MATH. SCAND. 9 (1961), 5–21

OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS PARTIELLEMENT HYPOELLIPTIQUES ET PARTIELLEMENT ELLIPTIQUES

L. GÅRDING et B. MALGRANGE

Introduction.

Suivant une terminologie récente, on dit qu'un opérateur différentiel à coefficients constants P est elliptique si toutes les solutions f de $Pf=0$ sont analytiques et que P est hypoelliptique si toutes les solutions sont indéfiniment différentiables. Pour que P soit elliptique il faut et il suffit que la partie principale du polynôme caractéristique de P n'ait pas de zéro réel en dehors de l'origine (Petrovsky [1]). Une caractérisation analogues des opérateurs hypoelliptiques a été obtenu par Hörmander [2] et ses conditions ont été généralisées pour les systèmes et les équations linéaires et non linéaires par divers auteurs ([3], [4], [5]). La régularité des solutions des systèmes elliptiques non-linéaires a été traitée par Petrovsky [1] et Friedman [6].

Dans un certain nombre de questions il apparaît utile d'examiner à quelle condition les distributions f, solutions de $Pf=0$, sont régulières en certaines variables x, si l'on les considère, dans le cas général, comme des distributions dans les autres. On sait, par exemple, que toute solution de l'équation de la chaleur est indéfiniment différentiable, et analytique par rapport aux variables d'espace. Nous dirons que P est hypoelliptique (elliptique) en x si les solutions sont indéfiniment différentiables (analytiques) en x, et nous caractériserons ces opérateurs par des propriétés de leurs polynômes caractéristiques (théorème 3.1 (annoncé dans la note [7]) et 4.2.). Nous considérons aussi une classe intermédiaire (théorème 5.1) et nous donnerons des indications sur les équations avec second membre.

Certains cas particuliers simples de nos résultats ont un interêt général. Par exemple, si la puissance la plus élevée d'une dérivée $\partial/\partial y$ entre dans P avec un exposant positif et un coefficient constant, alors toute solution f de $Pf=0$ est indéfiniment différentiable en y. En particulier, f possède des restrictions aux hyperplans $y=$constante qui sont des

Reçu le 8 janvier, 1960.

distributions; les donnés de Cauchy de f pour ces hyperplans ont un sens. Un autre cas particulier est que toute solution de l'équation des ondes possède des restrictions aux droites de temps qui sont des distributions. En particulier, si l'on régularise une telle solution moyennant une convolution par rapport au temps, on obtient une fonction indéfiniment différentiable.

Il serait intéressant de généraliser nos résultats aux opérateurs à coefficients variables et aux systèmes.

1. Opérateurs hypoelliptiques.

Soient $x=(x_1,\ldots,x_m)$ et $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_m)$ les points courants de R^m et de C^m respectivement et posons

$$x\xi = \sum x_j\xi_j, \qquad |x|^2 = \sum x_j^2, \qquad |\xi|^2 = \sum |\xi_j|^2 ,$$
$$\xi = \xi' + i\xi'' ,$$

où ξ' et ξ'' sont réels. Pour les monômes on utilisera la notation

$$x_\alpha = x_{\alpha_1}\ldots x_{\alpha_l}, \qquad \alpha_1,\ldots,\alpha_l = 1,\ldots,m ,$$

et de même dans des autres situations, par exemple

$$(\partial/\partial x)_\alpha = (\partial/\partial x_{\alpha_1})\ldots .$$

L'ordre de x_α sera notée $|\alpha|$. Un opérateur différentiel à coefficients constants s'écrit sous la forme

$$P(D), \qquad D = i^{-1}\partial/\partial x ,$$

où $P(\xi)$ est le polynome caractéristique corréspondant. Posons, pour abréger,

$$P^{(\alpha)}(\xi) = (\partial/\partial\xi)_\alpha P(\xi) .$$

Avec ces notations la formule de Leibniz prend la forme

$$P(D)(fg) = \sum P^{(\alpha)} f D_\alpha g/|\alpha| !$$

où f et g sont des fonctions de x. Pour abréger nous dirons qu'une fonction est régulière si elle est indéfiniment différentiable.

On dit que l'opérateur P, ou bien son polynôme caractéristique, est hypoelliptique si chaque distribution f, définie dans un ouvert de R^m et y vérifiant $Pf=0$, est une fonction régulière. Rappelons le théorème suivant dû à Hörmander [2].

THÉORÈME 1. *Pour que P soit hypoelliptique il faut et il suffit que les conditions équivalentes suivantes soient satisfaites:*

(1) $$P(\xi) = 0,\ \xi'' \textit{ borné} \Rightarrow \xi' \textit{ borné},$$

(2) $$|\alpha| > 0 \Rightarrow P^{(\alpha)}(\xi')/P(\xi') \to 0 \textit{ pour } \xi' \to \infty .$$

En utilisant un théorème d'élimination réelle, dû à Seidenberg [8], on voit (raisonner comme dans [2]), que ces conditions sont équivalentes aux suivantes:

(1 bis) Il existe deux constantes c et $M > 0$ telles que

$$P(\xi) = 0 \Rightarrow |\xi'| \leqq c(1+|\xi''|)^M .$$

(2 bis) Il existe une constante $\tau > 0$ telle que

$$P^{(\alpha)}(\xi')(1+|\xi'|)^{2\tau}/P(\xi')$$

soit borné pour $\xi' \to \infty$ quel que soit α avec $|\alpha| > 0$.

Les conditions (2) et (2 bis) suggèrent la définition suivante, déjà considérée dans [2].

Définition. L'opérateur P étant hypoelliptique on dit qu'un opérateur Q est strictement moins fort que P (on écrit $Q \ll P$), si $Q(\xi')/P(\xi')$ tend vers zéro pour $\xi' \to \infty$.

Il est évident que le degré d'un tel Q est plus petit que le degré de P et, par suite, l'ensemble des Q est un espace vectoriel de dimension finie. La formule de Taylor,

$$P(\xi+\eta) = \sum \eta_\alpha P^{(\alpha)}(\xi)/|\alpha|!$$

et (2) montre que

$$\xi' \to \infty \Rightarrow P(\xi'+\eta)/P(\xi') \to 1$$

uniformément pour η borné. Donc, si $Q \ll P$, les translatés de Q, et par conséquent les $Q^{(\alpha)}$, ont la même propriété. En utilisant encore le théorème de Seidenberg en obtient ceci: Il existe un $\sigma > 0$ tel que, pour tout $Q \ll P$, la quantité

$$Q(\xi')(1+|\xi'|^2)^\sigma/P(\xi')$$

soit bornée pour $\xi' \to \infty$.

2. Distributions régulières par rapport à certaines variables.

Nous utiliserons dans la suite les notations de Schwartz [9]. En particulier soit $\mathscr{E} = \mathscr{E}(\Omega)$ l'espace des fonctions complexes régulières définies dans un ouvert Ω, et $\mathscr{D} = \mathscr{D}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $\in \mathscr{E}$ à support compact, les topologies étant celles de Schwartz. L'espace des distributions est le dual $\mathscr{D}'$ de $\mathscr{D}$, le dual $\mathscr{E}'$ de $\mathscr{E}$ est identique à l'ensemble des distributions à support compact. Outre les espaces R^m et C^m de point courant x et $\xi = \xi' + i\xi''$, nous avons à considérer deux autres espaces R^n et C^n de point courant y et $\eta = \eta' + i\eta''$.

Définition. Soit Ω un ouvert dans $R^m \times R^n$ et $f(x,y) \in \mathscr{D}'(\Omega)$ une distribution. Nous dirons que f est régulière en x si, pour tout couple d'ouverts $V \subset R^m$, $W \subset R^n$, $V \times W \subset \Omega$, et tout $\varphi \in \mathscr{D}(W)$, la distribution en x

$$g(x) = \int f(x,y)\, \varphi(y)\, dy$$

est une fonction régulière de x.

Cette notion a été introduite par Schwartz [11] sous le nom de « distribution semirégulière en x ».

Pour Ω de la forme $V \times W$, elle est un cas particulier de la notion de fonction régulière à valeur dans un espace vectoriel étudiée par Schwartz [10]. Il est immédiat que la propriété précédente est de caractère local: pour que f soit régulière en x dans Ω il faut et il suffit que f le soit dans tout $V \times W \subset \Omega$.

Introduisons maintenant une classe d'espace dont nous aurons besoin en relation avec les distributions régulières en x; s et t désignant deux nombres réels, pour $\varphi \in \mathscr{E}'_{x,y}$ nous poserons

$$|\varphi|^2_{s,t} = \int |\hat{\varphi}(\xi',\eta')|^2 (1+|\xi'|^2)^s (1+|\eta'|^2)^t \, d\xi' \, d\eta' ,$$

où $\hat{\varphi}$ est la transformée de Fourier de φ.

Définition. Nous dirons qu'une distribution $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ est d'ordre s,t si, pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, on a

$$|\varphi f|_{s,t} < \infty . \tag{1}$$

Soit (s,t) l'espace correspondant.

Si f est à support compact, alors

$$|f|_{s,t} < \infty$$

est une condition équivalente à (1) (voir [4]).

Donnons enfin une caractérisation des distributions régulières en x à partir des espaces (s,t).

Proposition 1. *Pour que $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ soit régulière en x il faut et il suffit que, quel que soit le nombre réel s et l'ouvert relativement compact O de Ω, il existe un $t = t(s,O)$ tel que f soit d'ordre s, t dans O.*

Il est clair que la condition est suffisante; montrons sa nécessité. En multipliant f par une fonction $\in \mathscr{D}(\Omega)$ on voit qu'il suffit de faire la démonstration quand f est à support compact S et régulière en x dans tout l'espace. Dans ce cas,

$$g \to h = \int f(x,y)\, g(y)\, dy$$

est une application linéaire fermée de $\mathscr{E}(R^n)$ dans $\mathscr{E}(R^m)$. Soit $|\varphi|_{A,\tau}$ la borne supérieure des dérivées de φ d'ordre $\leqq \tau$ dans le domaine A et soient V et W des ouverts bornés tels que $V \times W \supset S$. Par le théorème du graphe fermé on voit qu'à tout τ il correspond un σ et une constante c telle que

$$|h|_{V,\tau} \leqq c\,|g|_{W,\sigma} \qquad \text{pour tout } g\,.$$

En particulier, en posant $g = \exp i\eta y$ on voit que la transformée de Fourier de f admet la majorante

$$c\,(1+|\xi|)^{-\tau}(1+|\eta|)^{+\sigma} \tag{1}$$

pour ξ et η réels, où c est une nouvelle constante. Donc, quel que soit s, on peut trouver un t tel que $|f|_{s,t} < \infty$.

PROPOSITION 2. *Soit $f(x,y)$ régulière en x dans Ω, soit $V \times W \subset \Omega$ et $\varphi \in \mathscr{D}(W)$. Alors la fonction*

$$\int f(x, y+y')\, \varphi(y')\, dy' \tag{2}$$

est régulière en x,y pour $x \in V$ et y voisin de l'origine.

On peut se borner au cas où f est à support compact et régulière en x dans tout l'espace. Dans ce cas on trouve sans peine, en utilisant (1), que la transformée de Fourier de (2) décroit plus vite que toutes les puissances négatives de $|\xi| + |\eta|$, ce qui prouve la proposition.

3. Opérateurs partiellement hypoelliptiques.

Soit $P = P(D_x, D_y)$ un opérateur différentiel en x et y.

DÉFINITION. P est hypoelliptique en x si chaque distribution f, définie dans un ouvert et solution de $Pf = 0$, est régulière en x.

On a la génération suivante du théorème 1.1.

THÉORÈME 1. Pour que P soit hypoelliptique en x il faut et il suffit que les conditions équivalentes suivantes soient satisfaites

$$P(\xi,\eta) = 0, \ \xi'' \text{ et } \eta \text{ bornés} \Rightarrow \xi' \text{ borné}\,, \tag{1}$$

$$P(\xi,\eta) = P_0(\xi) + \sum P_j(\xi) Q_j(\eta), \quad j > 0\,, \tag{2}$$

où P_0 est hypoelliptique et $P_j \ll P_0$.

REMARQUE. Comme au numéro 1, on montre que la condition (1) est équivalente à la suivante

(1 bis) Il existe $M>0$ et $C>0$ tels que

$$P(\xi,\eta) = 0 \Rightarrow |\xi'| \leqq c(1+|\xi''|+|\eta|)^M .$$

Nous démontrerons d'abord l'équivalence de (1) et (2), ensuite la nécessité de (1) et la suffisance de (2).

a) (1) $\Rightarrow$ (2). Développons $P(\xi,\eta)$ suivant les puissances de η:

$$P = P_0(\xi)+\sum \eta_\alpha P_\alpha(\xi), \qquad |\alpha| > 0 .$$

Tout d'abord, en posant $\eta=0$ dans (1) on voit d'après le théorème 1.1 que P_0 est hypoelliptique. De plus, lorsque $\xi''=0$, on déduit de (1) que $P(\xi,\eta)=0$, $\xi' \to \infty \Rightarrow \eta \to \infty$. Ceci entraîne évidemment que tous les polynômes en η, limites de $P(\xi',\eta)/|P_0(\xi')|$ pour $\xi' \to \infty$, sont des constantes de valeurs absolue 1. Donc, on a (2).

b) (2) $\Rightarrow$ (1). D'après les résultats rappelés au § 1, on sait que

$$\xi' \to \infty \Rightarrow P_j(\xi)/P_0(\xi) \to 0$$

uniformément pour ξ'' borné. Donc, $P(\xi,\eta)=P_0(\xi)+\sum P_j(\xi)Q_j(\eta)\neq 0$ pour $\xi' \to \infty$, si ξ'' et η sont bornés.

c) Nécessité de (1). Soit $\Omega = V\times W$ et soit H l'espace des solutions de $Pf=0$ définies et continues dans Ω muni de la topologie habituelle. Soit $\varphi \in \mathscr{D}(W)$ fixé; par hypothèse, l'application

$$f \to g = \int f(x,y)\, \varphi(y)\, dy$$

envoie H dans $\mathscr{E}(V)$ et d'après le théorème du graphe fermé, cette application est continue. En particulier, pour tout compact $K\subset V$ il existe un compact $L\subset\Omega$ et une constante $c(\varphi)$ tels qu'on ait

$$\max_K |\partial g/\partial x_i| \leqq c(\varphi) \max_L |f(x,y)| .$$

Appliquons cette inégalité à une solution exponentielle

$$f(x,y) = \exp(i\xi x+i\eta y), \qquad P(\xi,\eta) = 0 .$$

Si $\hat{\varphi}$ est la transformée du Fourier de φ, on aura

$$\text{(3)} \qquad \left(\max_K e^{-x\xi''}\right)|\hat{\varphi}(\eta)| \sum |\xi_i| \leqq c(\varphi) \max_L e^{-x\xi''-y\eta''} .$$

Soit maintenant B un compact de C^n. Par une homothétie contractante convenable de φ on peut rendre $\hat{\varphi}\neq 0$ dans B, et par conséquent, on déduit de (3) la condition (1) cherchée.

d) Suffisance de (2). D'après la remarque finale du paragraphe 1, on peut trouver un $\sigma>0$ tel que

$$|R(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^\sigma\,|P_0(\xi)|^{-2}, \qquad \xi = \xi' \in R^n\,, \tag{4}$$

soit borné pour tout $R \ll P_0$. Démontrons d'abord un lemme.

LEMME 1. *Si f est une distribution dans un ouvert $\Omega \in R^m \times R^n$, alors*

$$f \in (\text{fini}, t), \qquad P_0 f \in (s,t)\,,$$

entraîne

$$Rf \in (s+\sigma, t)$$

pour tout $R \ll P_0$.

Si f est à support compact, on peut calculer $|Rf|_{s+\sigma,t}$ par la formule de Parseval et le lemme est une conséquence immédiate de (4). Passons au cas général. Il suffit de démontrer que

$$P_0 f \in (s,t), \quad Rf \in (s',t), \qquad \forall R \ll P_0\,,$$

entraîne

$$Rf \in (s''+\sigma, t), \qquad s'' = \min(s', s)\,.$$

(En effet, on en déduit le lemme par itération.) Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. D'après la formule de Leibniz on a

$$P_0(\varphi f) = \varphi P_0 f + \sum D_\alpha \varphi P_0^{(\alpha)} f/|\alpha|!, \qquad |\alpha| > 0\,.$$

Par hypothèse, le premier terme à droite est dans (s,t) et les autres dans (s',t), de sorte que $P_0(\varphi f) \in (s'',t)$ et, par conséquent, $R(\varphi f) \in (s''+\sigma,t)$. Soit, finalement, $\psi \in D(\Omega)$ donné et choisissons $\varphi = 1$ dans le support de ψ. Alors

$$\psi Rf = \psi R(\varphi f) \in (s''+\sigma, t)$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

Soit maintenant f une distribution vérifiant $P(D_x, D_y)f = 0$. Nous allons montrer que f est régulière en x. Cette propriété étant locale, on peut (prop. 1) supposer qu'il existe deux nombres s et t tels que, pour tout $R \ll P_0$, on ait: $Rf \in (s,t)$. On a

$$-P_0 f = \sum P_j(D_x) Q_j(D_y) f$$

où, d'après l'hypothèse, le second membre est d'ordre $(s, t-q)$, q désignant l'ordre maximum des Q_j. D'après le lemme 1, on a donc

$$Rf \in (s+\sigma, t-q), \qquad \forall R \ll P_0\,.$$

En itérant on obtient

$$Rf \in (s + l\sigma,\, t - lq)$$

pout tout entier $l \geqq 0$. En particulier, f a la même propriété. Donc, d'après la proposition 2.1, f est régulière en x.

REMARQUES.

1. Outre les hypothèses du théorème précedent, supposons que f soit régulière en y, à valeurs dans un espace de distributions *d'ordre borné* en x (i.e. il existe un s tel que $f \in (s,t)$ pour tout t. De telles distributions sont appelées « intégralement semirégulières en y » dans [11]). Alors le raisonnement précédent montre que f est régulière en x, y.

2. Equations avec second membre. Supposons que f vérifie l'équation $P(D_x, D_y)f = g$, g étant régulière en x et P vérifiant les hypothèses précédentes. Alors f est régulière en x (raisonner comme en d) en appliquant à g la proposition 2.1).

EXEMPLES.

1. $m=1$ (cf. Introduction). L'hypothèse signifie que les hyperplans $x=$ constante sont « réguliers », i.e. que le coefficient les plus élevé en ξ de P est indépendant de η. Le théorème permet de définir les restrictions de f et de ses dérivées à ces hyperplans. En particulier, f y possède des données de Cauchy qui sont des distributions en y.

2. P est l'opérateur des ondes, $P(\xi,\eta) = \xi_1^2 + \ldots + \xi_m^2 - \eta_1^2$. Le théorème montre que chaque solution de $Pf=0$ possède des restrictions aux droites de temps $x=$ constante que sont des distributions en $y=y_1$.

4. Opérateurs partiellement elliptiques.

On dit qu'un opérateur differentiel $P(D_x)$ est elliptique si toute distribution f, solution de $Pf=0$ est analytique. On a le théorème classique suivant, dû essentiellement à Petrovsky [1].

THÉORÈME 1. *Pour que P soit elliptique il faut et il suffit que $Q(\xi) \neq 0$ pour tout ξ réel $\neq 0$, Q étant la partie principale de P (i.e. la somme de termes de P d'ordre le plus élevé).*

REMARQUE. On dit qu'un hyperplan $x\xi =$ constante est caractéristique pour P si $Q(\xi) \neq 0$. Donc, pour que P soit elliptique il faut et il suffit que P n'ait pas d'hyperplan caractéristique réel.

Nous allons démontrer un théorème analogue pour les opérateurs partiellement elliptiques. Les deux définitions suivantes sont naturelles.

DÉFINITION. On dit qu'une distribution $f(x,y)$, définie dans un ouvert $\Omega \subset R^m \times R^n$ est analytique en x, si, quel soit $V \times W \subset \Omega$ et $\varphi \in \mathscr{D}(W)$, la distribution

$$g(x) = \int f(x,y)\varphi(y)dy, \quad x \in V,$$

est une fonction analytique.

DÉFINITION. On dit qu'un opérateur différentiel $P=P(D_x,D_y)$ est elliptique en x si toute distribution f, solution de $Pf=0$ dans un ouvert, y est analytique en x.

On a la généralisation suivante du théorème 1 où $A\sim B$ signifie que A/B et B/A sont bornés et

$$P^{(\alpha)}(\xi,\eta) = \left(\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\eta}\right)_\alpha P(\xi,\eta)$$

sont les dérivées du polynôme caractéristique par rapport à ξ,η.

THÉORÈME 2. *Pour que l'opérateur P soit elliptique en x il faut et il suffit que les conditions équivalentes suivantes soient satisfaites,*

$$P(\xi,\eta) = 0 \Rightarrow |\xi'| \leqq c(1+|\xi''|+|\eta''|)\,, \tag{1}$$

$$\sum |P^{(\alpha)}(\xi,\eta)|^2(1+|\xi|^{2|\alpha|}) \sim \sum |P^{(\alpha)}(\xi,\eta)|^2\,, \tag{2}$$

pour ξ et η réels.

REMARQUE. Si $n=0$, on vérifie facilement que (1) équivaut à la condition que la partie principale de P ne s'annule jamais pour un argument réel différent de zéro. Dans ce cas, les conditions (1) et (2) ont été considérées par Hörmander [12]. Notons que (1) entraîne la condition (3.1).

EXEMPLE. $P(\xi,\eta)=a\eta_1+b+\xi_1{}^2+\ldots+\xi_m{}^2$, $n=1$. On trouve que P est elliptique en x si et seulement si $\mathrm{Re}\,a=0$.

Démontrons d'abord l'équivalence de (1) et (2).

(2) $\Rightarrow$ (1). Soit c une constante convenable (pas toujours la même). Ecrivons (2) sous la forme

$$\sum (|\xi'|^{2|\alpha|}-c)|P^{(\alpha)}(\xi',\eta')|^2 \leqq c|P(\xi',\eta')|^2, \qquad |\alpha| > 0\,.$$

Alors, il est évident que

$$|\xi'| \geqq c,\ |\alpha| > 0 \Rightarrow |\xi'|^{|\alpha|}|P^{(\alpha)}(\xi',\eta')| \leqq c|P(\xi',\eta')|\,.$$

En particulier,

$$|\xi'| \geqq c \Rightarrow |P(\xi',\eta')| > 0\,.$$

Pour $\delta>0$ et

$$|\xi'| \geqq c + \delta^{-1}(|\xi''|+|\eta''|) \tag{3}$$

on a donc

$$|(\xi'',\eta'')_\alpha P^{(\alpha)}(\xi',\eta')| \leqq c\delta^{|\alpha|}|\xi'|^{|\alpha|}|P^{(\alpha)}(\xi',\eta')| \leqq c\delta^{|\alpha|}|P(\xi',\eta')|$$

de sorte que, sous la même condition,

$$|P(\xi'+i\xi'',\ \eta'+i\eta'')| \geqq (1-c\delta)|P(\xi',\eta')| \neq 0$$

si δ est suffisamment petit; d'où le résultat.

(1) $\Rightarrow$ (2). Supposons d'abord que $m=n=1$, $\xi=\tau$, $\eta=\sigma$ de sorte que (1) prend la forme

$$(4) \qquad P(\tau,\sigma) = 0 \Rightarrow |\tau'| \leqq c(1+|\tau''|+|\sigma''|) .$$

Ceci entraîne que P est hypoelliptique en x et on voit que le degré de P en τ est le même que le degré total ν. Donc

$$P(\tau,\sigma) = c_0\tau^\nu + a_1(\sigma)\tau^{\nu-1} + \ldots + a_\nu(\sigma), \quad c_0 \neq 0 ,$$

où les a_j sont des polynômes en σ. Posons

$$P(\tau,\sigma) = c_0 \prod \left(\tau - b_k(\sigma)\right) .$$

La formule (4) montre que, pour σ réel, les b_k sont en dehors de la région

$$|\tau''| \leqq c^{-1}|\tau'| - 1$$

qui consiste en deux domaines angulaires de sommets $\pm c$, symétriques par rapport à l'axe réel. La distance d'un point réel τ au bord de cette région est minorée par $(|\tau|-c)(1+c^2)^{-\frac{1}{2}}$. Donc, pour τ et σ réels et $|\tau|$ assez grand,

$$\begin{aligned} |\tau^j\partial^j P(\tau,\sigma)| &\leqq |\tau|^j |P(\tau,\sigma)| \sum |(\tau-b_1)\ldots(\tau-b_j)|^{-1} \\ &\leqq c'|P(\tau,\sigma)| \qquad (\partial = \partial/\partial\tau) . \end{aligned}$$

Par conséquent

$$(5) \qquad \sum_j |\partial^j P(\tau,\sigma)|^2(1+|\tau|^{2j}) \leqq c_1\tilde{P}(\tau,\sigma)^2$$

où

$$\tilde{P}(\tau,\sigma)^2 = \sum |\partial_\tau{}^j\partial_\sigma{}^k P(\tau,\sigma)|^2$$

et c_1 est une fonction de c, bornée pour c borné. Maintenant, soit ε réel, $|\varepsilon| \leqq 1$. En remplacant $P(\tau,\sigma)$ par $P_\varepsilon = P(\tau,\sigma+\varepsilon\tau)$, on trouve que P_ε satisfait à (4) si l'on change c en $c+1$. Donc,

$$(6) \qquad \sum |(\partial_\tau - \varepsilon\partial_\sigma)^j P(\tau,\sigma)|^2(1+|\tau|^{2j}) \sim c_1\tilde{P}_\varepsilon(\tau,\, \sigma-\varepsilon\tau)^2 .$$

Il est clair que les cotés droits de (5) et (6) sont uniformément équivalents pour $|\varepsilon| \leqq 1$. En faisant varier ε, on trouve donc la relation cherchée

$$\sum |\partial_\tau{}^j\partial_\sigma{}^k P(\tau,\sigma)|^2(1+|\tau|^2)^{j+k} \sim \tilde{P}(\tau,\sigma)^2 .$$

Appliquons cela au polynome

$$Q(\tau,\sigma) = P(\tau\xi_0, \sigma\eta_0), \qquad |\xi_0| = |\eta_0| = 1 ,$$

où ξ_0 et η_0 sont réels. L'équivalence étant uniforme en ξ_0 et η_0, on en déduit facilement (2).

Démontrons maintenant que (1) est nécessaire pour que P soit elliptique en x. On va démontrer un énoncé un peu plus fort que celui du théorème. Soient C_x et C_y deux cubes fermés contenant l'origine et soit T l'espace des solutions de $Pf=0$ qui sont régulières dans $C=C_x \times C_y$ et soit Φ l'espace des fonctions régulières dans l'espace des y à supports dans C_y. Avec leurs topologies naturelles, T et Φ sont des espaces de Fréchet. Supposons que pour chaque $f \in T$ et chaque $\varphi \in \Phi$,

$$f(x,\varphi) = \int f(x,y)\, \varphi(y)\, dy$$

soit analytique à l'origine. Alors P satisfait à (1). Dans la démonstration on va suivre un procédé de Hörmander [12]. Posons

$$|D_x{}^p g(x)|^2 = \sum |(D_x)_\alpha g(x)|^2, \qquad |\alpha| = p\,.$$

La fonction $f(x,\varphi)$ étant analytique à l'origine il existe une constante c dépendant de f et de φ telle que

$$|D_x{}^p f(0,\varphi)| \leqq c^{p+1} p!, \qquad \forall p \geqq 0\,.$$

Pour c et φ données, ces inégalités définissent une partie fermée convexe $T_{c,\varphi}$ de T et $T_{c,\varphi} \to T$ pour $c \to \infty$. Donc, d'après le théorème de Baire, une de ces parties est un voisinage de l'origine dans T. Donc, il existe une norme $|f|_\lambda$ dans T et une constante c dépendant de φ telles que

$$|D_x{}^p f(0,\varphi)| \leqq c^{p+1} p!\, |f|_\lambda, \qquad \forall p \geqq 0, \quad \forall f \in T\,. \tag{7}$$

Maintenant on reprend le raisonnement précédent avec un c et une norme $|\cdot|_\lambda$ donnés. On obtient des parties fermées et convexes $\Phi_{c,\lambda}$ de Φ tendant vers Φ et on trouve finalement qu'il existe une constante c, et une norme $|\cdot|_0$ sur T indépendantes de f et de φ, telle que

$$|D_x{}^p f(0,\varphi)| \leqq c^{p+1} p!\, |f|_0 |\varphi|, \qquad \forall p \geqq 0\,,$$

pour tout f et φ, $|\varphi|$ étant une norme de Φ.

Maintenant, nous allons choisir un ensemble convenable de fonctions φ. Soit $a>0$. Alors

$$\lambda_1(\tau) = \tfrac{1}{2} \int_{-a}^{+a} e^{it\tau} dt = \tau^{-1} \sin \tau a$$

et

$$\lambda_2(\tau) = \lambda_1\big(\tau + (2a)^{-1}\pi\big) = \big(\tau + (2a)^{-1}\pi\big)^{-1} \cos \tau a$$

sont des transformés de Fourier de fonctions à supports dans $|t| \leqq a$; et l'inégalité

$$|\lambda_j(\tau)| \geqq |\lambda_j(\operatorname{Re} \tau)|, \qquad j = 1, 2\,,$$

entraîne

$$|\lambda_1(\tau)| + |\lambda_2(\tau)| \geqq cte(1 + |\operatorname{Re} \tau|)^{-1} \tag{8}$$

pour tout τ. Posons dans (7)

$$f = \exp(ix\xi + iy\eta), \qquad P(\xi,\eta) = 0 .$$

Alors

(9) $$|\hat{\varphi}(\eta)|\,|\xi|^p \leqq c^{p+1}p!\,|\varphi|\,[1+|\xi|+|\eta|]^c \exp c[1+|\xi''|+|\eta''|] ,$$

où

$$\hat{\varphi}(\eta) = \int e^{iy\eta}\,\varphi(y)\,dy .$$

Soit Φ_1 le completé de Φ par rapport à $|\varphi|$. Si M est assez grand et a assez petit, alors

$$\hat{\varphi}(\eta) = \prod_1^n \psi_j(\eta_j)^M, \qquad \psi_j = \lambda_1 \text{ ou } \lambda_2 ,$$

est la transformée de Fourier d'un $\varphi \in \Phi_1$. Donc,

$$\prod_1^n (|\lambda_1(\eta_j)|+|\lambda_2(\eta_j)|)^M|\xi|^p$$

est majoré par le membre droit de (9) si l'on y ajoute une majoration de $|\varphi|$, à savoir une constante convenable qu'on peut faire entrer dans c. Finalement, utilisant (8) et changeant encore une fois la constante c, on trouve que

$$|\xi|^p \leqq c^{p+1}p!\,[1+|\xi|+|\eta|]^c \exp c(1+|\xi''|+|\eta''|)$$

pour tout $p \geqq 0$. Si l'on pose

$$p = [\tfrac{1}{2}|\xi|e^{-1}] ,$$

alors

$$|\xi| \leqq c(1+|\xi''|+|\eta''|) + c\log[1+|\xi|+|\eta|]$$

ou bien

(10) $$|\xi'| \leqq c(1+|\xi''|+|\eta''|) + c\log(1+|\eta'|)$$

avec des nouvelles constantes c. Donc, si l'on pose, par exemple,

$$\mu^2(r) = \max |\xi'|^2(1+|\xi''|^2+|\eta''|^2)^{-1}$$

pour $P(\xi,\eta)=0$ et $|\eta'| \leqq r$, on sait que

(11) $$\mu(r) \leqq c + c\log(1+r) .$$

Mais, selon les résultats bien connus de Seidenberg [8], μ est pour r assez grand une fonction algébrique de r de sorte que si μ n'était pas borné, μ tendrait vers l'infini comme une puissance positive de r ce qui est impossible en vertu de (11). Donc μ est borné et on a démontré que (1) est une condition nécessaire pour que P soit elliptique en x.

Montrons enfin que (2) est une condition suffisante d'ellipticité en x. Soit f une solution de $Pf=0$ dans un ouvert Ω de la forme $V \times W$ et considérons la distribution

$$g(x,y) = \int f(x,y+y')\,\varphi(y')\,dy', \qquad \varphi \in \mathscr{D}(W) ,$$

pour $x \in V$ et y voisin de l'origine. Comme P est hypoelliptique en x nous savons déjà que f est régulière en x, et par suite que g est régulière en x et y pour $x \in V$ et y voisin de l'origine (proposition 2.2). En outre, g est une solution de $Pg=0$. Nous avons à démontrer que $g(x,0)$ est analytique en x. Par conséquent, il nous suffit de démontrer que toute solution régulière f de $Pf=0$ est analytique en x.

Pour évaluer les dérivées de f par rapport à x, nous employerons une variante d'une méthode de Gevrey [13].

Pour abréger nous utiliserons la notation

$$|D_x{}^p f, A|^2 = \sum \int_A |(D_x)_\alpha f(x,y)|^2 \, dx dt, \qquad |\alpha| = p, \qquad A \subset R^m \times R^n .$$

Soient K et $L \supset K$ deux boules concentriques de rayon r et $r+\sigma$, $\sigma \leqq 1$. Posons

$$|f,K|_\sigma = \sum |D_x{}^j P^{(\alpha)} f, \, K| \, \sigma^{j-|\alpha|}, \qquad j < |\alpha| > 0 .$$

On a le lemme suivant.

Lemme 1. *Si P satisfait à* (1) *et $Pf=0$, alors*

$$\sigma |D_x f, K|_\sigma \leqq c |f,L|_\sigma$$

où c est une constante qui ne dépend que de P.

Par définition, le membre gauche est une somme de termes

$$|D_x{}^{j+1} P^{(\alpha)} f, \, K| \, \sigma^{j+1-|\alpha|}, \qquad j+1 \leqq |\alpha| > 0 . \tag{12}$$

Pour $j+1 < |\alpha|$ ces termes sont majorés par

$$|f,K|_\sigma \leqq |f,L|_\sigma .$$

Supposons que $j+1 = |\alpha|$ et soit $g \in \mathscr{D}(L)$, $g=1$ sur K. Alors,

$$\begin{aligned} |D_x{}^{|\alpha|} P^{(\alpha)} f, \, K|^2 &\leqq |D_x{}^{|\alpha|} P^{(\alpha)}(fg), \, L|^2 \\ &= (2\pi)^{-n} \int |\xi|^{2|\alpha|} \, |P^{(\alpha)}(\xi,\eta)|^2 \, |H(\xi,\eta)|^2 \, d\xi d\eta \end{aligned}$$

où H est la transformée de Fourier de fg. Notons $c, c_1, c_2, \ldots$ des constantes qui ne dépendent que de P. Il suit de (2) qu'on a

$$|D_x{}^{|\alpha|} P^{(\alpha)} f, \, K| \leqq c_1 \sum |P^{(\beta)}(fg), \, L| . \tag{13}$$

Maintenant, on a, par la formule de Leibniz,

$$P^{(\beta)}(gf) = \sum P^{(\beta+\gamma)} f D_\gamma g / |\gamma|!$$

où, comme $Pf=0$, on peut supposer que $|\beta| + |\gamma| > 0$. On peut choisir g de sorte qu'on ait une majoration uniforme

$$|D_\gamma g(x)| \leqq c_2 \sigma^{-|\gamma|}$$

lorsque $|\gamma| \leqq$ degré de P; et, par conséquent,

$$|P^{(\beta)}(gf), L| \leqq c_3 \sum |P^{(\beta+\gamma)}f, L| \, \sigma^{-|\beta|-|\gamma|}, \qquad |\beta| + |\gamma| > 0 ,$$

de sorte que le coté droit de (13) est majoré par

$$c_4 \sum |P^{(\beta)}f, L| \, \sigma^{-|\beta|} \leqq c_4 |f, L|_\sigma .$$

Donc, on a obtenu la majoration

$$c\,|f, L|_\sigma$$

pour tous les termes (12) qui sont en nombre fini et le lemme est démontré. Soit maintenant

$$K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_p$$

une suite de boules concentriques contenues dans Ω, le rayon de K_j étant $r+j\sigma$. Une itération dans le lemme montre que

$$|D_x{}^p f, K|_\sigma \leqq (c\sigma^{-1})^p \, |f, K_p|_\sigma .$$

Soit x_0, y_0 un point donné de Ω, soit $K \subset L$ deux boules ayant ce point comme centre et soient r et $r+\tau$ les rayons correspondents. Choisissons $K_0 = K$, $K_p = L$ de sorte que $\sigma p = \tau$. Si ν est le degré de P on obtient

$$|D_x{}^p f, K| \leqq |D_x{}^p f, K|_\sigma \leqq c^p p^{p+\nu} [p^{-\nu} |f, L|_\sigma]$$

où c est une nouvelle constante. Si l'on pose

$$\|D^p f, L\|^2 = \sum |D_\alpha f, L|^2, \qquad |\alpha| \leqq p ,$$

on trouve que le crochet est majoré par $\|D^{\nu-1}f, L\|$ multiplié par une constante, et, comme $p^p \leqq e^p p!$, on trouve

$$|D_x{}^p f, K| \leqq c^{p+1} p! \, \|D^{\nu-1} f, L\|, \qquad \forall p \geqq 0 .$$

Posons maintenant

$$|D_x{}^p f(x,y)|^2 = \sum |(D_x)_\alpha f(x,y)|^2, \qquad |\alpha| = p ,$$

et soit M une boule de centre x_0, y_0, intérieure à K. D'après un lemme classique de Soboleff on a, par exemple,

$$\sup_M |D_x{}^p f(x,y)| \leqq c\,|D_x{}^p D^{m+n} f, K|, \qquad \forall j \geqq 0 .$$

Donc, avec une nouvelle constante c,

$$\sup_M |D_x{}^p f(x,y)| \leqq c^{p+1} p! \, \|D^{m+n+\nu-1} f, L\|, \qquad \forall p \geqq 0 .$$

Cette inégalité montre que la série de Taylor partielle de f,

$$\sum (x-x_0)_\alpha (\partial/\partial x)_\alpha f(x,y)/|\alpha|!$$

converge uniformément vers $f(x,y)$ pour x voisin de x_0 et y dans M. Le théorème est démontré.

Remarque. De la même manière on peut démontrer que toute solution f de $Pf=g$, est analytique en x si g a la même propriété.

5. Opérateurs conditionellement elliptiques.

Nous allons examiner une classe d'opérateurs différentiels intermédiaire entre les deux précédentes. Les démonstrations étant analogues nous serons très brefs.

Définition. On dit qu'un opérateur différentiel $P(D_x, D_y)$ est conditionellement elliptique en x, si toute distribution f, analytique en y, et solution de $Pf=0$, est analytique en x,y.

Théorème 1. *Pour que P soit conditionellement elliptique en x il faut et il suffit que l'une des deux conditions équivalentes suivantes soit satisfaite*:

(1) *Il existe $c>0$ tel que $P(\xi,\eta)=0$ entraîne* $|\xi'| \leqq c(1+|\eta|+|\xi''|)$.

(2) $P=P_0(D_x)+\sum P_i(D_x)Q_i(D_y)$, $i>0$, *avec P_0 elliptique et* $\deg P_i < \deg P_0$, $\deg P_i + \deg Q_i \leqq \deg P_0$.

Remarque. La condition (1) montre qu'un tel opérateur est intermédiaire entre les opérateurs partiellement elliptiques et hypoelliptiques. La deuxième condition signifie que les hyperplans $\xi' x=$ constante ($\xi' \neq 0$), ne sont pas caractéristiques.

L'équivalence de (1) et (2) se démontre immédiatement par un raisonnement analogue à celui du théorème 3.1. Pour démontrer la nécessité de (1) on opère comme au théorème 4.2. Soient V et $\tilde{W}$ des ouverts de R^m et C^n contenant l'origine et soit H l'espace des fonctions continues de $x,\tilde{y} \in V \times \tilde{W}$, holomorphes en $\tilde{y} \in \tilde{W}$ pour tout $x \in V$, et vérifiant $Pf=0$. Par l'intégrale de Cauchy on vérifie immédiatement que, pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(V)$,

$$\int f(x,\tilde{y})\, \varphi(x)\, dx$$

est analytique en $\tilde{y}$. Par le théorème de Baire on montre qu'il existe des fermés $A \subset V$ et $B \subset \tilde{W}$ et une constante $c>0$ tels que, pour tout f dans H et tout $p \geqq 0$

$$\sum |D_\alpha f(\varphi, 0)| \leqq c^{p+1} p! M, \qquad |\alpha| = p,$$

où M est le maximum de $|f|$ dans $A \times B$. En raisonnant comme au théorème 4.2 on en déduit la condition (1).

Remarque. On aurait pu démontrer la nécessité de (2), en utilisant les « solutions nulles » de Hörmander [2].

Pour démontrer la suffisance de (2), on commence (régularisation), par se ramener au cas où f est régulière et vérifie, sur tout compact K où elle est définie, les inégalités

$$|D^p D_y{}^q f, K| \leqq c^{q+1} q!, \qquad \forall q \geqq 0, \quad 0 \leqq p < \nu,$$

où $\nu = \deg P$ et où l'on a utilisé les notations du § 4, c'est à dire que le carré du premier membre est la somme

$$\sum |D_\alpha (D_y)_\beta f, K|^2, \qquad |\alpha| = p, \quad \beta = q.$$

Introduisons la norme

$$|f, K|_\sigma = \sum |D^k f, K| \sigma^k, \qquad 0 \leqq k < \nu,$$

pour $\sigma \leqq 1$. Notons qu'on a

$$|D_y{}^q f, K|_\sigma \leqq c^{q+1} q!, \qquad \forall q \geqq 0, \tag{3}$$

avec c indépendant de σ. On démontre alors le lemme suivant, analogue du lemme 4.1: si K et L sont deux boules concentriques de rayons r et $r+\sigma$ et $Pf = 0$ dans un voisinage de L, alors

$$|Df, K|_\sigma \leqq c(\sigma^{-1} |f, L|_\sigma + |D_y f, L|_\sigma)$$

avec c indépendant de f et de σ.

Ensuite, pour majorer toutes les dérivées de f, on considère $p-1$ boules intermédiaires entre K et L de rayons $r + (j/p)\sigma$ $(1 \leqq j < p)$; en itérant le lemme on trouve

$$|D^p f, K| \leqq c^p \sum \binom{p}{q} (p/\sigma)^{p-q} |D_y{}^q f, L|_{\sigma/p}.$$

En utilisant (3) et les inégalités élémentaires suivantes

$$\binom{p}{q} \leqq 2^p, \qquad p^{-q} q! \leqq 1, \qquad p^p \leqq e^p p!,$$

on en déduit que

$$|D^p f, K| \leqq c^{p+1} p!, \qquad \forall p \geqq 0,$$

avec une nouvelle constante c. On termine en utilisant le lemme de Sobolev, comme au § 4.

AJOUTÉ À LA CORRECTION DES ÉPREUVES. Un article récent de L. Ehrenpreis (*Solution of some problems of division* IV, Amer. Journal of Math. 82 (1960), pp. 522–288) étudie les problemes traités ici dans le cas, plus général, où les opérateurs différentiels à coefficients constants sont remplacés par des distributions à support compact.

BIBLIOGRAPHIE

1. I. G. Petrovsky, *Sur l'analyticité des solutions des systèmes d'équations différentielles*, Rec. Math. Moscou N. S. 5 (1937), 3–68.
2. L. Hörmander, *On the theory of general partial differential operators*, Acta Math. 94 (1955), 161–248.
3. L. Hörmander, *On interior regularity of the solutions of partial differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. 11 (1958), 197–218.
4. B. Malgrange, *Sur une classe d'opérateurs différentiels hypoelliptiques*, Bull. Soc. Math. France 85 (1957), 283–306.
5. J. Peetre, *Opérateurs différentiels quasi linéaires hypoelliptiques*, C. R. Acad. Sci. Paris 248 (1959), 3401–3403.
6. A. Friedman, *On the regularity of the solutions of non-linear elliptic and parabolic systems of partial differential equations*, J. Math. Mech. 7 (1958), 43–60.
7. L. Gårding et B. Malgrange, *Opérateurs différentiels partiellement hypoelliptiques*, C. R. Acad. Sci. Paris 247 (1958), 2083–2085.
8. A. Seidenberg, *A new decision method for elementary algebra*, Ann. of Math. (2) 60 (1954), 365–374.
9. L. Schwartz, *Théorie des distributions* I, II, Paris, 1951.
10. L. Schwartz, *Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles*, J. Analyse Math. 4 (1954–55), 88–148.
11. L. Schwartz, *Distributions semi-regulières et changements de variables*, J. Math. Pures Appl. (9) 36 (1957), 109–127.
12. L. Hörmander, *On the regularity of the solutions of boundary problems*, Acta Math. 99 (1958), 225–264.
13. M. Gevrey, *Démonstration du théorème de Picard–Bernstein par la méthode des contours successifs; prolongement analytique*, Bull. Sci. Math. 50 (1926), 113–126.

UNIVERSITÉ DE LUND, SUÈDE
UNIVERSITÉ DE STRASBOURG, FRANCE