MATH. SCAND. 9 (1961), 147–177

SUR LES ESPACES D'INTERPOLATION; DUALITÉ

J.-L. LIONS

Introduction.

On introduit au chapitre I une classe d'espaces, des « espaces de traces », qui jouissent de la propriété d'interpolation par rapport aux applications linéaires (Chap. I, Théorème 3.1). — Nous avons déjà introduit dans Lions [17] [18] [19] des espaces de ce genre, dont nous avons donné plusieurs définitions équivalentes à l'aide de la théorie des semi-groupes. — Notre objet essentiel est ici la détermination des duals de ces espaces de traces; le résultat principal est le Théorème 1.1, Chap. II (dont la démonstration occupe les N° 2 et 3 du Chap. II). Diverses remarques et applications sont données aux N° 4 et 5, Chap. II.

Les résultats d'interpolation du Chap. I reposent sur des méthodes de fonctions de variable réelle. — (Pour l'utilisation des fonctions de variable complexe, cf. Thorin [34], et Aronszajn [1], A. P. Caldéron [4], S. G. Krein [14] [15], J. L. Lions [21]).

Un cas particulier des résultats du Chap. II, N° 4, a été obtenu indépendamment, par une méthode différente, par J. Peetre [27].

Des applications à la théorie des problèmes aux limites linéaires sont données dans Lions–Magenes [22] [23] [24]. — Des applications à la théorie des problèmes aux limites non linéaires seront données prochainement. — D'autres propriétés des »espaces de traces« sont données dans [21 bis] et [24 bis].

On peut remplacer les espaces de Banach A_0, A_1 par des espaces de Fréchet, mais nous n'insistons pas sur ce point.

Chapitre I. Les espaces de traces.

1. Les espaces $T_j(p,\alpha,A_0;\ q,\beta,A_1)$.

Les notations seront les suivantes: soit X un espace de Banach, $f \in X$, $\|f\|_X$ la norme de f dans X; on désigne par $L^p(a,b;X)$, $1 \leqq p < \infty$, l'espace des (classes de) fonctions $t \to u(t)$, $t \in (a,b)$, mesurables à valeurs dans X, telles que

Reçu le 11 novembre, 1960.

$$(1.1)\qquad \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p\,dt\right)^{1/p} < \infty ;$$

c'est un espace de Banach pour la norme définie par (1.1); on utilisera spécialement l'espace $L^p(0,\infty;X)$; lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, on écrira

$$L^p(0,\infty;X) = L^p(X) .$$

Modification habituelle si $p=\infty$.

Soient maintenant A_0 et A_1 deux espaces de Banach, tels que

$$(1.2)\qquad A_0 \subset \mathscr{A}, \quad A_1 \subset \mathscr{A} ,$$

$\mathscr{A}$ étant un espace vectoriel topologique, les injections de A_i dans $\mathscr{A}$ étant continues.

Définition 1.1. On désigne par $W^{(m)}(p,\alpha,A_0;q,\beta,A_1)$ l'espace des (classes de) fonctions u telles que

$$(1.3)\qquad t^\alpha u \in L^p(0,\infty;A_0) = L^p(A_0) ,$$

$$(1.4)\qquad t^\beta u^{(m)} \in L^q(A_1) ,$$

où p, q sont donnés avec $1 \leqq p,q \leqq \infty$, et où

$$(1.5)\qquad \theta = \frac{1}{p}+\alpha \in \,]0,1[, \qquad \theta_1 = \frac{1}{q}+\beta \in \,]0,1[;$$

voici la signification de (1.4): il résulte de (1.3) que la fonction u est localement sommable sur l'ouvert $]0,\infty[$ à valeurs dans A_0, par conséquent définit une distribution (encore notée u) sur l'ouvert $]0,\infty[$ à valeurs dans A_0 (cf. Schwartz [31]). — Alors $d^m u/dt^m$ a un sens dans l'espace $\mathscr{D}'(]0,\infty[;A_0)$ des distributions sur $]0,\infty[$ à valeurs dans A_0, et comme t^α est indéfiniment différentiable dans $t>0$,

$$t^\beta u^{(m)} \in \mathscr{D}'\big(]0,\infty[;A_0\big) \subset \mathscr{D}'\big(]0,\infty[;\mathscr{A}\big)$$

et (1.4) a un sens.

On posera:

$$(1.6)\qquad X_{p,\alpha}(u) = X(u) = \left(\int_0^\infty t^{\alpha p}\,\|u(t)\|_{A_0}^p\,dt\right)^{1/p},$$

$$(1.7)\qquad Y_{q,\beta}(u) = Y(u) = \left(\int_0^\infty t^{\beta q}\,\|u^{(m)}(t)\|_{A_1}^q\,dt\right)^{1/q}.$$

On munit $W^{(m)}(p,\alpha,A_0;\, q,\beta,A_1)$ de la norme

$$\|u\|_{W^{(m)}} = \max\bigl(X_{p,\alpha}(u),\ Y_{q,\beta}(u)\bigr)\,. \tag{1.8}$$

Muni de cette norme, *c'est un espace de Banach*; en effet, si u_n est une suite de Cauchy, alors, l'espace $L^p(X)$ étant complet lorsque X est un espace de Banach, $t^\alpha u_n \to t^\alpha u$ dans $L^p(A_0)$ et $t^\beta u_n^{(m)} \to t^\beta g$ dans $L^q(A_1)$; mais alors $t^\beta u_n^{(m)} \to t^\beta u^{(m)}$ dans $\mathscr{D}'(]0,\infty[;\, \mathscr{A})$, donc $t^\beta g = t^\beta u^{(m)}$, d'où le résultat.

Jusqu'ici les hypothèses (1.5) ne sont pas intervenues; on va maintenant les utiliser en partie; en effet, T étant un nombre fini quelconque, on a:

$$\begin{aligned}\int_0^T \|u(t)\|_{A_0}\, dt &= \int_0^T t^\alpha\, \|u(t)\|_{A_0}\, t^{-\alpha}\, dt \\ &\leqq \left(\int_0^T t^{\alpha p}\, \|u(t)\|_{A_0}^p\, dt\right)^{1/p} \left(\int_0^T t^{-\alpha p'}\, dt\right)^{1/p'}, \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1\,,\end{aligned}$$

et comme

$$\theta = \frac{1}{p}+\alpha < 1, \qquad \int_0^T t^{-\alpha p'}\, dt < \infty$$

de sorte que:

$$u \in L^1(0,T;\, A_0), \qquad u^{(m)} \in L^1(0,T;\, A_1); \tag{1.9}$$

si l'on introduit *l'espace* $E^m(0,T;\, A_0,A_1)$ des (classes de) fonctions u telles que (1.9) ait lieu, muni de la norme

$$\int_0^T \bigl(\|u(t)\|_{A_0} + \|u^{(m)}(t)\|_{A_1}\bigr)\, dt$$

(qui en fait un espace de Banach), on a donc une application *continue* $u \to u$ de $W^{(m)}(p,\alpha,A_0;\, q,\beta,A_1)$ dans $E^m(0,T;\, A_0,A_1)$.

Considérons maintenant l'espace $A_0+A_1 \subset \mathscr{A}$ défini algébriquement de façon évidente, et muni de la norme

$$\|a\|_{A_0+A_1} = \inf_{a_0,\, a_1} (\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1}), \qquad a = a_0+a_1\,, \tag{1.10}$$

qui en fait un espace de Banach.

On a alors: $A_i \subset A_0+A_1$, $i=0,1$, l'injection de A_i dans A_0+A_1 étant continue; par conséquent

$$E^m(0,T;\, A_0,A_1) \subset E^m(0,T;\, A_0+A_1)$$

avec l'injection continue, où $E^m(0,T;\, X)$ désigne l'espace $E^m(0,T;\, X,X)$.

On a le

LEMME 1.1. *L'espace $\mathscr{D}([0,T]; X)$ des fonctions indéfiniment différentiables dans $[0,T]$ à valeurs dans X est dense dans $E^m(0,T; X)$.*

DÉMONSTRATION. A l'aide d'une partition de l'unité sur $[0,T]$, on peut se contenter d'approcher par des éléments de $\mathscr{D}([0,T]; X)$ une fonction $u \in E^m(0,T; X)$ et nulle au voisinage de T.

A l'aide de translations dans le sens négatif, on peut supposer que u est restriction à $(0,T)$ de $V \in L^1(-\infty, +\infty; X)$ avec $V^{(m)} \in L^1(-\infty, +\infty; X)$; on approche V par ses régularisées et par restriction à $(0,T)$ on a le Lemme.

LEMME 1.2. *Pour $0 \leqq j \leqq m-1$, l'application*

$$u \to u^{(j)}(0) \tag{1.11}$$

de $\mathscr{D}([0,T]; X) \to X$, se prolonge par continuité en une application linéaire continue, encore notée $u \to u^{(j)}(0)$, de $E^m(0,T; X)$ dans X.

DÉMONSTRATION. 1) Utilisant le procédé de Babitch [2], on voit que tout $u \in E^m(0,T; X)$ est restriction à $(0,T)$ de $U \in E^m(-\infty, +\infty; X)$; mais alors $U', \ldots, U^{(m-1)} \in L^1(-\infty, +\infty; X)$, de sorte que

$$u', \ldots, u^{(m-1)} \in L^1(0,T; X)$$

et

$$\int_0^T \|u^{(j)}(t)\|_X \, dt \leqq c_j \int_0^T \left(\|u(t)\|_X + \|u^{(m)}(t)\|_X\right) dt, \qquad j = 1, \ldots, m-1 \,. \tag{1.12}$$

2) Si $\theta(t)$ est une fois continûment différentiable dans $[0,T)$ avec

$$\theta(0) = 1, \qquad \theta(T) = 0 \,,$$

on a, pour $u \in \mathscr{D}([0,T); X)$:

$$u^{(j)}(0) = -\int_0^T \frac{d}{dt}\left(\theta u^{(j)}(t)\right) dt \,,$$

d'où

$$\|u^{(j)}(0)\|_X \leqq c \int_0^T \left(\|u^{(j)}(t)\|_X + \|u^{(j+1)}(t)\|_X\right) dt;$$

le résultat suit de cette inégalité, de (1.12) et du Lemme 1.1.

Revenant à l'espace $W^{(m)}(p, \alpha, A_0; q, \beta, A_1)$, il résulte des remarques précedentes que l'on a la

PROPOSITION 1.1. *Pour* $0 \leqq j \leqq m-1$, *l'application*

$$u \to u^{(j)}(0) \tag{1.13}$$

est définie et continue de $W^{(m)}(p,\alpha,A_0;\, q,\beta,A_1)$ *dans* A_0+A_1.

Désignons par $W_j^{(m)}(p,\alpha,A_0;\, q,\beta,A_1)$ le noyau de l'application (1.13), i.e. l'ensemble des u avec $u^{(j)}(0)=0$.

On considère alors l'application $u^\cdot \to u^{(j)}(0)$ de $W^{(m)}/W_j^{(m)}$ (avec des notations abrégées évidentes) dans A_0+A_1 et l'on pose la

DÉFINITION 1.2. On désigne par $T_j^{(m)}(p,\alpha,A_0;\, q,\beta,A_1)$ l'image de $W^{(m)}/W_j^{(m)}$ dans l'application $u^\cdot \to u^{(j)}(0)$.

Si $a \in T_j^{(m)}(p,\alpha,A_0;\, q,\beta,A_1)$, on pose

$$\|a\|_{T_j^{(m)}} = \inf_u \|u\|_{W^{(m)}}, \qquad u^{(j)}(0) = a\,. \tag{1.14}$$

L'application $u^\cdot \to u^{(j)}(0)$, $u \in u^\cdot$, *est alors un isomorphisme de* $W^{(m)}/W_j^{(m)}$ *sur* $T_j^{(m)}$.

Les espaces $T_j^{(m)}(p,\alpha,A_0;\, q,\beta,A_1)$ sont des *espaces de traces.*

Notons ceci:

$$A_0 \cap A_1 \subset T_j^{(m)}(p,\alpha,A_0;\, q,\beta,A_1); \tag{1.15}$$

soit en effet $a \in A_0 \cap A_1$, et φ indéfiniment différentiable dans $t \geqq 0$, à support compact, avec $\varphi^{(j)}(0)=1$. Soit $u(t)=\varphi(t)a$; puisque $\theta>0$ et $\theta_1>0$, $u \in W^{(m)}(p,\alpha,A_0;\, q,\beta,A_1)$ et

$$\|u\|_{W^{(m)}} \leqq K(\|a\|_{A_0}+\|a\|_{A_1}) \tag{1.16}$$

(les c_j, K, K_j désignent des constantes diverses); comme $u^{(j)}(0)=a$, on a l'inclusion algébrique (1.15) et de (1.14) et (1.16) il résulte que l'injections dans (1.15) est *continue.*

REMARQUE 1.1. On peut également, pour ce N°, utiliser les résultats de E. T. Poulsen [29].

2. Premières propriétés des espaces de traces.

LEMME 2.1. *Pour* $a \in T_j^{(m)}(p,\alpha,A_0;\, q,\beta,A_1)$, *on a*:

$$\|a\|_{T_j^{(m)}} = \inf_u X(u)^{1-\gamma_j}\, Y(u)^{\gamma_j}, \qquad u^{(j)}(0) = a\,, \tag{2.1}$$

où

$$\gamma_j = \frac{j+\theta}{m+\theta-\theta_1}\,. \tag{2.2}$$

DÉMONSTRATION. Pour $u \in W^{(m)}$, posons (j étant fixé au cours de la démonstration)

$$u_\lambda(t) = \lambda^{-j} u(\lambda t), \qquad \lambda > 0 .$$

Alors

$$u_\lambda^{(j)}(0) = u^{(j)}(0)$$

de sorte que d'après (1.14), si $u^{(j)}(0) = a$,

$$\|a\|_{T_j^{(m)}} \leqq \inf_{\lambda>0} \left(\max\left(X(u_\lambda),\ Y(u_\lambda)\right)\right) .$$

Mais

$$X(u_\lambda) = \lambda^{-j-\theta} X(u), \qquad Y(u_\lambda) = \lambda^{m-j-\theta_1} Y(u) .$$

Si l'on choisit λ de façon que $X(u_\lambda) = Y(u_\lambda)$, on a donc

$$\|a\|_{T_j^{(m)}} \leqq X(u)^{1-\gamma_j} Y(u)^{\gamma_j} ,$$

et ceci quel que soit $u \in W^{(m)}$ avec $u^{(j)}(0) = a$, d'où le Lemme.

On va en déduire la

PROPOSITION 2.1. *Pour $a \in A_0 \cap A_1$, on a*

(2.3) $$\|a\|_{T_j^{(m)}(p,\alpha,A_0;\,q,\beta,A_1)} \leqq K \|a\|_{A_0}^{1-\gamma_j} \|a\|_{A_1}^{\gamma_j} ,$$

où

$$K = K(p,\alpha,q,\beta) ,$$

γ_j donné par (2.2).

DÉMONSTRATION. Soit φ, m fois continûment différentiable dans $t \geqq 0$, à support compact, avec $\varphi^{(j)}(0) = 1$; alors

$$u(t) = \varphi(t) a \in W^{(m)}$$

et par (2.1):

$$\|a\|_{T_j^{(m)}} \leqq \|a\|_{A_0}^{1-\gamma_j} \|a\|_{A_1}^{\gamma_j} \left(\int_0^\infty |t^\alpha \varphi|^p \, dt\right)^{(1-\gamma_j)/p} \left(\int_0^\infty |t^\beta \varphi^{(m)}|^q \, dt\right)^{\gamma_j/q}$$

d'où le résultat.

Il ne serait pas sans intérêt de connaître la meilleure constante K possible dans (2.3).

REMARQUE 2.1. Il suit de (2.3) que la norme $\|a\|_{T_j^{(m)}(p,\alpha,A_0;\,q,\beta,A_1)}$ est *différente* des normes $\|a\|_{A_0}$ et $\|a\|_{A_1}$ supposées non comparables. — Voici toutefois un problème non résolu dans cette direction: soient $\tilde{p}, \tilde{\alpha}, \tilde{q}, \tilde{\beta}$ donnés; posons

$$\tilde{\theta} = \frac{1}{\tilde{p}} + \tilde{\alpha}, \qquad \tilde{\theta}_1 = \frac{1}{\tilde{q}} + \tilde{\beta} ,$$

et supposons que

$$\gamma_j = \tilde{\gamma}_j, \qquad \text{i.e.,} \qquad \frac{j+\tilde{\theta}}{m+\tilde{\theta}-\tilde{\theta}_1} = \frac{j+\theta}{m+\theta-\theta_1}\,;$$

en supposant $p \neq \tilde{p}, \ldots$, les normes

$$\|a\|_{T_j^{(m)}(p,\alpha,A_0;\,q,\beta,A_1)} \quad \text{et} \quad \|a\|_{T_j^{(m)}(\tilde{p},\tilde{\alpha},\tilde{A}_0;\,\tilde{q},\tilde{\beta},\tilde{A}_1)}$$

sont-elles différentes ? (Très probablement, elles sont « en général » différentes; cf. toutefois la Proposition 2.2. ci après).

Remarque 2.2. Les inégalités (2.3) sont du type des inégalités prises comme définition des « échelles d'espaces » par S. G. Krein [15].

Remarque 2.3. Il est intéressant de comparer les espaces $T_j^{(m)}(p,\alpha,A_0;\, q,\beta,A_1)$ lorsque $p,\alpha,\ q,\beta$ varient. Nous nous bornons dans ce sens au résultat suivant:

Proposition 2.2. *On suppose que* $1<p\leqq\infty$, $1<q\leqq\infty$. *Dans ces conditions*

$$T_0^{(1)}(p,\alpha,A_0;\,q,\beta,A_1) = T_0^{(1)}(p,\gamma,A_0;\,q,\gamma,A_1) \tag{2.4}$$

où

$$\gamma = \frac{\alpha + \theta_1/p - \theta/q}{1+\theta-\theta_1}\,. \tag{2.5}$$

Démonstration. Soit $u \in W^{(1)}(p,\alpha,A_0;\,q,\beta,A_1)$. Introduisons la fonction v définie par

$$v(s) = u(s^\lambda) \tag{2.6}$$

où

$$\lambda = \frac{1}{1+\theta-\theta_1}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q'}\right), \qquad \frac{1}{q}+\frac{1}{q'} = 1\,. \tag{2.7}$$

On vérifie alors que $v \in W^{(1)}(p,\gamma,A_0;\,q,\gamma,A_1)$, γ étant donné par (2.5). Comme l'application $u \to v$ est surjective et que $u(0)=v(0)$, on obtient le résultat (noter que $\gamma+1/p$ et $\gamma+1/q$ sont dans l'intervalle $]0,1[$).

En fait la démonstration qui précède montre que $T(p,\alpha,A_0;\,q,\beta,A_1)$ ne dépend que de p,q et $\theta/(1-\theta_1)$.

3. Propriétés d'interpolation.

Soint B_0,B_1 deux espaces de Banach, avec $B_i \subset \mathscr{B}$, $i=0,1$, $\mathscr{B}$ étant un espace vectoriel topologique et l'injection de B_i dans $\mathscr{B}$ étant continue.

Supposons que $A_0 \cap A_1$ est *dense* dans A_0 et dans A_1. Soit π un opérateur linéaire de $A_0 \cap A_1$ dans $B_0 \cap B_1$, tel que

$$(3.1) \qquad \|\pi a\|_{B_0} \leqq \bar{\omega}_0 \|a\|_{A_0}, \qquad a \in A_0 \cap A_1 ,$$

$$(3.2) \qquad \|\pi a\|_{B_1} \leqq \bar{\omega}_1 \|a\|_{A_1}, \qquad a \in A_0 \cap A_1 .$$

Alors, par prolongement par continuité, $\pi \in \mathscr{L}(A_0; B_0)$ et $\mathscr{L}(A_1; B_1)$, où $\mathscr{L}(X; Y)$ désigne l'espace des applications linéaires continues de X dans Y. Si maintenant $a \in A_0 + A_1$, alors $\pi a \in B_0 + B_1$ et

$$\|\pi a\|_{B_0+B_1} \leqq \inf_{a_0+a_1=a} \left(\|\pi a_0\|_{B_0} + \|\pi a_1\|_{B_1}\right)$$
$$\leqq \max(\bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1) \inf_{a_0+a_1=a} \left(\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1}\right) ,$$

donc

$$(3.3) \qquad \|\pi a\|_{B_0+B_1} \leqq \max(\bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1) \, \|a\|_{A_0+A_1} .$$

Donc

$$\pi \in \mathscr{L}(A_0 + A_1; B_0 + B_1) .$$

Ceci fixé, on a le

THÉORÈME 3.1. *Si $A_0 \cap A_1$ est dense dans A_0 et dans A_1 et si $\pi \in \mathscr{L}(A_0; B_0) \cap \mathscr{L}(A_1; B_1)$ avec* (3.1) *et* (3.2), *alors, pour tout p, α, q, β, avec $1 \leqq p \leqq \infty$, $1 \leqq q \leqq \infty$,*

$$\theta = \frac{1}{p} + \alpha \in]0,1[, \qquad \theta_1 = \frac{1}{q} + \beta \in]0,1[,$$

et pour tout $j = 0, 1, \ldots, m-1$, on a:

$$(3.4) \qquad \pi \in \mathscr{L}\big(T_j^{(m)}(p, \alpha, A_0; q, \beta, A_1); \; T_j^{(m)}(p, \alpha, B_0; q, \beta, B_1)\big);$$

la norme de π dans ce dernier espace est majorée par

$$\bar{\omega}_0^{1-\gamma_j} \, \bar{\omega}_1^{\gamma_j} ,$$

γ_j donné par (2.2).

DÉMONSTRATION. Notons d'abord que si $a \in T_j^{(m)}(p, \alpha, A_0; q, \beta, A_1)$ alors πa est défini, car $T_j^{(m)} \subset A_0 + A_1$ et π est défini sur $A_0 + A_1$.

Soit donc $a \in T_j^{(m)}$; soit $u^{\cdot} \in W^{(m)}/W_j^{(m)}$, avec $u^{(j)}(0) = a$ pour tout $u \in u^{\cdot}$, l'application $a \to u^{\cdot}$ étant continue. On considère $\pi u \colon t \to \pi u(t)$, qui est dans $W^{(m)}(p, \alpha, B_0; q, \beta, B_1)$; alors $\pi u^{(j)}(0)$ est dans $T_j^{(m)}(p, \alpha, B_0; q, \beta, B_1)$ et dépend continûment de a dans cet espace; or $\pi u^{(j)}(0) = \pi a$ d'où (3.4). — En outre, par (2.1)

$$\|\pi a\|_{T_j^{(m)}} \leqq \inf_u X(\pi u)^{1-\gamma_j} \, Y(\pi u)^{\gamma_j}$$
$$\leqq \inf_u \bar{\omega}_0^{1-\gamma_j} \bar{\omega}_1^{\gamma_j} X(u)^{1-\gamma_j} \, Y(u)^{\gamma_j} = \bar{\omega}_0^{1-\gamma_j} \bar{\omega}_1^{\gamma_j} \, \|a\|_{T_j^{(m)}} ,$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

4. Exemple.

Soit X un espace topologique localement compact, $d\mu(x)$ une mesure positive sur X et $L^p(X, d\mu) = L^p$, $1 \leqq p \leqq \infty$, les espaces de classes de fonctions de puissance $p^{\text{ème}}$ intégrable sur X pour $d\mu$. On va étudier les espaces $T_0^{(1)}(p, \alpha, A_0; q, \beta, A_1)$ lorsque

$$A_0 = L^{p_1}, \qquad A_1 = L^{q_1}$$

(si par exemple $q_1 = \infty$, on remplace L^∞ par l'adhérence de $L^{p_1} \cap L^\infty$ dans L^∞). On utilisera le

LEMME 4.1. *Soit v une fonction définie* (p. p.) *sur* $(0, \infty)$, *avec*

$$t^\alpha v \in L^p(0, \infty), \quad t^\beta \frac{dv}{dt} \in L^q(0, \infty), \qquad \frac{1}{p} + \alpha = \theta, \quad \frac{1}{q} + \beta = \theta_1 .$$

Alors

$$|v(0)| \leqq c \, \|t^\alpha v\|_{L^q}^{(1-\theta_1)/(1+\theta-\theta_1)} \, \|t^\beta v'\|_{L^p}^{\theta/(1+\theta-\theta_1)} \tag{4.1}$$

où

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_0^\infty |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p},$$

id. pour $\|f\|_{L^q}$, et où c est une constante ne dépendant que de p, α, q, β.

DÉMONSTRATION. Utilisant la Proposition 1.1 avec $m = 1$, $j = 0$, $A_0 = A_1 = 0$, on voit que

$$|v(0)| \leqq c_1 (\|t^\alpha v\|_{L^p} + \|t^\beta v'\|_{L^q}), \qquad c_1 = \text{constante} .$$

Par un raisonnement d'homogénéité analogue à celui de la démonstration du Lemme 2.1, on en déduit le résultat.

On désigne désormais par $c(p, \alpha, q, \beta) = c$ *la meilleure* constante possible dans (4.1).

PROPOSITION 4.1. *Soit $A_0 = L^{p_1}$, $A_1 = L^{q_1}$, $p_1 \geqq p$, $q_1 \geqq q$. On suppose que*

$$\frac{1}{p} + \alpha = \frac{1}{q} + \beta = \theta . \tag{4.2}$$

Soit r_1 défini par

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{q_1} . \tag{4.3}$$

Dans ces conditions $T_0^{(1)}(p, \alpha, A_0; q, \beta, A_1) \subset L^{r_1}$, avec

$$\|f\|_{L^{r_1}} \leqq c(p, \alpha, q, \beta) \, \|f\|_{T_0^1}, \qquad f \in T_0^{(1)}(p, \alpha, A_0; q, \beta, A_1) . \tag{4.4}$$

DÉMONSTRATION. Soit $u \in W^{(1)}(p, \alpha, A_0; q, \beta, A_1)$; d'après le Lemme 4.1, on a, p.p. en x:

$$|u(x,0)| \leqq c\left(\int_0^\infty |t^\alpha u(x,t)|^p\, dt\right)^{(1-\theta)/p} \left(\int_0^\infty \left|t^\beta \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|^q dt\right)^{\theta/q}$$

d'où

$$\left(\int_X |u(x,0)|^{r_1}\, d\mu(x)\right)^{1/r_1}$$
$$\leqq c\left(\int_X \left(\int_0^\infty |t^\alpha u|^p\, dt\right)^{(1-\theta)r_1/p} \left(\int_0^\infty \left|t^\beta \frac{\partial u}{\partial t}\right|^q dt\right)^{\theta r_1/q} d\mu(x)\right)^{1/r_1}.$$

Utilisant l'inégalité de Hölder, il vient

$$\left(\int_X |u(x,0)|^{r_1}\, d\mu(x)\right)^{1/r_1}$$
$$\leqq c\left(\int_X \left(\int_0^\infty |t^\alpha u|^p\, dt\right)^{(1-\theta)pr_1/p} d\mu(x)\right)^{1/pr_1} \left(\int_X \left(\int_0^\infty \left|t^\beta \frac{\partial u}{\partial t}\right|^q dt\right)^{p'r_1/q} d\mu(x)\right)^{1/p'r_1},$$

où $1/p + 1/p' = 1$. On choisit p de façon que $(1-\theta)pr_1 = p_1$; alors $\theta p' r_1 = q_1$, donc

$$\left(\int_X |u(x,0)|^{r_1}\, d\mu(x)\right)^{1/r_1}$$
$$\leqq c\left(\int_X \left(\int_0^\infty |t^\alpha u|^p\, dt\right)^{p_1/p} d\mu(x)\right)^{(1-\theta)/p_1} \left(\int_X \left(\int_0^\infty \left|t^\beta \frac{\partial u}{\partial t}\right|^q dt\right)^{q_1/q} d\mu(x)\right)^{\theta/q_1}.$$

Comme $p_1 \geqq p$, $q_1 \geqq q$, on peut utiliser l'inégalité de Jessen; donc

$$\left(\int_X |u(x,0)|^{r_1}\, d\mu(x)\right)^{1/r_1}$$
$$\leqq c\left(\int_0^\infty \left(\int_X |t^\alpha u|^{p_1}\, d\mu(x)\right)^{p/p_1} dt\right)^{(1-\theta)/p} \left(\int_0^\infty \left(\int_X \left|t^\beta \frac{\partial u}{\partial t}\right|^{q_1} d\mu(x)\right)^{q/q_1} dt\right)^{\theta/q}.$$

Donc $u(x,0) = f(x)$ définit $f \in L^{r_1}$ et

$$\|f\|_{L^{r_1}} \leqq c\, X(u)^{1-\theta}\, Y(u)^\theta$$

pour *tout* $u \in W^1$ avec $u(0) = f$. D'après le Lemme 2.1. on en déduit (4.4).

PROPOSITION 4.2. *Hypothèses de la Proposition* 4.1 *avec en outre* $p_1 = p$, $q_1 = q$. *On pose* $r_1 = r$. *Alors* $T_0^{(1)}(p, \alpha, L^p; q, \beta, L^q) = L^r$ *et*

$$\|f\|_{L^r} = c(p, \alpha, q, \beta) \|f\|_{T_0^1}. \tag{4.5}$$

DÉMONSTRATION. Soit $\varepsilon > 0$ donné; choisissons v avec $t^\alpha v \in L^p(0, \infty)$ et $t^\beta v' \in L^q(0, \infty)$, de façon que (cf. (4.1))

$$|v(0)| \geqq (c - \varepsilon) \|t^\alpha v\|_{L^p}^{1-\theta} \|t^\beta v'\|_{L^q}^{\theta}.$$

On peut supposer v réelle et, quitte à remplacer v par $v/v(0)$, $v(0) = 1$.

Soit f donnée dans L^r; soit

$$u(x, t) = f(x) \, v\big(t |f(x)|^\lambda\big), \tag{4.6}$$

λ étant défini par

$$p - p^\theta \lambda = r. \tag{4.7}$$

On vérifie que

$$X(u) = \|t^\alpha v\|_{L^p} \|f\|_{L^r}^{r/p}, \qquad Y(u) = \|t^\beta v'\|_{L^q} \|f\|_{L^r}^{r/q},$$

de sorte que $u \in W^1(p, \alpha, L^p; q, \beta, L^q)$ et comme $u(0) = f$, on voit que $T_0^1(p, \alpha, L^p; q, \beta, L^q) = L^r$. En outre, d'après le Lemme 2.1,

$$\|f\|_{T_0^1} \leqq X(u)^{1-\theta} \, Y(u)^\theta = \|f\|_{L^r} \|t^\alpha v\|_{L^p}^{1-\theta} \|t^\beta v'\|_{L^q}^{\theta} \leqq (c - \varepsilon)^{-1} \|f\|_{L^r}.$$

Comme ceci vaut pour tout $\varepsilon > 0$, et comme on a déjà (4.4), on en déduit la proposition.

Application: *le théorème de Marcel Riesz.*

Soit π une application linéaire continue de L^p dans L^{p_1} (norme $\bar{\omega}_0$) et de L^q dans L^{q_1} (norme $\bar{\omega}_1$), avec $p_1 \geqq p$, $q_1 \geqq q$. Alors π est une application linéaire continue de L^r dans L^{r_1},

$$\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q}, \qquad \frac{1}{r_1} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{q_1},$$

de norme $\leqq \bar{\omega}_0^{1-\theta} \, \bar{\omega}_1^{\theta}$.

En effet, d'après le Théorème 3.1, π est une application linéaire continue de $T_0^1(p, \alpha, L^p; q, \beta, L^q) = L^r$ (Proposition 4.2) dans $T_0^1(p, \alpha, L^{p_1}; q, \beta, L^{q_1}) \subset L^{r_1}$ (Proposition 4.1), donc *à fortiori* de L^r dans L^{r_1}. En outre, toujours d'après le Théorème 3.1,

$$\|\pi f\|_{T_0^1} \leqq \bar{\omega}_0^{1-\theta} \, \bar{\omega}_1^{\theta} \|f\|_{T_0^1};$$

utilisant (4.4) et (4.5) on en déduit

$$\|\pi f\|_{L^{r_1}} \leqq c\|\pi f\|_{T_0^1} \leqq \bar{\omega}_0^{1-\theta}\,\bar{\omega}_1^{\theta}\,c\,\|f\|_{T_0^1} = \bar{\omega}_0^{1-\theta}\,\bar{\omega}_1^{\theta}\,\|f\|_{L^r}$$

d'où le résultat. Modifications habituelles si, par exemple, $q_1=\infty$.

On notera que si, comme il semble probable, $T_0^1(p,\alpha,L^{p_1};q,\beta,L^{q_1})$ était *strictement* contenu dans L^{r_1} lorsque $p_1>p$ ou $q_1>q$, on obtiendrait alors un complément au classique théorème de Marcel Riesz [30], π appliquant L^r dans $T_0^1(p,\alpha,L^{p_1};q,\beta,L^{q_1})$.

REMARQUE 4.1. Par de simples modifications techniques, on peut obtenir par les mêmes méthodes, les résultats linéaires de Stein [32], Stein–Weiss [33].

REMARQUE 4.2. On trouvera une autre démonstration « réelle » du théorème de Marcel Riesz dans Gagliardo [9]; l'idée d'introduire (4.6), pour un choix particulier de v, est dûe à Gagliardo, loc. cit. (c'est probablement à cause du choix particulier de v que cet auteur n'obtient pas complètement l'inégalité de convexité); les résultats de Gagliardo s'étendent à certains cas non linéaires. Nous ignorons si les résultats de Marcinkiewicz–Zygmund (Zygmund [35]) peuvent être obtenus par des méthodes de ce genre.

REMARQUE 4.3. On trouvera dans [17] [18] [19] d'autres exemples où les espaces $T_j^{(m)}(p,\alpha,A_0;q,\beta,A_1)$ reçoivent une interprétation simple. On déduit de là, à l'aide du Théorème 3.1, un certain nombre de théorèmes d'interpolation. Cf. Lions [20].

Chapitre II. Dualité.

1. Enoncé du résultat principal.

On considère $A_0,A_1\subset\mathscr{A}$ comme au Chap. I, N° 1, $A_0\cap A_1$ étant dense dans A_0 et dans A_1; on munit $A_0\cap A_1$ de la norme $\|a\|_{A_0}+\|a\|_{A_1}$. Si P et Q sont deux opérateurs linéaires continus de A_0 dans lui même et de A_1 dans lui même, coincidant sur $A_0\cap A_1$, on écrira $P=Q$. On supposera:

$$(1.1)\quad \begin{cases} \text{il existe une suite d'opérateurs } P_n,\ n=1,2,\ldots, \text{ linéaires continus de } A_0 \text{ dans } A_0\cap A_1 \text{ et de } A_1 \text{ dans } A_0\cap A_1, \text{ tels que} \\ P_n a_0 \to a_0 \text{ dans } A_0,\ P_n a_1 \to a_1 \text{ dans } A_1\ (a_i\in A_i) \text{ lorsque } n\to\infty. \end{cases}$$

LEMME 1.1. *L'hypothèse* (1.1) *ayant lieu, l'espace* $A_0\cap A_1$ *est dense dans* $T_j^{(m)}(p,\alpha,A_0;q,\beta,A_1)$.

DÉMONSTRATION. Soit $a\in T_j^{(m)}(p,\alpha,A_0;q,\beta,A_1)=T_j^{(m)}$; $a=u^{(j)}(0)$, pour u élément de $W^{(m)}(p,\alpha,A_0;q,\beta,A_1)$; considérons $v_n(t)=P_n u(t)$; puisque $P_n a_0\to a_0$, $P_n a_1\to a_1$, on a:

$$\|P_n\|_{\mathscr{L}(A_0;A_0)} \leqq c_0, \qquad \|P_n\|_{\mathscr{L}(A_1;A_1)} \leqq c_1 ,$$

de sorte que

$$\|v_n(t)\|_{A_0} \leqq c_0 \|u(t)\|_{A_0}, \qquad \|v_n^{(m)}(t)\|_{A_1} \leqq c_1 \|u^{(m)}(t)\|_{A_1};$$

comme $v_n(t) \to u(t)$ dans A_0 (p.p.) et $v_n^{(m)}(t) \to u^{(m)}(t)$ dans A_1 (p.p.) il en résulte, d'après le théorème de Lebesgue, que $v_n \to u$ dans $W^{(m)}(p,\alpha,A_0; q,\beta,A_1)$. Alors $v_n^{(j)}(0) \to a$ dans $T_j^{(m)}$. Comme P_n est continu de A_0 et A_1 dans $A_0 \cap A_1$, on voit que $t^\alpha v_n \in L^p(A_0 \cap A_1)$, $t^\beta v_n^{(m)} \in L^q(A_0 \cap A_1)$, de sorte que $v_n^{(j)}(0) \in A_0 \cap A_1$, ce qui démontre le Lemme.

L'hypothèse (1.1) est vérifiée dans toutes les situations que nous avons rencontrées. Elle est vérifiée dans le cas important pour les applications où A_0 est le domaine d'un générateur infinitésimal d'un semigroupe dans A_1 (cf. Lemme 5.1 plus loin).

On va maintenant supposer que

$$A_0 \text{ et } A_1 \text{ sont réflexifs .} \tag{1.2}$$

Soient A_0', A_1' les duals de ces espaces. Alors

$$A_0' \cap A_1' \subset A_i' \subset A_0' + A_1', \qquad i = 0, 1 , \tag{1.3}$$

et

$$A_0' \cap A_1' \subset T_j^{(m)}(p,\alpha,A_0; q,\beta,A_1)' \subset A_0' + A_1' , \tag{1.4}$$

toutes les injections étant continues.

Si $1 \leqq p \leqq \infty$, on posera toujours $1/p + 1/p' = 1$. Notons, que si

$$\frac{1}{p} + \alpha = \theta \in]0,1[, \qquad \frac{1}{q} + \beta = \theta_1 \in]0,1[,$$

alors

$$\frac{1}{q'} - \beta = 1 - \theta_1 \in]0,1[, \qquad \frac{1}{p'} - \alpha = 1 - \theta \in]0,1[,$$

de sorte que l'on peut introduire

$$T_k^{(m)}(q', -\beta, A_1'; p', -\alpha, A_0'), \qquad 0 \leqq k \leqq m-1 .$$

Dans ces conditions:

THÉORÈME 1.1. *On suppose que* (1.1), (1.2) *ont lieu. On donne* p,q *avec* $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$; *on suppose que* $\alpha + 1/p = \theta \in]0,1[$ *et* $\beta + 1/q = \theta_1 \in]0,1[$. *Alors*

$$T_j^{(m)}(p,\alpha,A_0; q,\beta,A_1)' = T_{m-j-1}^{(m)}(q', -\beta, A_1'; p', -\alpha, A_0') , \tag{1.5}$$

algébriquement et topologiquement.

La démonstration de ce théorème occupe les No 2 et 3.

2. Lemmes.

Au cours de ce N° et au suivant nous poserons

$$W^{(m)}(p,\alpha,A_0;\,q,\beta,A_1) \;=\; W\,;$$

et

$$W^{(m)}(p,\alpha,A_0\cap A_1;\,q,\beta,A_0\cap A_1) \;=\; W(A_0\cap A_1)\,.$$

LEMME 2.1. *Sous l'hypothèse* (1.1), *l'espace* $W(A_0\cap A_1)$ *est dense dans l'espace* W.

Ceci résulte de la démonstration du Lemme 1.1.

LEMME 2.2. *L'espace* $W_K(A_0\cap A_1)$ *des éléments de* $W(A_0\cap A_1)$ *à support compact dans* $t\geqq 0$ *est dense dans* $W(A_0\cap A_1)$.

DÉMONSTRATION. 1) Posons $A_0\cap A_1=X$; soit donc $u\in W(X)$; alors, en particulier

$$t^\alpha u \;\in\; L^p(1,\infty;X), \qquad t^\beta u^{(m)} \;\in\; L^q(1,\infty;X)\,.$$

Utilisant l'inégalité de Hölder, on en déduit, que

(2.1) $$u \;\in\; L^{p_1}(1,\infty;X), \qquad u^{(m)} \;\in\; L^{q_1}(1,\infty;X)$$

pour p_1 et q_1 quelconques, vérifiant

(2.2) $$\frac{1}{p_1} < \frac{1}{p}+\alpha, \qquad \frac{1}{q_1} < \frac{1}{q}+\beta\,.$$

2) Il résulte de (2.1) et de Gagliardo [12], Nirenberg [25], que

(2.3) $$u^{(j)} \;\in\; L^{r_j}(1,\infty;X)\,,$$

pour tout r_j tel que

(2.4) $$\frac{1}{r_j} > \frac{m-j}{mp_1}+\frac{j}{mq_1}\,.$$

3) On considère maintenant une fonction M indéfiniment différentiable dans $t\geqq 0$, $M(t)=1$ si $0\leqq t\leqq 1$, $0\leqq M(t)\leqq 1$, $M(t)=0$ si $t\geqq 2$. Posons $M_R(t)=M(t/R)$. Nous allons vérifier que $M_R u$ appartient à $W(X)$ (donc à $W_K(X)$) et que $M_R u\to u$ dans $W(X)$.

Il est évident que $t^\alpha M_R u\to t^\alpha u$ dans $L^p(0,\infty;X)$; reste donc à montrer que $t^\beta(M_R u)^{(m)}\to t^\beta u^{(m)}$ dans $L^q(0,\infty;X)$, i.e. que

$$t^\beta (M_R)^{(m-j)}u^{(j)} \to 0 \qquad \text{dans} \qquad L^q(0,\infty;X)$$

pour $R\to\infty$, $0\leqq j\leqq m-1$. Vu l'expression de M_R, il est équivalent de montrer que

$$R^{-(m-j)q}\int_R^{2R} t^{\beta q}\,\|u^{(j)}(t)\|^q\,dt \to 0 \qquad \text{lorsque} \qquad R\to\infty \tag{2.5}$$

(où $\|u^{(j)}(t)\|$ = norme de $u^{(j)}(t)$ dans X). Mais

$$\int_R^{2R} t^{\beta q}\,\|u^{(j)}(t)\|^q\,dt \leqq \left(\int_R^{2R}\|u^{(j)}(t)\|^{qp}\,dt\right)^{1/p}\left(\int_R^{2R} t^{\beta q p'}\,dt\right)^{1/p'},$$

$1/p+1/p'=1$; choisissons p avec $qp=r_j$. Alors

$$R^{-(m-j)q}\int_R^{2R} t^{\beta q}\,\|u^{(j)}(t)\|^q\,dt \leqq cR^{-(m-j)q+\beta q+1/p'}\,o(R)\,,$$

puisque l'on a (2.3). On aura donc (2.5) si

$$(m-j)q-\beta q-\frac{1}{p'} \geqq 0, \qquad \text{i.e.} \quad m-j-\left(\frac{1}{q}+\beta\right)+\frac{1}{r_j} \geqq 0\,,$$

et utilisant (2.4), il faut voir si l'on peut choisir p_1,q_1 avec (2.2) et en outre

$$m-j-\left(\frac{1}{q}+\beta\right)+\frac{m-j}{mp_1}+\frac{q}{mq_1} \geqq 0\,. \tag{2.6}$$

Il en sera ainsi si

$$m-j-\left(\frac{1}{q}+\beta\right)+\frac{m-j}{m}\left(\frac{1}{p}+\alpha\right)+\frac{j}{m}\left(\frac{1}{q}+\beta\right) > 0\,,$$

i.e.

$$m-\left(\frac{1}{q}+\beta\right)+\left(\frac{1}{p}+\alpha\right) > 0$$

ou encore $\theta_1 < m+\theta$, ce qui est vrai, puisque $m\geqq 1$, $\theta>0$ et $\theta_1<1$.

Ceci achève la démonstration du Lemme 2.2.

Lemme 2.3. *Toute forme linéaire $u\to L(u)$ continue sur W peut s'écrire*

$$L(u) = \int_0^\infty \langle t^\alpha u(t), f(t)\rangle\,dt + \int_0^\infty \langle t^\beta u^{(m)}(t), g(t)\rangle\,dt\,, \tag{2.7}$$

où

$$f\in L^{p'}(0,\infty;A_0'),\qquad g\in L^{q'}(0,\infty;A_1'),\qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1\,, \tag{2.8}$$

les crochets dans (2.7) *désignant respectivement le produit scalaire entre A_0,A_0' et A_1,A_1'.*

Ceci résulte d'un théorème de R. S. Phillips [28].

LEMME 2.4. *Posons*: $W_j^{(m)}(p,\alpha,A_0;q,\beta,A_1)=W_j$ *et* $(W_j)^0$ = *espace polaire de* W_j *dans* W'. *La condition nécessaire et suffisante pour que* $L\in(W_j)^0$ *est que l'on puisse l'écrire*

$$(2.9)\qquad L(u)=\int_0^\infty\langle u^{(m)},G\rangle\,dt+(-1)^{m+1}\int_0^\infty\langle u,G^{(m)}\rangle\,dt\,,$$

où

$$(2.10)\qquad t^{-\beta}G\in L^{q'}(0,\infty;A_1'),\qquad t^{-\alpha}G^{(m)}\in L^{p'}(0,\infty;A_0')\,,$$

$\big($*donc* $G\in W^{(m)}(q',-\beta,A_1';p',-\alpha,A_0')=\mathscr{W}\big)$ *et où*

$$(2.11)\qquad G^{(k)}(0)=0\qquad\textit{pour}\quad k\neq m-j-1,\ 0\leqq k\leqq m-1\,.$$

DÉMONSTRATION. 1) *La condition est nécessaire.*

Soit $L\in(W_j)^0$; alors L est de la forme (2.7) avec $L(u)=0$ pour tout $u\in W_j$. Donc, *en particulier*, $L(u)=0$ pour $u(t)=\varphi(t)a$, $a\in A_0\cap A_1$, φ indéfiniment différentiable à support compact dans $t>0$; alors

$$(2.11)\qquad t^\alpha f+(-1)^m D^m(t^\beta g)=0\,,$$

$D^m=(d/dt)^m$ étant pris au sens des distributions sur $]0,\infty[$ à valeurs dans $\mathscr{A}$ (Schwartz [31]).

Posant $t^\beta g=G$, on a donc $t^{-\beta}G\in L^{q'}(0,\infty;A_1')$ et $D^mG=(-1)^{m+1}t^\alpha f$, donc $t^{-\alpha}D^mG\in L^{p'}(0,\infty;A_0')$, et on peut écrire $L(u)$ sous la forme (2.9).

Ecrivons maintenant que $L(u)=0$ pour toute $u(t)=\varphi(t)a$ avec φ indéfiniment différentiable dans $t\geqq 0$, avec $\varphi^{(j)}(0)=0$.

Par des intégrations par parties dans (2.9) (loisibles, puisque dans ce cas u est indéfiniment différentiable à valeurs dans $A_0\cap A_1$, et les fonctions $G,G',\ldots,G^{(m)}$ sont sommables à valeurs dans $A_0'+A_1'$) on en déduit (2.11).

2) Reste à voir maintenant que réciproquement, G étant donnée avec (2.10) et (2.11), la forme $L(u)$ définie par (2.9), verifie

$$(2.12)\qquad L(u)=0\qquad\text{pour tout}\quad u\in W_j$$

$\big($de sorte que $L\in(W_j)^0\big)$.

Comme la forme $u\to L(u)$ est continue sur W, il résulte des Lemmes 2.1 et 2.2 qu'il suffit de montrer (2.12) pour

$$(2.13)\qquad u\in W_K(A_0\cap A_1),\qquad\text{avec}\quad u^{(j)}(0)=0\,.$$

Soit donc u donnée avec (2.13). Posons:

$$v(t) = \frac{1}{(m-1)!}\int_0^t (t-\sigma)^{m-1}\, u^{(m)}(\sigma)\, d\sigma\, . \tag{2.14}$$

On définit ainsi une fonction $m-1$ fois continûment différentiable à valeurs dans $A_0 \cap A_1$, avec

$$v(0) = \ldots = v^{(m-1)}(0) = 0$$

et

$$D^m(u-v) = 0\, .$$

Donc

$$u = v + P_{m-1}\, ,$$

P_{m-1} = polynôme de degré $\leqq m-1$ à coefficients dans $A_0 \cap A_1$.

Soit M indéfiniment différentiable dans $t \geqq 0$, égale à 1 au voisinage du support de u, et à support compact. Alors

$$Mu = u$$

donc

$$u = Mv + MP_{m-1} = w + Q \tag{2.15}$$

avec

(2.16) $\begin{cases} Q \text{ indéfiniment différentiable à valeurs dans } A_0 \cap A_1, \text{ à sup-} \\ \text{port compact, avec } Q^{(j)}(0) = 0, \end{cases}$

et

$$w = Mv\, . \tag{2.17}$$

Il résulte de (2.16) que $L(Q) = 0$ (les intégrations par parties étant loisibles), et par conséquent pour montrer (2.12) il reste seulement à vérifier que

$$L(w) = 0\, . \tag{2.18}$$

On va montrer qu'il existe une suite de fonctions φ_n, indéfiniment différentiables dans $t \geqq 0$, à valeurs dans $A_0 \cap A_1$, et nulles au voisinage de $t = 0$, telles que

$$\varphi_n \to w \quad \text{dans } W; \tag{2.19}$$

comme $L(\varphi_n) = 0$ (intégrations par parties loisibles), (2.18) en résultera.

Soit Φ_n une suite de fonctions indéfiniment différentiables dans $t \geqq 0$, avec $\Phi_n(t) = 1$ pour $t \geqq 2/n$, $\Phi_n(t) = 0$ pour $t \leqq 1/n$, $|\Phi_n^{(k)}(t)| \leqq Mn^k$, $k = 0, 1, \ldots, m$. Posons

$$w_n = \Phi_n w$$

et montrons que

$$w_n \to v \quad \text{dans } W\, , \tag{2.20}$$

lorsque $n \to \infty$. Comme il est évident que $t^{\alpha} w_n \to t^{\alpha} w$ dans $L^p(0, \infty; A_0 \cap A_1)$, il reste à vérifier que $t^{\beta} w_n^{(m)} \to t^{\beta} w^{(m)}$ dans $L^q(0, \infty; A_0 \cap A_1)$, donc que

$$t^{\beta} \Phi_n^{(k)} M^{(r)} v^{(s)} \to 0 \quad \text{dans } L^q(0, \infty; A_0 \cap A_1)$$

pour $k+r+s=m$, $k \geqq 1$. Le cas le plus défavorable est $r=0$, $s=m-k$; il faut donc montrer que

$$y_n = \int_0^{2/n} t^{\beta q} |\Phi_n^{(k)}|^q \, \|v^{(m-k)}(t)\|^q \, dt \to 0 \tag{2.21}$$

lorsque $n \to \infty$ (où $\| \;\|$ désigne la norme dans $A_0 \cap A_1$). Mais

$$v^{(m-k)}(t) = \frac{1}{(m-k-1)!} \int_0^t (t-\sigma)^{k-1} u^{(m)}(\sigma) \, d\sigma ,$$

donc

$$\begin{aligned} \|v^{(m-k)}(t)\| &= c_1 \left(\int_0^t \sigma^{\beta q} \|u^{(m)}(\sigma)\|^q \, d\sigma \right)^{1/q} \left(\int_0^t (t-\sigma)^{(k-1)q'} \sigma^{-\beta q'} \, d\sigma \right)^{1/q'} \\ &= c_2 t^{k-1-\beta+1/q'} \left(\int_0^t \sigma^{\beta q} \|u^{(m)}(\sigma)\|^q \, d\sigma \right)^{1/q} . \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} y_n &\leqq c_3 \left(\int_0^{2/n} t^{\beta q} \|u^{(m)}(t)\|^q \, dt \right) \left(\int_0^{2/n} t^{(k-1)q+q/q'} \, dt \right) n^{kq} \\ &= c_4 \int_0^{2/n} t^{\beta q} \|u^{(m)}(t)\|^q \, dt \end{aligned}$$

ce qui montre (2.21) et achève la démonstration du Lemme.

D'après le Lemme 2.4, on voit qu'à $L \in (W_j)^0$ on peut faire correspondre

$$G^{(m-j-1)}(0) \in T_{m-j-1}{}^{(m)}(q', -\beta, A_1'; p', -\alpha, A_0') = \mathscr{T} .$$

La fonction G n'est pas définie de façon unique mais

LEMME 2.5. *L'élément $G^{(m-j-1)}(0) \in \mathscr{T}$ est défini de façon unique à partir de $L \in (W_j)^0$.*

DÉMONSTRATION. Soit $G_1 \in \mathscr{W}$ avec $G_1^{(k)}(0) = 0$ pour $k \neq m-j-1$, et

$$L(u) = \int_0^{\infty} \langle u^{(m)}, G_1 \rangle \, dt + (-1)^{m+1} \int_0^{\infty} \langle u, G_1^{(m)} \rangle \, dt .$$

Alors

$$\int_0^\infty \langle u^{(m)}, G - G_1 \rangle \, dt + (-1)^{m+1} \int_0^\infty \langle u, G^{(m)} - G_1{}^{(m)} \rangle \, dt = 0$$

pour *toute* fonction $u \in W$. Il en résulte que

$$G^{(m-j-1)}(0) = G_1{}^{(m-j-1)}(0) ,$$

d'où le résultat.

On peut donc poser

$$RL = G^{(m-j-1)}(0) . \tag{2.22}$$

LEMME 2.6. *L'application $L \to RL$ de $(W_j)^0$ dans $\mathscr{T}$ est surjective.*

DÉMONSTRATION. Soit $\xi \in \mathscr{T}$. Alors il existe $F_\xi \in \mathscr{W}$, telle que $F_\xi{}^{(m-j-1)}(0) = \xi$, l'application $\xi \to F_\xi$ étant linéaire continue de $\mathscr{T}$ dans $\mathscr{W}$. Considérons (variante de Babitch [2]):

$$G_\xi(t) = \sum_{k=1}^{m} c_k F_\xi(kt) \tag{2.23}$$

où les constantes c_k sont définies par les relations:

$$\sum_{k=1}^{m} k^r c_k = 0, \qquad r \neq m-j-1, \ 0 \leqq r \leqq m-1 ,$$

$$\sum_{k=1}^{m} k^{m-j-1} c_k = 1 .$$

Alors $G_\xi \in \mathscr{W}$,

$$G_\xi{}^{(r)}(0) = 0 \quad \text{pour} \quad r \neq m-j-1, \qquad G_\xi{}^{(m-j-1)}(0) = \xi ,$$

et $\xi \to G_\xi$ est continue de $\mathscr{T}$ dans $\mathscr{W}$.

Considérons $L_\xi \in W^1$ definie par

$$L_\xi(u) = \int_0^\infty \langle u^{(m)}, G_\xi \rangle \, dt + (-1)^{m+1} \int_0^\infty \langle u, G_\xi{}^{(m)} \rangle \, dt; \tag{2.24}$$

d'après le Lemme 2.4 et les propriétés de G_ξ, L_ξ est dans $(W_j)^0$ et $RL_\xi = \xi$. Ceci démontre le Lemme 2.6, et en fait, $\xi \to L_\xi$ étant continue de $\mathscr{T}$ dans $\mathscr{W}$ et $L \to RL$ étant biunivoque, on a:

LEMME 2.7. *L'application $L \to RL$ est un isomorphisme de $(W_j)^0$ sur $\mathscr{T}$.*

3. Démonstration du Théorème 1.1.

Rappelons les notations adoptées au N° 2:

$$W^{(m)}(p,\alpha,A_0;q,\beta,A_1) = W, \qquad W_j^{(m)}(p,\alpha,A_0;q,\beta,A_1) = W_j\,,$$
$$(W_j)^0 = \text{polaire de } W_j, \qquad W^{(m)}(q',-\beta,A_1';p',-\alpha,A_0') = \mathscr{W}\,,$$
$$W_j^{(m)}(q',-\beta,A_1';p',-\alpha,A_0') = \mathscr{W}_j\,,$$
$$T_j^{(m)}(p,\alpha,A_0;q,\beta,A_1) = T, \qquad T_{m-j-1}^{(m)}(q',-\beta,A_1';p',-\alpha,A_0') = \mathscr{T}\,.$$

On sait (Définition 1.2, Chap. I) que si M désigne l'application

$$u^{\cdot} \to u^{(j)}(0) = Mu^{\cdot}$$

c'est un isomorphisme de W/W_j sur T; donc l'application ${}^tM$ (transposée de M) est un isomorphisme de T' sur $(W_j)^0$, vérifiant

$$\langle {}^tMb,u\rangle = \langle b,u^{(j)}(0)\rangle, \qquad b \in T', \quad u \in W \tag{3.1}$$

(et $\langle {}^tMb,u\rangle = 0$ si $u \in W_j$). L'opérateur

$$S = (-1)^j R\,{}^tM \tag{3.2}$$

(où R est défini par (2.22)) est alors, d'après le Lemme 2.7, un *isomorphisme de T' sur $\mathscr{T}$.*

Si

$$\langle {}^tMb,u\rangle = \int_0^\infty \langle u^{(m)},G_b\rangle\,dt + (-1)^{m+1}\int_0^\infty \langle u,G_b^{(m)}\rangle\,dt\,,$$

où

$$G_b \in \mathscr{W}, \qquad G_b^{(k)}(0) = 0, \quad \text{si } k \neq m-j-1, \; 0 \leqq k \leqq m-1\,,$$

on a

$$(-1)^j R\,{}^tMb = (-1)^j G_b^{(m-j-1)}(0) = Sb\,. \tag{3.3}$$

Mais soit $a \in A_0 \cap A_1$, et soit $u(t) = \varphi(t)a$, φ étant m fois continûment différentiable dans $t \geqq 0$, à support compact, avec $\varphi^{(j)}(0) = 1$. Alors, par intégrations par parties (loisibles), on a:

$$\langle {}^tMb,u\rangle = (-1)^j \langle G_b^{(m-j-1)}(0),u^{(j)}(0)\rangle = \langle Sb,a\rangle$$

donc

$$\langle b,a\rangle = \langle Sb,a\rangle \qquad \text{pour tout} \quad a \in A_0 \cap A_1$$

de sorte que $Sb = b$. L'application $b \to b$ est donc un isomorphisme de T' sur $\mathscr{T}$, ce qui démontre le théorème 1.1.

4. Remarques diverses.

Remarque 4.1. Soit $u \in W^{(m)}(p,\alpha,A_0;q,\beta,A_1)$, $G \in W^{(m)}(q',-\beta,A_1';p',-\alpha,A_0')$. Alors

$$\int_0^\infty \langle u^{(m)}(t), G(t)\rangle\, dt + (-1)^{m+1}\int_0^\infty \langle u(t), G^{(m)}(t)\rangle\, dt \tag{4.1}$$
$$= \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^{m-j} \langle u^{(j)}(0), G^{(m-j-1)}(0)\rangle ,$$

où le crochet de rang j dans le deuxième membre désigne le produit scalaire entre

$$T_j^{(m)}(p,\alpha,A_0;\, q,\beta,A_1) \qquad \text{et} \qquad T_{m-j-1}^{(m)}(q', -\beta, A_1';\, p', -\alpha, A_0') .$$

En effet, d'après les Lemmes 2.1 et 2.2, il suffit de montrer (4.1) lorsque u est dans $W_K(A_0 \cap A_1)$.

On peut encore écrire u sous la forme (2.15), i.e.

$$u = Mv + Q , \tag{4.2}$$

où v est donné par (2.14), et où

$$u^{(k)}(0) = Q^{(k)}(0), \qquad 0 \leqq k \leqq m-1$$

(on n'a plus cette fois $Q^{(j)}(0)=0$). D'après ce qu'on a démontré au Lemme 2.4,

$$\int_0^\infty \langle (Mv)^{(m)}, G\rangle\, dt + (-1)^{m+1}\int_0^\infty \langle Mv, G^{(m)}\rangle\, dt = 0 .$$

Reste donc seulement à vérifier (4.1) avec $u=Q$; comme Q est indéfiniment différentiable à support compact de $t \geqq 0 \to A_0 \cap A_1$, les intégrations par parties sont loisibles et donnent le résultat.

Remarque 4.2. Soit maintenant

$$b \in T' = \mathscr{T} = T_{m-j-1}^{(m)}(q', -\beta, A_1';\, p', -\alpha, A_0')$$

et soit

$$a \in T = T_j^{(m)}(p,\alpha,A_0;\, q,\beta,A_1) .$$

On peut trouver

$$u \in W^{(m)}(p,\alpha,A_0;\, q,\beta,A_1) = W \qquad \text{avec} \quad u^{(j)}(0) = a ,$$

et

$$u^{(k)}(0) = 0, \qquad 0 \leqq k \leqq m-1,\ k \neq j .$$

Alors

$$\langle b,a\rangle = (-1)^{m-j}\int_0^\infty \langle u^{(m)}, G\rangle\, dt + (-1)^{1-j}\int_0^\infty \langle u, G^{(m)}\rangle\, dt$$

où G est quelconque dans $\mathscr{W}$ avec $G^{(m-j-1)}(0)=b$. On a donc

$$|\langle b,a\rangle| \leqq \|u\|_W \, \|G\|_{\mathscr{W}} \leqq \|a\|_T \, \|g\|_{\mathscr{W}} ,$$

donc

$$\frac{|\langle b,a\rangle|}{\|a\|_T} \leqq \inf \|G\|_{\mathscr{W}} = \|b\|_{\mathscr{T}} .$$

Si donc l'on désigne par $|||b|||_{T'}$ la norme de dual fort de T dans T', on a:

(4.3) $$|||b|||_{T'} \leqq \|b\|_{\mathscr{T}} .$$

Remarque 4.3. La réflexivité de A_0 et A_1 est intervenue dans le Lemme 2.3, qui utilise R. S. Phillips [28]. D'après J. Dieudonné [5], si les espaces A_0 et A_1 sont *séparables*, non réflexifs, alors la représentation (2.7) est valable, avec f et g *faiblement* mesurables à valeurs dans A_0' et A_1', avec

$$\int_0^\infty \|f(t)\|^p_{A_0'} \, dt < \infty, \qquad \int_0^\infty \|g(t)\|^q_{A_1'} \, dt < \infty .$$

Mais des difficultés interviennent alors dans les raisonnements suivant (2.7) et nous ignorons si le Théorème 1.1. est correct lorsque A_0 et A_1 sont séparables non réflexifs.

5. Dualité des espaces $T(p,\alpha;\, D(\Lambda), E)$.

Soit E un espace de Banach, $G(t)$ un semi-groupe fortement continu et borné dans E (donc $\|G(t)\| \leqq M$, et pour tout $e \in E$, la fonction $t \to G(t)e$ est continue de $t \geqq 0$ dans E, $G(0)e = e$). On désigne par Λ le générateur infinitésimal de $G(t)$, de domaine $D(\Lambda)$ muni de la norme $\|e\| + \|\Lambda e\|$.

Pour tout ce qui concerne les semi-groupes, consulter Hille–Phillips [13].

Nous allons prendre $A_0 = D(\Lambda)$, $A_1 = E$. Vérifions le

Lemme 5.1. *L'hypothèse* (1.1) *a lieu.*

Démonstration. Soit p_n une suite régularisante: les $p_n(t)$ sont indéfiniment différentiables sur R, à support dans $[0, \varepsilon_n]$, $\varepsilon_n \to 0$ avec $1/n$,

$$\int p_n(t)\, dt = 1, \qquad p_n(t) \geqq 0 .$$

Soit

$$G(p_n) = \int_0^{\varepsilon_n} G(t)\, p_n(t)\, dt ,$$

intégrale dans $\mathscr{L}(E;E)$. On peut prendre $P_n = G(p_n)$ dans (1.1). En effet $G(p_n) \in \mathscr{L}(E; D(\Lambda))$; si $e \in E$, $G(p_n)e \to e$ dans E lorsque $n \to \infty$ et si $e \in D(\Lambda)$, $G(p_n)e \to e$ dans $D(\Lambda)$, car $\Lambda G(p_n)e = G(p_n)\Lambda e \to \Lambda e$ dans E. D'où le résultat.

On va appliquer les résultats précédents à l'espace $T_0^{(1)}(p,\alpha,A_0;\ p,\alpha,A_1)$. Pour simplifier l'écriture, cet espace sera désigné par $T(p,\alpha;\ D(\Lambda),E)$.

On a démontré dans Lions [18] que l'espace $T(p,\alpha;\ D(\Lambda),E)$ coincide avec l'espace des $e \in E$ tels que

$$t^{\alpha-1}\bigl(G(t)e-e\bigr) \in L^p(0,\infty;\ E);\tag{5.1}$$

la norme

$$\|e\| + \left(\int_0^\infty t^{(\alpha-1)p}\,\|G(t)e-e\|^p\,dt\right)^{1/p}$$

est *équivalente* à la norme initiale sur $T(p,\alpha;\ D(\Lambda),E)$. Comme $D(\Lambda)$ est dense dans E, on peut considérer E' (dual de E) comme un sous-espace de dual de $D(\Lambda)$:

$$E' \subset D(\Lambda)' \qquad \text{(injection continue)}\ .\tag{5.2}$$

Si l'on suppose E *réflexif*, alors on peut appliquer le Théorème 1.1; donc, le dual de $T(p,\alpha;\ D(\Lambda),E)$ sera

$$T(p,\alpha;\ D(\Lambda),E)' = T_0^{(1)}(p',-\alpha,E';\ p',-\alpha,D(\Lambda)')\ .\tag{5.3}$$

Étudions ce dernier espace. — Comme on le vérifie facilement $G(t) \in \mathscr{L}(D(\Lambda);\ D(\Lambda))$, la norme de $G(t)$ dans cet espace étant encore majorée par M et $G(t)$ définissant un semi-groupe dans $D(\Lambda)$. Par conséquent, si $H(t)$ *désigne le transposé de* $G(t)$ *dans* $\mathscr{L}(D(\Lambda);\ D(\Lambda))$ on a:

$$H(t) \in \mathscr{L}(D(\Lambda)';\ D(\Lambda)')\tag{5.4}$$

et $H(t)$ est un semi-groupe fortement continue borné dans $D(\Lambda)'$.

Soit Σ le générateur infinitésimal de $H(t)$. On a:

$$D(\Sigma) = E'\ ,\tag{5.5}$$

et

$$\Sigma e' = {}^t\Lambda e', \quad {}^t\Lambda = \text{transposé de } \Lambda, \text{ élément de } \mathscr{L}(E';\ D(\Lambda)')\ .\tag{5.6}$$

On voit donc que

$$T_0^{(1)}(p',-\alpha,E';\ p',-\alpha,D(\Lambda)') = T(p',-\alpha;\ E',D(\Lambda)')$$

et la caractérisation de Lions [18] fournit le

THÉORÈME 5.1. *Soit $G(t)$ un semi-groupe fortement continu borné dans l'espace de Banach réflexif E, de générateur infinitésimal Λ; soit $H(t)$ le semi-groupe transposé dans $D(\Lambda)$* (cf. (5.4)). *Soit p avec $1<p<\infty$, $\alpha+1/p=\theta \in]0,1[$. Le dual de l'espace $T(p,\alpha;\ D(\Lambda),E)$ coincide, algébriquement et topologiquement, avec l'espace $T(p',-\alpha;\ E',D(\Lambda)')$ des éléments $e' \in D(\Lambda)'$ tels que*

$$\|e'\|_{D(A)'} + \left(\int_0^\infty t^{(-\alpha-1)p'} \|H(t)e' - e'\|_{D(A)'}^{p'} dt \right)^{1/p'} < \infty .$$

On peut donner une autre interprétation de ce dual. Comme l'espace $T(p,\alpha; D(A),E)$ est muni de la topologie la moins fine telle que les applications $e \to e$ et $e \to t^{\alpha-1}(G(t)e - e)$ soient continue de $T(p,\alpha; D(A),E)$ dans E et $L^p(0,\infty; E)$, on voit (on utilise encore une fois le théorème de R. S. Phillips [28]) que toute forme linéaire continue sur $T(p,\alpha; D(A),E)$ peut s'écrire (de façon non unique):

$$L(e) = \langle e_0', e\rangle + \int_0^\infty t^{\alpha-1} \langle G(t)e - e, f(t)\rangle \, dt , \tag{5.7}$$

$$e_0' \in E', \qquad f \in L^{p'}(0,\infty; E'), \qquad e \in T(p,\alpha; D(A),E) .$$

On peut écrire, p.p. en t:

$$\langle G(t)e - e,\ f(t)\rangle = \langle e,\ H(t)f(t) - f(t)\rangle .$$

Notons le

LEMME 5.2. *Si $f \in L^{p'}(0,\infty; E')$, la fonction*

$$g(t) = t^{\alpha-1}\big(H(t)f(t) - f(t)\big)$$

est dans $L^1(0,\infty; D(A)')$.

DÉMONSTRATION. 1) Vérifions d'abord que $g \in L^1(1,\infty; E')$; en effet

$$\|g(t)\|_{E'} \leqq (M+1)t^{\alpha-1} \|f(t)\|_{E'} ,$$

d'où le résultat d'après Hölder et $\theta < 1$.

2) Vérifions maintenant que $g \in L^1(0,1; D(A)')$. De façon générale, si $e' \in E'$, on a:

$$\|H(t)e' - e'\|_{D(A)'} = \sup_{e \in D(A)} \cdot \frac{|\langle H(t)e' - e', e\rangle|}{\|e\|_{D(A)}}$$
$$= \sup_{e \in D(A)} \frac{|\langle e', G(t)e - e\rangle|}{\|e\|_{D(A)}} \leqq Mt \, \|e'\|_{E'}$$

donc

$$\|g(t)\|_{D(A)'} \leqq Mt^{\alpha} \|f(t)\|_{E'} ,$$

d'où le résultat d'après Hölder et $\theta > 0$.

Noter que ce Lemme joue ici un rôle « dual » des inclusions (1.3), p. 391, de Lions [18].

Revenons à (5.7). Grâce au Lemme précédent on peut considérer l'intégrale

$$\int_0^\infty t^{\alpha-1}\big(G(t)f(t)-f(t)\big)\,dt$$

prise dans $D(\Lambda)'$, et l'on obtient par conséquent ceci: Tout élément e' de $T(p',-\alpha;E',D(\Lambda)')$ peut s'écrire (de façon non unique)

$$e' = e_0' + \int_0^\infty t^{\alpha-1}\big(H(t)f(t)-f(t)\big)\,dt$$

où

$$f \in L^{p'}(0,\infty;E'), \qquad e_0' \in E' .$$

Il est préférable d'énoncer le résultat final de la façon (équivalente) suivante:

THÉORÈME 5.2. *Soit $G(t)$ un semi-groupe fortement continu borné dans l'espace de Banach réflexif E, de générateur infinitésimal Λ. Soit $1<p<\infty$, $1/p+\alpha=\theta\in\,]0,1[$. Tout élément e de l'espace $T(p,\alpha;D(\Lambda),E)$ peut s'écrire (de façon non unique)*

$$e = e_0 + \int_0^\infty t^{-\alpha-1}\big(G(t)f(t)-f(t)\big)\,dt \tag{5.8}$$

où

$$f \in L^p\big(0,\infty;D(\Lambda)\big), \qquad e_0 \in D(\Lambda)\,, \tag{5.9}$$

et réciproquement.

Ceci conduit naturellement au

PROBLÈME 5.1. Soit $\varphi(t)$ une fonction continue $\geqq 0$ dans $]0,\infty[$, telle que

$$\varphi \in L^{p'}(1,\infty), \qquad t\varphi \in L^{p'}(0,1)\,. \tag{5.10}$$

Alors, pour tout $f\in L^p\big(0,\infty;D(\Lambda)\big)$, la fonction

$$t \to \varphi(t)\big(G(t)f(t)-f(t)\big)$$

est dans $L^1(0,\infty;E)$; on peut donc considérer l'application

$$\{e_0,f\} \to e_0 + \int_0^\infty \varphi(t)\big(G(t)f(t)-f(t)\big)\,dt \tag{5.11}$$

de $D(\Lambda)\times L^p\big(0,\infty;D(\Lambda)\big)$ dans E.

Désignons par $S_\varphi(p, D(A), E)$ l'image de $E \times L^p(0,\infty; D(A))$ dans l'application (5.11), muni de la norme

$$(5.12) \qquad \|a\|_{S_\varphi} = \inf \left\{ \|e_0\|_{D(A)} + \left(\int_0^\infty \|f(t)\|_{D(A)}{}^p \, dt \right)^{1/p} \right\}$$

pour

$$e_0 + \int_0^\infty \varphi(t)\big(G(t)f(t) - f(t)\big)\, dt = a \, .$$

Alors $S_\varphi(p, D(A), E)$ est un espace de Banach. — On définit ainsi un « espace intermédiaire »:

$$D(A) \subset S_\varphi(p, D(A), E) \subset E \, .$$

Le problème (non résolu) est alors le suivant: *quelles sont les fonctions φ, vérifiant* (5.10), *telles que $S_\varphi(p, D(A), E)$ soit un espace d'interpolation*, i.e. toute application linéaire continue π de E dans lui même et de $D(A)$ dans lui même est nécessairement linéaire et continue de $S_\varphi(p, D(A), E)$ dans lui même?

Le Théorème 5.2 (joint au Théorème 3.1, Chap. I) montre que la classe des fonctions φ contient les fonctions $t^{-\alpha-1}$, $1/p + \alpha = \theta \in]0,1[$. Ce problème est, dans une certaine mesure, « dual » du problème, également non résolu, suivant: soit ψ une fonction continue $\geqq 0$ dans $]0,\infty[$, avec

$$(5.13) \qquad \psi \in L^p(1,\infty), \qquad t\psi \in L^p(0,1);$$

désignons par $R_\psi(p, D(A), E)$ l'espace des $e \in E$ tels que

$$\psi(t)\big(G(t)e - e\big) \in L^p(0,\infty; E) \, ,$$

muni de la norme

$$(5.14) \qquad \|e\|_E + \left(\int_0^\infty \psi(t)^p \, \|G(t)e - e\|_E{}^p \, dt \right)^{1/p} ,$$

qui en fait un espace de Banach. — On a:

$$D(A) \subset R_\psi(p, D(A), E) \subset E \, .$$

Quelles sont, dans ces conditions, les fonctions ψ, vérifiant (5.13), *telles que $R_\psi(p, D(A), E)$ soit un espace d'interpolation?*

A une identification convenable près, les classes de fonctions φ et ψ coincident-elles?

Une autre question naturelle est la suivante:

PROBLÈME 5.2. *Le Théorème 5.2 est-il encore vrai lorsque E n'est pas réflexif?*

REMARQUE 5.1. L'extension des Théorèmes 5.1 et 5.2 au cas où l'on considère une famille de générateurs infinitésimaux $\Lambda_1,\ldots,\Lambda_\nu$ « commutatifs » (i.e. les semi-groupes sont commutatifs) (cf. [18]) ne présente pas de difficulté. (L'on pose $D(\Lambda)=\bigcap_{i=1}^{\nu} D(\Lambda_i)$; soit $H_i(t)$ le semi-groupe transposé de $G_i(t)$ considéré dans $D(\Lambda)$; si Σ_i est le générateur infinitésimal de $H_i(t)$, on pourra vérifier que $\bigcap_{i=1}^{\nu} D(\Sigma_i)=E'$ en utilisant A. V. Balakrishnan [3]).

REMARQUE 5.2. Supposons maintenant que $G(t)$ soit un groupe fortement continu et borné dans E.

Considérons $A_0=D(\Lambda^2)$ (i.e. l'ensemble des $e\in D(\Lambda)$ tels que $\Lambda e\in D(\Lambda)$, muni de la norme $\|e\|+\|\Lambda e\|+\|\Lambda^2 e\|$) et $A_1=E$; en accord avec les notations de [19] posons:

$$T_0^{(2)}\big(p,\alpha,D(\Lambda^2);\,p,\alpha,E\big) = S_0\big(p,\alpha;\,D(\Lambda^2),E\big)\,,$$
$$T_1^{(2)}\big(p,\alpha,D(\Lambda^2);\,p,\alpha,E\big) = S_1\big(p,\alpha;\,D(\Lambda^2),E\big)\,.$$

Ces espaces sont caractérisés dans Lions [19]:

$$(5.15)\qquad \begin{cases} e\in S_0\big(p,\alpha;\,D(\Lambda^2),E\big) \text{ est équivalent à} \\ e\in D(\Lambda) \text{ et } \Lambda e\in T\big(p,\alpha;\,D(\Lambda),E\big); \end{cases}$$

$$(5.16)\qquad \begin{cases} e\in S_1\big(p,\alpha;\,D(\Lambda^2),E\big) \text{ est équivalent à} \\ e\in E \quad\text{et}\quad t^{\alpha-2}\displaystyle\int_0^t [G(\sigma)e+G(-\sigma)e-2e]\,d\sigma\in L^p(0,\infty;E)\,. \end{cases}$$

Supposons E réflexif, $1<p<\infty$; on a:

$$E'\subset D(\Lambda)'\subset D(\Lambda^2)'\,.$$

L'opérateur $G(t)$ étant continu de $D(\Lambda^2)$ dans lui même, on désigne par $K(t)$ le transposé de $G(t)$ dans $D(\Lambda^2)$:

$$K(t)\in \mathscr{L}\big(D(\Lambda^2)';\,D(\Lambda^2)'\big)\,.$$

On définit ainsi un groupe borné dans $D(\Lambda^2)'$; si Σ est le générateur infinitésimal de $K(t)$,

$$D(\Sigma)=D(\Lambda)' \quad\text{et}\quad \Sigma e'={}^t\Lambda e' \quad \big(\text{où } \Lambda\in\mathscr{L}(D(\Lambda^2);D(\Lambda))$$

donc

$${}^t\Lambda\in\mathscr{L}\big(D(\Lambda)';D(\Lambda^2)')\big)\,.$$

Alors

$$D\big(\Sigma^2\big)=E'\,.$$

D'après le Théorème 1.1, on a:

$$(5.17)\qquad S_0(p,\alpha;\, D(\Lambda^2),E)' = T_1^{(2)}(p',-\alpha,E';\, p',-\alpha,D(\Lambda^2)')$$

et

$$(5.18)\qquad S_1(p,\alpha;\, D(\Lambda^2),E)' = T_0^{(2)}(p',-\alpha,E';\, p',-\alpha,D(\Lambda^2)')\,.$$

Mais, d'après les remarques précédentes, on en déduit:

$$(5.19)\qquad S_0(p,\alpha;\, D(\Lambda^2),E)' = S_1(p',-\alpha;\, D(\Sigma^2),D(\Lambda^2)')$$

$$(5.20)\qquad S_1(p,\alpha;\, D(\Lambda^2),E)' = S_0(p',-\alpha;\, D(\Sigma^2),D(\Lambda^2)')$$

et par conséquent

THÉORÈME 5.3. *Soit $G(t)$ un groupe fortement continu et borné dans l'espace de Banach réflexif E, de générateur infinitésimal Λ; soit $K(t)$ le groupe transposé de $G(t)$ dans $D(\Lambda^2)$, de générateur infinitésimal Σ. Soit p avec $1<p<\infty$ et $\alpha+1/p=\theta\in\,]0,1[$. Le dual de l'espace $S_0(p,\alpha;\, D(\Lambda^2),E)$ coincide algébriquement et topologiquement avec l'espace $S_1(p',-\alpha;\, D(\Sigma^2), D(\Lambda^2)')$ des éléments $e'\in D(\Lambda^2)'$ tels que*

$$\|e'\|_{D(\Lambda^2)'} + \left(\int_0^\infty t^{(\alpha-2)p}\left\|\int_0^t [K(\sigma)e+K(-\sigma)e-2e]\,d\sigma\right\|_{D(\Lambda^2)'}^p dt\right)^{1/p} < \infty\,.$$

Le dual de $S_1(p,\alpha;D(\Lambda^2),E)$ coincide avec l'espace $S_0(p',-\alpha;D(\Sigma^2),D(\Lambda^2)')$ des $e'\in D(\Lambda)'$ tels que $\Sigma e' = {}^t\Lambda e'$ vérifie

$$t^{\alpha-1}\left(K(t)(\Sigma e')-\Sigma e'\right) \in L^p(0,\infty;\, D(\Lambda^2)')\,.$$

Notons maintenant que, d'après (5.15), toute forme linéaire continue sur $S_0(p,\alpha;\, D(\Lambda^2),E)$ peut s'écrire

$$L(e) = \langle f',e\rangle + M(\Lambda e),\qquad f'\in D(\Lambda)',\qquad M\in T(p,\alpha;\, D(\Lambda),E)'\,.$$

Mais on a vu que

$$T(p,\alpha;\, D(\Lambda),E)' = T(p',-\alpha;\, E',D(\Lambda)')$$

donc

$$L(e) = \langle f',e\rangle + \langle g',\Lambda e\rangle,\qquad g'\in T(p',-\alpha;\, E',D(\Lambda)')\subset D(\Lambda)\,,$$

et alors

$$L(e) = \langle f'+\Sigma g',e\rangle\,.$$

On obtient donc ceci: tout élément e' de $S_1(p',-\alpha;\, E',D(\Lambda^2)')$ peut s'écrire (de façon non unique)

$$e' = f'+{}^t\Lambda g',\qquad f'\in D(\Lambda)',\qquad g'\in T(p',-\alpha;\, E',D(\Lambda)')\,,$$

et réciproquement.

On peut encore énoncer (revenant à l'espace E): tout élément e de $S_1(p,\alpha;\, D(\Lambda^2),E)$ peut s'écrire (de façon non unique)

$$(5.21)\qquad e = f+\Lambda g, \qquad f \in D(\Lambda), \qquad g \in T(p,\alpha;\, D(\Lambda^2),D(\Lambda)),$$

et réciproquement.

Notons maintenant que $\Lambda - I$ est un isomorphisme de $D(\Lambda)$ sur E et de $D(\Lambda^2)$ sur $D(\Lambda)$, donc (par interpolation) de $T(p,\alpha;\, D(\Lambda^2),D(\Lambda))$ sur $T(p,\alpha;\, D(\Lambda),E)$.

On peut écrire (5.21) sous la forme

$$e = (f+g)+(\Lambda g-g) = f+g+h\,,$$
$$f \in D(\Lambda), \quad g \in T(p,\alpha;\, D(\Lambda^2),D(\Lambda)), \quad h \in T(p,\alpha;\, D(\Lambda),E)\,.$$

Donc

$$e \in T(p,\alpha;\, D(\Lambda),E)\,.$$

Réciproquement, si e est donné quelconque dans $T(p,\alpha;\, D(\Lambda),E)$, on peut l'écrire

$$e = (\Lambda-I)g, \qquad g = (\Lambda-I)^{-1}e \in T(p,\alpha;\, D(\Lambda^2),D(\Lambda))\,,$$

donc

$$e \in S_1(p,\alpha;\, D(\Lambda^2),E)\,.$$

Donc

$$S_1(p,\alpha;\, D(\Lambda^2),E) = T(p,\alpha;\, D(\Lambda),E)$$

algébriquement; l'identité topologique se vérifie de la même façon, donc

THÉORÈME 5.4. *Sous les hypothèses du Théorème* 5.3, *on a*

$$(5.22)\qquad S_1(p,\alpha;\, D(\Lambda^2),E) = T(p,\alpha;\, D(\Lambda),E)$$

algébriquement et topologiquement.

Il serait intéressant de savoir si ce résultat est encore vrai lorsque E n'est pas réflexif (et d'ailleurs, d'obtenir une démonstration directe de (5.22)).

L'extension au cas où l'on considère une famille de générateurs infinitésimaux de groupes commutatifs ne présente pas de difficulté particulière (nous examinerons ailleurs le cas — utile par exemple dans les problèmes aux limites pour les opérateurs paraboliques — où l'on considère une famille de générateurs infinitésimaux $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_\nu$ de semigroupes et $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_\mu$ de groupes, tous commutatifs).

BIBLIOGRAPHIE

1. N. Aronszajn, The Berkeley Conference, April 1960.
2. Babitch, *Le théorème du prolongement à la frontière*, Uspehi Mat. Nauk 8 (1953), 111–113.
3. A. V. Balakrishnan, *Representations of abstract Riesz potentials of the elliptic type*, Bull. Amer. Math. Soc. 64 (1958), 288–289.
4. A. P. Caldéron, *Intermediate spaces and interpolation.*
5. J. Dieudonné, *Sur le théorème de Lebesgue–Nikodym* V, Canadian J. Math. 3 (1951), 129–139.
6. C. Foias et J. L. Lions, *Sur certains théorèmes d'interpolation*, Acta Sci. Math. Szeged, à paraitre.
7. E. Gagliardo, *Interpolation d'espaces de Banach et applications* I, II, III, C. R. Acad. Sci. Paris 248 (1959), 1912–1914, 3388–3390, 3517–3518.
8. E. Gagliardo, *Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili*, Rend. Sem. Mat. Padova 27 (1957), 284–305.
9. E. Gagliardo, *Interpolazione di spazi di Banach e applicazioni* (Edizione Scientifiche), Genova, 1959.
10. E. Gagliardo, *Interpolazione di spazi di Banach e applicazioni*, Ricerche Mat. 9 (1960), 58–81.
11. E. Gagliardo, *Una struttura unitaria in diverse famiglie di spazi funzionali*, Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli 27 (1960), 3–5.
12. E. Gagliardo, *Ulteriori proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili*, Ricerche Mat. 8 (1959), 24–51.
13. E. Hille and R. S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups* (Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 31), Providence, 1957.
14. S. G. Krein, *Sur un théorème d'interpolation dans la théorie des opérateurs*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 130 (1960), 491–494.
15. S. G. Krein, *Sur la notion d'échelle normale d'espaces*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 132 (1960), 510–513.
16. J.-L. Lions, *Espaces intermédiaires entre espaces hilbertiens et applications*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R. P. Roumanie 50 (1958), 419–432.
17. J.-L. Lions, *Un théorème de traces; applications*, C. R. Acad. Sci. Paris 249 (1959), 2259–2261.
18. J.-L. Lions, *Théorèmes de trace et d'interpolation* I, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 13 (1959), 389–403.
19. J.-L. Lions, *Théorèmes de trace et d'interpolation* II, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 14 (1960), 317–331.
20. J.-L. Lions, *Sur certains théorèmes d'interpolation*, C. R. Acad. Sci. Paris 250 (1960), 2104–2106.
21. J.-L. Lions, *Une construction d'espaces d'interpolation*, C. R. Acad. Sci. Paris 251 (1960), 1851–1855.

21 bis. J.-L. Lions, *Properties of some interpolation spaces*, à paraitre.

22. J.-L. Lions et E. Magenes, *Problemi al contorno non omogenei* I et III, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 14 (1960), 269–308, et 15 (1961), 39–101.
23. J.-L. Lions et E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes* II, Ann. Inst. Fourier Grenoble 11 (1961), 137–178.
24. J.-L. Lions et E. Magenes, *Remarques sur les problèmes aux limites pour opérateurs paraboliques*, C. R. Acad. Sci. Paris 251 (1960), 269–308.

24 bis. J.-L. Lions and J. Peetre, *Inclusion and compactness theorems for trace spaces*, Comm. Pure Appl. Math., to appear.
25. L. Nirenberg, Cours de Pise, 1959.
26. J. Peetre, *Théorèmes de régularité pour quelques classes d'opérateurs différentiels*, Medd. Lunds Univ. Mat. Sem. 16 (1959), 1–122.
27. J. Peetre, *Dualité*, non publié.
28. R. S. Phillips, *On weakly compact subsets of a Banach space*, Amer. J. Math. 65 (1943), 108–136.
29. E. T. Poulsen, *Boundary values in function spaces*, submitted for publication in Math. Scand.
30. M. Riesz, *Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionnelles linéaires*, Acta. Math. 49 (1926), 465–497.
31. L. Schwartz, *Théorie des distributions à valeurs vectorielles* I et II, Ann. Inst. Fourier Grenoble 7 (1957), 1–139, et 8 (1958), 1–209.
32. E. M. Stein, *Interpolation of linear operators*, Trans. Amer. Math. Soc. 83 (1956), 482–492.
33. E. M. Stein and G. Weiss, *Interpolation of operators with change of measures*, Trans. Amer. Math. Soc. 87 (1958), 159–172.
34. G. O. Thorin, *Convexity theorems*, Medd. Lunds Univ. Mat. Sem. 9 (1948), 1–57.
35. A. Zygmund, *Trigonometrical series* I–II, Cambridge, 1959.

UNIVERSITÉ DE NANCY, FRANCE
ET
UNIVERSITÉ D'AARHUS, DANEMARK