 dt$ est bornée lorsque $h \to 0$, et par conséquent il en est de même pour la quantité $\int_0^\infty t\,\|w_h(t)\|^2 dt$, d'où le résultat. (En effet, $t^{\frac{1}{2}} w_h$ demeure dans un ensemble borné de l'espace $L^2(0,\infty; V)$; on peut donc extraire une suite $h_i \to 0$ telle que $t^{\frac{1}{2}} w_{h_i} \to S$ dans $L^2(0,\infty; V)$ faible. Mais $w_{h_i} \to w'$ dans l'espace des distributions sur $]0,\infty[$ à valeurs dans V, $t^{\frac{1}{2}} w_{h_i}$ tend vers $t^{\frac{1}{2}} w'$ dans le même espace, donc $t^{\frac{1}{2}} w' = S$, d'où le résultat.)

Lemme 2.3. (Comparer avec [8] ou [9]). *Soient ξ et s réels, ξ et $\xi+s \in]0,T]$. On se donne f, avec*

$$(2.4) \quad f \in L^2(\xi,\xi+s;\, V), \quad f(t) \in D[A(t)] \text{ p. p.}, \quad A(t)f(t) \in L^2(\xi,\xi+s;\, H)\,,$$

$$(2.5) \quad f' \in L^2(\xi,\xi+s;\, V)\,,$$

$$(2.6) \quad f(\xi) = f(\xi+s) = 0\,.$$

Il existe alors des constantes s_0 et c_4, indépendantes de ξ et de k telles que, pour $s \leqq s_0$ et k assez grand, on ait

$$(2.7) \quad \int_\xi^{\xi+s} \exp\big(k(t-\xi)^2\big)\, |A(t)f(t)+f'(t)|^2\, dt \geqq c_4 k \int_\xi^{\xi+s} \exp\big(k(t-\xi)^2\big)\, |f(t)|^2\, dt\,.$$

Démonstration. Pour simplifier l'écriture on va supposer que $\xi = 0$. Il sera clair sur la démonstration que toutes les constantes introduites sont indépendantes de ξ. Posons

$$\exp(\tfrac{1}{2}kt^2) f = w\,.$$

L'inégalité (2.7) à démontrer devient:

$$\int_0^s |(A(t)-kt)w(t) + w'(t)|^2\, dt \geqq c_4 k \int_0^s |w(t)|^2\, dt\,.$$

Si donc l'on pose

$$X_k = \int_0^s |\big(A(t)-kt\big)w(t)|^2\, dt + \int_0^s |w'(t)|^2\, dt\,,$$

$$Y_k = 2\,\mathrm{Re} \int_0^s \Big(\big(A(t)-kt\big)w(t),\ w'(t)\Big)\, dt\,,$$

il faut vérifier que

$$(2.8) \qquad X_k + Y_k \geqq c_4 k \int_0^s |w(t)|^2\, dt\,.$$

Or, comme $w'(t) \in V$ p. p., on a

$$Y_k = 2\,\mathrm{Re}\int_0^s a_0\big(t;w(t),w'(t)\big)\,dt + 2\,\mathrm{Re}\int_0^s a_1\big(t;w(t),w'(t)\big)\,dt - k\int_0^s t\,\frac{d}{dt}|w(t)|^2\,dt$$

$$= \int_0^s \left\{\frac{d}{dt}a_0\big(t;w(t),w(t)\big) - a_0'\big(t;w(t),w(t)\big)\right\}dt + 2\,\mathrm{Re}\int_0^s a_1\big(t;w(t),w'(t)\big)\,dt + {}$$
$$+ k\int_0^s |w(t)|^2\,dt$$

$$\geqq k\int_0^s |w(t)|^2\,dt - c_5\int_0^s (\|w(t)\|^2 + \|w(t)\|\,|w'(t)|)\,dt$$

$$\geqq k\int_0^s |w(t)|^2\,dt - \int_0^s |w'(t)|^2\,dt - c_6\int_0^s \|w(t)\|^2\,dt\,.$$

Mais, pour $u \in D[A(t)]$,

$$\tfrac{1}{2}\alpha\|u\|^2 \leqq |a(t;u,u)| = |(A(t)u,u)|\,,$$

donc

$$\|u\|^2 \leqq \varepsilon\,|A(t)u|^2 + c_7\varepsilon^{-1}|u|^2$$
$$\leqq 2\varepsilon\,|\big(A(t)-kt\big)u|^2 + (2\varepsilon k^2t^2 + c_7\varepsilon^{-1})\,|u|^2\,,$$

ou ε sera choisi plus loin. Donc

$$Y_k \geqq k\int_0^s |w(t)|^2\,dt - \int_0^s |w'(t)|^2\,dt - 2c_6\varepsilon\int_0^s |\big(A(t)-kt\big)w(t)|^2\,dt - {}$$
$$- c_6\int_0^s (2\varepsilon k^2t^2 + c_7\varepsilon^{-1})\,|w(t)|^2\,dt\,.$$

Par conséquent

$$X_k + Y_k \geqq \int_0^s [k - c_6(2\varepsilon k^2t^2 + c_7\varepsilon^{-1})]|w(t)|^2\,dt + {}$$
$$+ (1 - 2c_6\varepsilon)\int_0^s |\big(A(t)-kt\big)w(t)|^2\,dt\,.$$

Choisissant $\varepsilon = 2c_7k^{-1}$, il en résulte

$$X_k + Y_k \geqq k\int_0^s (\tfrac{1}{2} - c_8t^2)|w(t)|^2\,dt + (1 - c_8k^{-1})\int_0^s |\big(A(t)-kt\big)w(t)|^2\,dt\,.$$

On choisit s_0 de façon que $\frac{1}{2} - c_8t^2 \geqq \frac{1}{4}$ par exemple, pour $t \leqq s_0$, et alors, pour $s \leqq s_0$, on a

$$X_k + Y_k \geqq \tfrac{1}{4}k \int_0^s |w(t)|^2\, dt + (1 - c_8 k^{-1}) \int_0^s \left|\big(A(t) - kt\big)w(t)\right|^2 dt\,,$$

et le lemme suit.

Démonstration du théorème 1.1. Soit $q(t)$ une fonction une fois continûment différentiable dans $[0,T]$, égale à 1 dans $[T-\frac{1}{2}s_0, T]$, nulle pour $t \leqq T - s_0$, s_0 choisi comme au lemme 2.3. (On suppose en outre que s_0 est assez petit pour que $T - s_0 > 0$.) Posons

$$\Phi(t) = q(t)u(t)\,.$$

Evidemment, $\Phi \in L^2(T-s_0, T;\, V)$, et d'après le lemme 2.2, Φ' vérifie la même condition. Comme $\Phi(t) \in D[A(t)]$ p. p. et $A(t)\Phi(t)$ est dans $L^2(T-s_0, T;\, H)$, et comme $\Phi(T-s_0) = \Phi(T) = 0$, on peut appliquer le lemme 2.3 et par conséquent

$$\int_{T-s_0}^{T} \exp\big(k(t-(T-s_0)^2)\big)\, |A(t)\Phi + \Phi'|^2\, dt$$
$$\geqq c_4 k \int_{T-s_0}^{T} \exp\Big(k\big(t-(T-s_0)\big)^2\Big)\, |\Phi(t)|^2\, dt\,.$$

Comme $A(t)\Phi(t) + \Phi'(t) = q'(t)u(t)$, on en déduit

$$\int_{T-s_0}^{T-\frac{1}{2}s_0} \exp\Big(k\big(t-(T-s_0)\big)^2\Big)\, q'(t)^2\, |u(t)|^2\, dt$$
$$\geqq c_4 k \int_{T-s_0}^{T} \exp\Big(k\big(t-(T-s_0)\big)^2\Big)\, q(t)^2\, |u(t)|^2\, dt$$
$$\geqq c_4 k \exp(k\tfrac{1}{4}s_0^2) \int_{T-\frac{1}{2}s_0}^{T} |u(t)|^2\, dt\,.$$

Or le premier membre de cette inégalité est $\leqq c_9 \exp(k\frac{1}{4}s_0^2)$, d'où

$$c_9 \geqq c_4 k \int_{T-\frac{1}{2}s_0}^{T} |u(t)|^2\, dt\,,$$

et ceci quel que soit k, les constantes étant indépendantes de k. Il en résulte que $u(t) = 0$ dans $[T-\frac{1}{2}s_0, T]$. Comme dans le lemme 2.3, s_0 est indépendant de ξ, on peut recommencer le raisonnement et de proche en proche on obtient le résultat voulu: $u(t) = 0$ dans $[0,T]$, ce qui achève la démonstration du théorème 1.1.

3. Compléments et problèmes.

3.1. Toutes les autres conditions étant inchangées, on peut remplacer (1.3) par

$$A(t)u(t)+B(t)u'(t) = 0 , \tag{3.1}$$

où les $B(t)$ sont des opérateurs linéaires continus de H dans lui même. Supposons que les $B(t)$ soient hermitiens, pour chaque $t \in [0,T]$, avec

$$\big(B(t)f,f\big) \geqq \beta|f|^2, \qquad \beta > 0, \quad f \in H ,$$

et la fonction $t \to B(t)f$ étant une fois continûment différentiable de $[0,T]$ dans H. Alors, l'hypothèse (I) ayant lieu, toute fonction u vérifiant (1.1), (1.2), (3.1) et (1.4), est identiquement nulle dans $(0,T)$.

Le principe de la démonstration est le même. On démontrera cette fois l'inégalité

$$\int_\xi^{\xi+s} \exp\big(k(t-\xi)^2\big)|B^{-\frac12}(t)\big(A(t)f(t)+B(t)f'(t)\big)|^2\,dt \geqq ck\int_\xi^{\nu+s} \exp\big(k(t-\xi)^2\big)\,|B^{\frac12}(t)f(t)|^2\,dt .$$

3.2. Voici une autre condition suffisante pour l'unicité rétrograde (pour l'intervention de ce genre de conditions dans les problèmes mixtes, cf. [7] et [5, chap. VII]).

On se donne deux familles d'opérateurs $A_1(t)$ et $A_2(t)$ dans H, avec les conditions suivantes:

(i) pour chaque $t \in [0,T]$, $A_1(t)$ est auto adjoint >0 et son inverse est borné.

(ii) pour tout $f, g \in H$, la fonction $t \to (A_1{}^{-1}(t)f,g)$ est une fois continûment différentiable dans $[0,T]$;

(iii) il existe une constante c_1 indépendante de t telle que, pour tout $u \in D[A_1(t)]$ (domaine de $A_1(t)$), et pour tout $\varepsilon>0$, on ait

$$\left|\Big(\big(dA_1{}^{-1}(t)/dt\big)A_1(t)u,\ A_1(t)u\Big)\right| \leqq \varepsilon|A_1(t)u|^2+c_1\varepsilon^{-1}|u|^2;$$

(iv) pour chaque $t \in [0,T]$ on donne un opérateur $A_2(t)$, borné ou non, avec $D[A_2(t)] \supset D[A_1(t)]$, et tel qu'il existe une constante c_2 telle que pour tout $u \in D[A_1(t)]$ et pour tout $\varepsilon>0$,

$$|A_2(t)u|^2 \leqq \varepsilon|A_1(t)u|^2 + c_2\varepsilon^{-1}|u|^2;$$

(v) pour tout $u \in L^2(0,T; D[A_1(t)])$ (cela signifie: $u \in L^2(0,T;H)$, $u(t) \in D[A_1(t)]$ p. p. et $A_1(t)u$ est dans $L^2(0,T;H)$) la fonction

$t \to A_2(t)u(t)$ est mesurable à valeurs dans H. (Cette hypothèse correspond à une remarque de M. M. Foiaş et Gussi, faite à propos de [7].)

Ces conditions étant réalisées, si une fonction u vérifie les conditions suivantes:

$$u \in L^2(0,T; D[A_1(t)]) , \tag{3.2}$$

$$u' \in L^2(0,T; H), \quad \text{et} \quad (A_1(t)u)' \in L^2(0,T; H) , \tag{3.3}$$

$$(A_1(t)+A_2(t))u(t) + u'(t) = 0 \text{ p. p. dans } (0,T), \tag{3.4}$$

$$u(T) = 0 , \tag{3.5}$$

alors $u(t)=0$ dans $(0,T)$.

Signalons maintenant quelques problèmes du type « unicité rétrograde » qui ne sont pas résolus, à notre connaissance.

3.3. Le théorème 1.1 est-il vrai en supposant seulement les fonctions $a_i(t; u,v)$ continues en $t \in [0,T]$ (ou même seulement mesurables et bornées par $M_i\|u\|\|v\|$)? On peut remplacer l'hypothèse (I), (i) par la condition que la dérivée (distribution) en t de $a_j(t; u,v)$ soit mesurable et bornée par $N_j\|u\|\|v\|$, mais sans hypothèse de ce genre le lemme 2.2 ne semble pas vrai. (Le théorème 1.1 est vrai avec les $a_i(t; u,v)$ mesurables et bornées en remplaçant la deuxième condition (1.1) par la condition plus forte: « $u' \in L^2(0,T; V)$ »).

3.4. Les hypothèses (ii) et (iii) de (I) signifient que, en un sens très fort, la partie principale de $A(t)$ est auto-adjointe. (En pratique, si $A_1(t)$ est d'ordre $2m$, $A_2(t)$ devra être d'ordre $\leqq m$.) Peut on affaiblir cette condition? En particulier le théorème 1.1 est il encore vrai si l'on suppose que $a(t; u,v)$ est suffisamment régulière en t, mais vérifie seulement la condition suivante: il existe λ tel que

$$\operatorname{Re} a(t; v,v)+\lambda|v|^2 \geqq \alpha\|v\|^2, \qquad \alpha > 0 ,$$

pour tout $v \in V$?

3.5. On peut introduire de nombreuses classes de solutions *plus faibles* de l'équation (1.3), et vérifiant (1.4) (cf. [5]). Quand pourra-t-on encore conclure que $u=0$? Par exemple, supposons $a(t; u,v)$ donnée pour tout $t \geqq 0$, vérifiant l'hypothèse (I) sur $(0, +\infty)$. Soit u une fonction telle que

$$u \in L^2(0,\infty; V), \ u \text{ étant nulle pour } t > T, \tag{3.6}$$

$$a(t; u(t),v) + D_t(u(t),v) = 0 \text{ sur }]0,\infty[, \quad \forall v \in V, \tag{3.7}$$

la dérivée $D_t(u(t), v)$ étant prise au sens des distributions sur $]0, +\infty[$. Quand peut on conclure que $u = 0$?

3.6. Supposons maintenant que $A(t)$ soit un opérateur (ou un système) différentiel sur un ouvert Ω de R^n (ou une variété). On se donne $u(t)$ vérifiant, par exemple (1.1), (1.2), (1.3), et $u(T)$ est supposé nul sur un ouvert Ω_0 contenu (strictement) dans Ω. Quand peut-on encore conclure que $u(t) = 0$? Voir des exemples de réponse affirmative (avec $A(t)$ indépendant de t) dans [4] et [13].

BIBLIOGRAPHIE

1. A. P. Caldéron, *Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations*, Amer. J. Math. 80 (1958), 16–36.
2. L. Hörmander, *On the uniqueness of the Cauchy problem* (I), Math. Scand 6 (1958), 213–225.
3. L. Hörmander, *On the uniqueness of the Cauchy problem* II, Math. Scand. 7 (1959), 177–190.
4. S. Ito and H. Yamabe, *A unique continuation theorem for solutions of a parabolic differential equation*, J. Math. Soc. Japan 10 (1958), 314–321.
5. J. L. Lions, *Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites* (Grundlehren d. math. Wiss. 111), à paraitre.
6. J. L. Lions, *Espaces intermédiaires entre espaces hilbertiens et applications*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R. P. R. 2 (1958), 419–432.
7. J. L. Lions, *Equations différentielles du premier ordre dans un espace de Hilbert*, C. R. Acad. Sci. Paris 248 (1959), 1100–1102.
8. B. Malgrange, *Unicité du problème de Cauchy d'après A. P. Caldéron*, Séminaire Bourbaki, Février 1959.
9. B. Malgrange, *La méthode de Caldéron*, Exposés N° 8–9–10, Séminaire Schwartz, Paris, 1959–1960.
10. S. Mizohata, *Le problème de Cauchy pour le passé pour quelques équations paraboliques*, Proc. Japan Acad. 34 (1958), 693–696.
11. L. Schwartz, *Théorie des distributions à valeurs vectorielles*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, (I), 7 (1957), 1–141; (II), 8 (1958), 1–209.
12. F. Trèves, *Relations de domination entre opérateurs différentiels*, Acta Math. 101 (1959), 1–139.
13. K. Yosida, *An abstract analyticity in time for solutions of a diffusion equation*, Proc. Japan Acad. 35 (1959), 109–113.

UNIVERSITÉ DE NANCY, FRANCE
UNIVERSITÉ DE PARIS, FRANCE