MATH. SCAND. 9 (1961), 207–228

SUR UNE CERTAINE CLASSE D'ÉQUATIONS INTÉGRALES SINGULIÈRES

V. STENSTRÖM

Dans cet article je vais ajouter quelques remarques sur l'équation intégrale

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\alpha y)\, \varphi(y)\, dy$$

considérée dans un article antérieur [3]. Mon but essentiel est ici de montrer l'unicité de deux types de solutions et de donner, dans quelques cas particuliers, des développements, dits « canoniques », du noyau.

1. Sur un théorème de Carleman.

Nous allons d'abord montrer une généralisation simple d'un théorème démontré par Carleman ([1, voir p. 74–77]). A cet effet nous démontrons les deux lemmes suivants.

Lemme 1. *Soit $K(x)$ une fonction bornée dans chaque intervalle fini et telle que l'intégrale*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(t)t^k|\, dt < \infty$$

pour une constante $k \geqq 0$. On a alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(x+t)t^k|\, dt < A(k)\,|x|^k + B(k)$$

où A et B sont des constantes positives dépendant de k.

En effet, on a

Reçu le 17 juin, 1959.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |K(x+t)t^k|\, dt &= \int_{-\infty}^{\infty} |K(s)(s-x)^k|\, ds \\ &= \int_{-\infty}^{-|x|} |K(s)s^k(1-x/s)^k|\, ds + \int_{-|x|}^{|x|} |K(s)(s-x)^k|\, ds + \int_{|x|}^{\infty} |K(s)s^k(1-x/s)^k|\, ds \\ &< 2^k|x|^k \int_{-\infty}^{\infty} |K(s)|\, ds + 2^k \int_{-\infty}^{\infty} |K(s)s^k|\, ds \\ &= A(k)|x|^k + B(k)\,.\end{aligned}$$

Lemme 2. *Posons*

$$F(x,\beta) = \int_{\beta_0}^{\beta} (\alpha-\beta_0)^{n+1}(\beta-\alpha)^{n+1} \frac{e^{-ix\alpha}}{g(\alpha)}\, d\alpha$$

où x, β, β_0 sont des nombres réels quelconques, n un entier $\geqq 0$ et $g(\alpha) \neq 0$ pour des valeurs réelles de α. On a alors

$$F(x,\beta) = \underset{\pm\infty}{O}\,(|x|^{-n-2})$$

et

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x,\beta)x^{n+\varepsilon}|\, dx < \infty, \qquad 0 \leqq \varepsilon < 1\,.$$

Nous mettons pour abréger

$$\begin{aligned}\alpha-\beta_0 &= (\beta-\beta_0)t\,, \\ \beta-\alpha &= (\beta-\beta_0)(1-t)\,, \\ h(t) &= \frac{t^{n+1}(1-t)^{n+1}}{g\big(\beta_0+(\beta-\beta_0)t\big)}.\end{aligned}$$

On a donc

$$F(x,\beta) = (\beta-\beta_0)^{2n+3}e^{-ix\beta_0}\int_0^1 h(t)\,e^{-ixt(\beta-\beta_0)}\, dt\,,$$

et, comme on a $h^{(\nu)}(0) = h^{(\nu)}(1) = 0$ pour $\nu = 0, 1, \ldots, n$, on obtient par une suite d'intégrations partielles

$$F(x,\beta) = (\beta-\beta_0)^{2n+3}e^{-ix\beta_0}\left\{\left[\frac{e^{-ixt(\beta-\beta_0)}}{\big(-ix(\beta-\beta_0)\big)^{n+2}}\,\frac{d^{n+1}h(t)}{dt^{n+1}}\right]_0^1 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\big(ix(\beta-\beta_0)\big)^{n+2}}\int_0^1 e^{-ixt(\beta-\beta_0)}\,\frac{d^{n+2}h(t)}{dt^{n+2}}\, dt\right\} = \underset{\pm\infty}{O}\,(|x|^{-n-2})\,.$$

Nous dirons qu'une fonction $\varphi(x)$ est de *la classe* M_k, si elle a une majorante de la forme
$$A|x|^k + B ,$$
A, B des constantes $\geqq 0$.

THÉORÈME 1. *Supposons que la fonction* $K(t)$ *est bornée dans chaque intervalle fini et que l'intégrale*
$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(t)t^k| \, dt < \infty, \quad k \geqq 0 .$$
Si sa transformée de Fourier
$$g(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t) \, e^{-i\alpha t} \, dt \neq 0$$
pour des valeurs réelles de α, *l'équation*

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)\varphi(y) \, dy = 0 \tag{1}$$

n'admet pas d'autre solution de la classe M_k *que* $\varphi(y) \equiv 0$ *(presque partout).*

Multiplions l'équation (1) par la fonction $F(x,\beta)$ et intégrons par rapport à x. D'après les lemmes 1 et 2 on peut intervertir l'ordre d'intégration et on obtient pour $n = [k]$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \, dy \cdot \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{(\alpha-\beta_0)^{n+1} (\beta-\alpha)^{n+1}}{g(\alpha)} \, d\alpha \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} K(x-y) \, dx \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \, dy \cdot \int_{\beta_0}^{\beta} (\alpha-\beta_0)^{n+1} (\beta-\alpha)^{n+1} e^{-iy\alpha} \, d\alpha = 0 . \end{aligned} \tag{2}$$

Nous introduisons les fonctions analytiques

$$\Phi_1(z) = \int_{-\infty}^{0} e^{-izy} \varphi(y) \, dy, \qquad \operatorname{Im} z > 0 ,$$

$$\Phi_2(z) = -\int_{0}^{\infty} e^{-izy} \varphi(y) \, dy, \qquad \operatorname{Im} z < 0 ,$$

$$\Psi_1(z) = \int_{\beta_0}^{z} (z-\zeta)^{n+1} (\zeta-\beta_0)^{n+1} \Phi_1(\zeta) \, d\zeta, \qquad \operatorname{Im} z > 0 ,$$

$$\Psi_2(z) = \int_{\beta_0}^{z} (z-\zeta)^{n+1} (\zeta-\beta_0)^{n+1} \Phi_2(\zeta) \, d\zeta, \qquad \operatorname{Im} z < 0 .$$

Par des intégrations partielles on obtient

$$
\begin{aligned}
|\Phi_1(z)| &< \int_0^\infty e^{-y\,\mathrm{Im}\,z}(Ay^k+B)\,dy \\
&= \int_0^\infty e^{-y\,\mathrm{Im}\,z}\,(Ay^{n+\varepsilon}+B)\,dy \\
&= \frac{A(n+1-\varepsilon)(n-\varepsilon)\ldots(1-\varepsilon)}{(\mathrm{Im}\,z)^n}\int_0^\infty e^{-y\,\mathrm{Im}\,z}y^\varepsilon\,dy + \frac{B}{\mathrm{Im}\,z} \\
&= \frac{A_1}{(\mathrm{Im}\,z)^{1+n+\varepsilon}}\int_0^\infty e^{-t}t^\varepsilon\,dt + \frac{B_1}{\mathrm{Im}\,z} \\
&= \frac{C_1}{|\mathrm{Im}\,z|^{1+n+\varepsilon}} + \frac{B_1}{|\mathrm{Im}\,z|}, \qquad 0 \leqq \varepsilon < 1\,.
\end{aligned}
$$

De la même manière nous trouvons

$$|\Phi_2(z)| < \frac{C_1}{|\mathrm{Im}\,z|^{1+n+\varepsilon}} + \frac{B_1}{|\mathrm{Im}\,z|}.$$

La fonction

$$\int_{\beta_0}^{z} (z-\zeta)^{n+1}(\zeta-\beta_0)^{n+1}e^{-i\zeta y}\,d\zeta$$

a la majorante

$$\frac{C(1+|z|^{2n+3})}{1+|y|^{n+2}}$$

dans les domaines

$$y \leqq 0, \quad \mathrm{Im}\,z \geqq 0; \qquad y \geqq 0, \quad \mathrm{Im}\,z \leqq 0\,.$$

Il s'ensuit que les fonctions $\Psi_1(z)$, $\Psi_2(z)$ ont des valeurs limites continues sur l'axe réel. Selon (2) on a donc

$$\Psi_1(\beta)-\Psi_2(\beta) = 0, \qquad \Psi_i(\beta) = \lim_{z\to\beta}\Psi_i(z), \quad i = 1,2\,,$$

d'où l'on conclut que $\Psi_1(z)$, $\Psi_2(z)$ peuvent se prolonger analytiquement à travers l'axe réel et que l'un est le prolongement de l'autre. Comme nous avons de plus

$$\Psi_i(z) \underset{\pm\infty}{=} O\,(|z|^{2n+3}), \qquad i = 1,2\,,$$

il suit que les fonctions $\Psi_i(z)$ sont égales à un même polynôme du degré $2n+3$ au plus.

Nous avons

$$\Psi_1^{(n+2)}(z) = (n+1)!\,(z-\beta_0)^{n+1}\Phi_1(z)\,,$$

donc

$$\Phi_1(z) = \frac{a_0 z^{n+1}+a_1 z^n+\ldots+a_{n+1}}{(z-\beta_0)^{n+1}} = A_0+\frac{A_1}{z-\beta_0}+\ldots+\frac{A_{n+1}}{(z-\beta_0)^{n+1}}\,.$$

Comme $\Phi_1(z)\to 0$ quand $|\mathrm{Im}\, z|\to\infty$ il faut que $A_0=0$, et, comme $\Phi_1(z)$ est indépendant de β_0, on a aussi $A_1=\ldots=A_{n+1}=0$, c'est-à-dire $\Phi_1(z)\equiv 0$, et de même $\Phi_2(z)\equiv 0$. A l'aide du théorème de Fourier on en conclut que $\varphi(y)\equiv 0$.

2. Quelques propriétés de la fonction $G(x;\alpha)$ et de sa transformée de Fourier.

Nous désignerons par L la classe des fonctions qui sont absolument intégrables dans l'intervalle $(-\infty,\infty)$. Posons

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ixt}\,dt, \qquad g(0) = 1\,,$$

$$G(x;\alpha) = \prod_{\nu=0}^{\infty} g(\alpha^\nu x), \qquad x,\alpha \text{ réels}, \quad |\alpha| < 1\,,$$

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} G(t;\alpha)e^{-ixt}\,dt\,.$$

LEMME 3. *Supposons*

$$f(t)\in L, \qquad tf(t)\in L\,.$$

Alors le produit

$$\prod_{\nu=0}^{\infty} g(\alpha^\nu x)$$

est absolument convergent et la fonction $G(x;\alpha)$ est bornée dans $(-\infty,\infty)$. On a de plus

$$(*) \qquad \lim_{|x|\to\infty} G(x;\alpha) = 0\,.$$

En vertu de l'inégalité

$$|g(\alpha^\nu x)-1| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)(e^{i\alpha^\nu xt}-1)\,dt\right|$$

$$= 2\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\tfrac{1}{2}\alpha^\nu xt\; e^{\frac{1}{2}\alpha ixt}\,dt\right| < 2|\alpha^\nu x|\int_{-\infty}^{\infty}|tf(t)|\,dt\,,$$

il suit que le produit est absolument convergent.

Nous choisissons un nombre positif N tel qu'on ait

$$|g(x)| < \tfrac{1}{2} \qquad \text{pour} \qquad |x| > N$$

et un nombre positif $\nu_1(x)$, dépendant de x, où $|x| > N$, tel que $|\alpha^{\nu_1-1}x| \geqq N$, $|\alpha^{\nu_1}x| < N$. Si l'on pose

$$\max_{|x| \leqq N} |G(x;\alpha)| = M ,$$

on trouve

$$|G(x;\alpha)| = \prod_{\nu=0}^{\nu_1-1} g(\alpha^\nu x) \prod_{\nu=\nu_1}^{\infty} g(\alpha^\nu x) < (\tfrac{1}{2})^{\nu_1} M ,$$

où M ne dépend que de N, donc que du choix du nombre $\frac{1}{2}$. La fonction $G(x;\alpha)$ est bornée et on a (*) puisque $\nu_1 \to \infty$ quand $|x| \to \infty$.

Lemme 4. *Supposons* $f(t) \in L$, $tf(t) \in L$, $f'(t) \in L$ *et* $\lim_{|t|\to\infty} f(t) = 0$. *On a alors*

$$\lim_{|x|\to\infty} |x^k G(x;\alpha)| = 0 ,$$

où k est un nombre positif quelconque.

En effet, on a

$$|g(x)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{ixt}\, dt \right| = \left| \frac{i}{x} \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{ixt}\, dt \right| < \frac{1}{|x|} \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|\, dt ,$$

et par conséquent

$$|G(x;\alpha)| = \left| \prod_{\nu=0}^{m-1} g(\alpha^\nu x) \prod_{\nu=m}^{\infty} g(\alpha^\nu x) \right|$$

$$< \frac{1}{|\alpha|^{\frac{1}{2}m(m+1)} |x|^m} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|\, dt \right)^m |G(\alpha^m x;\alpha)|, \qquad m \geqq k ,$$

et

$$\lim_{|x|\to\infty} |x^m G(x;\alpha)| = \lim_{|x|\to\infty} |G(\alpha^m x;\alpha)| = 0 ,$$

d'après le lemme 3.

Lemme 5. *Supposons que*

$$t^n f(t) \in L, \qquad n = 0, 1, \ldots, m .$$

Alors des dérivées $G^{(n)}(x;\alpha)$, $n = 1, 2, \ldots, m$, existent et on a

$$\lim_{|x|\to\infty} |x^n \varphi(x)| = \lim_{|x|\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G^{(n)}(t;\alpha) e^{-ixt}\, dt = 0 .$$

En effet, on a

$$\left|\frac{dG(x;\alpha)}{dx}\right| = \left| i \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha^{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} tf(t) e^{i\alpha^{\nu}xt}\, dt \left(\prod_{\nu=0}^{\infty}{}' g(\alpha^{\nu}x)\right)\right|$$

$$< \frac{M \int_{-\infty}^{\infty} |tf(t)|\, dt}{1-|\alpha|},$$

où la série est uniformément convergente dans l'intervalle $(-\infty,\infty)$. De même

$$\frac{d^2G(x;\alpha)}{dx^2} = -\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha^{2\nu} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t) e^{i\alpha^{\nu}xt}\, dt \left(\prod_{\nu=0}^{\infty}{}' g(\alpha^{\nu}x)\right) -$$

$$- \sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} \alpha^{\nu+\mu} \int_{-\infty}^{\infty} tf(t) e^{i\alpha^{\nu}xt}\, dt \int_{-\infty}^{\infty} tf(t) e^{i\alpha^{\mu}xt}\, dt \left(\prod_{\nu=0}^{\infty}{}'' g(\alpha^{\nu}x)\right),$$

$$\left|\frac{d^2G(x;\alpha)}{dx^2}\right| < \frac{M}{1-\alpha^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |t^2 f(t)|\, dt + \left(\int_{-\infty}^{\infty} |tf(t)|\, dt\right)^2\right)$$

et ainsi de suite.

On a maintenant

$$\begin{aligned}(-ix)^n \varphi(x) &= (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} (-ix)^n e^{-ixt} G(t;\alpha)\, dt \\ &= (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d^n}{dt^n} e^{-ixt}\right) G(t;\alpha)\, dt \\ &= (-1)^n (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} G^{(n)}(t;\alpha) e^{-ixt}\, dt\,,\end{aligned}$$

d'où il suit que

$$\lim_{|x|\to\infty} |x^n \varphi(x)| = \lim_{|x|\to\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} G^{(n)}(t;\alpha) e^{-ixt}\, dt \right| = 0\,.$$

Corollaire. *Si $t^n f(t) \in L$ pour un nombre n entier positif quelconque la fonction $G(x;\alpha)$ a des dérivées de tout ordre et*

$$\lim_{|x|\to\infty} |x^n \varphi(x)| = 0, \qquad n = 0,1,2,\ldots\,.$$

3. Théorèmes d'unicité sur des solutions des équations intégrales données.

Lemme 6. *Soit m un entier positif,*

$$\psi(x) = \underset{\pm\infty}{O}(|x|^m), \tag{1}$$

et

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(n)}(x)\psi(x)\,dx = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{2}$$

On a alors

$$\psi(x) \equiv 0 .$$

En effet, posons

$$f(x) = (1+x^2)^m$$

et

$$\varphi_N(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\varphi^{(n)}(x) .$$

Selon l'hypothèse (2) on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_N(x,t)f(x)\psi(x)f^{-1}(x)\,dx = 0 ;$$

donc, d'après le théorème de Parseval,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\varphi_N(\cdot,t)f}(s)\ \widetilde{\psi f^{-1}}(s)\,ds = 0 ,$$

$\left(\tilde{f}\right.$ signifie la transformée de Fourier de $\left.f\right)$ où

$$\widetilde{\varphi_N(\cdot,t)f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{t^n}{n!}\varphi^{(n)}(x)\right) f(x)\,e^{-isx}dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{(-t)^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(f(x)\,e^{-isx}\right)dx\right.$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(f(x)\,e^{-isx}\right) = f(x-t)\,e^{-is(x-t)} .$$

En vertu de l'inégalité

$$\sum_{n=0}^{N} \left|\frac{(-t)^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(f(x)\,e^{-isx}\right)\right| < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|s|+2)^n}{n!}(m!)^2(1+|x|)^{2m} \tag{3}$$
$$= e^{|t|(|s|+2)}(m!)^2(1+|x|)^{2m} ,$$

que nous démontrerons ci-dessous, on a

$$\lim_{N\to\infty} \widetilde{\varphi_N(\cdot,t)f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)f(x-t)\,e^{-is(x-t)}\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t)f(x)\,e^{-isx}\,dx$$

et, par conséquent,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\varphi(\cdot+t)f}(s)\,\widetilde{\psi f^{-1}}(s)\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t)\psi(x)\,dx = 0$$

et, d'après le théorème 1, $\psi \equiv 0$.

Nous allons démontrer maintenant l'inégalité (3). On a

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-ixs}(1+x^2)^m\right) = \sum_{\nu=0}^{n} e^{-ixs}\left[(-is)^{n-\nu}\binom{n}{\nu}\frac{d^\nu}{dx^\nu}(1+x^2)^m\right].$$

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu}(1+x^2)^m = \sum_{\nu_1+\nu_2=\nu}\binom{\nu}{\nu_1} m(m-1)\ldots(m-\nu_1+1)m(m-1)\ldots$$
$$\ldots(m-\nu_2+1)i^{\nu_1+\nu_2}(-1)^{\nu_2}(1+ix)^{m-\nu_1}(1-ix)^{m-\nu_2},$$

donc

$$\left|\frac{d^\nu}{dx^\nu}(1+x^2)^m\right| < 2^\nu(m!)^2(1+|x|)^{2m},$$

$$\left|\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-ixs}(1+x^2)^m\right)\right| < (m!)^2(1+|x|)^{2m}\sum_{\nu=0}^{n}|s|^{n-\nu}\binom{n}{\nu}2^\nu$$
$$= (m!)^2(1+|x|)^{2m}(|s|+2)^n,$$

et, finalement,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(-t)^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-ixs}(1+x^2)^m\right)\right| < (m!)^2(1+|x|)^{2m}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(|s|+2)^n(|t|^n}{n!}$$
$$= (m!)^2(1+|x|)^{2m}e^{(|s|+2)|t|}.$$

THÉORÈME 2. *Supposons que la fonction*

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ixt}\,dt \neq 0$$

pour des valeurs réelles de x *et que les fonctions* $t^n f(t)$, $n=0,1,\ldots$, $f'(t)$ *appartiennent à la classe* L *et que, de plus,* $\lim_{|t|\to\infty} f(t)=0$.

Si alors $\psi_k(x)$ *est une solution de l'équation*

$$(1) \qquad \psi(x) = \lambda\int_{-\infty}^{\infty} f(y-\alpha x)\psi(y)\,dy, \qquad \alpha \text{ réel et } |\alpha| < 1,$$

qui satisfait à la condition

$$0 < a < |\psi_k(x)/x^k| < A < \infty, \qquad a,A \text{ des constantes},$$

pour des valeurs de x *suffisamment grandes, on a* $\psi_k(x)\equiv 0$ *pour*

$\lambda = \alpha^{-\nu}$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, $k \neq$ *nombre entier, et* $\psi_k(x) \equiv$ *polynôme du degré* k, k *un nombre entier* $\geqq 0$, *pour* $\lambda = \alpha^{-k}$.

En effet la fonction $\varphi^{(n)}(x)$,
où

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} G(t;\alpha) e^{-ixt}\, dt\,,$$

est une solution de l'équation transposée de (1) pour $\lambda = \alpha^{-n}$. Par un raisonnement bien connu on en conclut, à l'aide des lemmes 4 et 5, que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_k(x) \varphi^{(n)}(x)\, dx = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

k un nombre entier $\geqq 0$. Selon le théorème 1 on a donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_k(x) \varphi(x+t)\, dx = 0\,,$$

et comme $G(t;\alpha)$ pour α réel n'a pas de zéros réels il s'ensuit que $\psi_k(x) \equiv 0$.

Supposons ensuite que $\lambda = \alpha^{-n}$, n un entier $\geqq 0$, et que le polynôme $Q_n(x)$ du degré n est une solution de l'équation (1) pour cette même valeur de λ. On a alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q_k(x) \varphi^{(m)}(x)\, dx = 0, \quad \text{pour} \quad m \neq k\,,$$

et par conséquent

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\psi_k(x) - CQ_k(x)] \varphi^{(m)}(x)\, dx = 0, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

en attribuant à la constante C une valeur convenable. On a donc

$$\psi_k(x) = CQ_k(x)\,.$$

THÉORÈME 3. *Supposons que* $g(x) \neq 0$ *pour des valeurs réelles de* x *et que* $\varphi_k(x)$ *est une solution de l'équation*

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \alpha y) \varphi(y)\, dy, \quad \varphi_k \in L\,,$$

pour qui la transformée de Fourier $\overline{\varphi}_k(x)$ *existe au sens classique et tel que*

$$\lim_{x \to 0} x^{-k} \overline{\varphi}_k(x) = 1, \qquad k \text{ un nombre entier } \geqq 0\,.$$

On a alors $\lambda=\alpha^{-k}$ *et*

$$\varphi_k(x) = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} z^k G(z;\alpha)e^{-ixz}\,dz\,.$$

Mettons

$$\tilde{\varphi}_k(z) = z^k\psi(z) = \lambda\int_{-\infty}^{\infty} e^{izx}\,dx\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-\alpha y)\varphi_k(y)\,dy\right)$$

$$= \lambda\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{izt}\,dt\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_k(y)e^{iz\alpha y}\,dy$$

$$= \lambda g(z)(\alpha z)^k\psi(\alpha z) = \frac{\lambda G(z;\alpha)}{G(\alpha z;\alpha)}(\alpha z)^k\psi(\alpha z)\,.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{\psi(z)}{\psi(\alpha z)} = \lambda\alpha^k\frac{G(z;\alpha)}{G(\alpha z;\alpha)},$$

donc

$$\frac{\psi(z)}{\psi(\alpha^n z)} = (\lambda\alpha^k)^n\frac{G(z;\alpha)}{G(\alpha^n z;\alpha)}.$$

Or

$$\lim_{n\to\infty}\psi(\alpha^n z) = 1,\qquad \lim_{n\to\infty}G(\alpha^n z;\alpha) = 1$$

par conséquent

$$\psi(z) = G(z;\alpha)\lim_{n\to\infty}(\lambda\alpha^k)^n$$

et, comme on a $\psi(z)\not\equiv 0$,

$$\lambda = \alpha^{-k},\qquad \psi(z) = G(z;\alpha)\,,$$

$$\varphi_k(x) = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} z^k G(z;\alpha)e^{-ixz}\,dz = i^k\varphi^{(k)}(x)\,.$$

4. Développements des noyaux.

Nous allons chercher un développement du noyau $f(x-\alpha y)$ suivants les solutions $Q_n(y)$, $\varphi^{(n)}(x)$, en supposant la fonction entière $f(z)$ soumise aux conditions suivantes:

(1) $|f(z)| < K_1 e^{A|z|^{\omega_1}}$, $\omega_1 > 1$, dans tout le plan complexe,

(2) $|f(x)| < K_2 e^{-A|x|^{\omega_1}}$, sur l'axe réel,

et que sa transformée de Fourier

(3) $$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{itx}\,dt$$

n'a pas de zéros (réels ou complexes).

Il s'ensuit que ([3], voir p. 238)

$$|G(z;\alpha)| < K_4 e^{A_4|z|^\omega}, \quad 1/\omega+1/\omega_1 = 1, \quad \text{dans tout le plan complexe ,}$$

$$|G(x;\alpha)| < K_5 e^{-A_5|x|^\omega}, \quad \text{sur l'axe réel ,}$$

et, selon un théorème bien connu d'Hadamard,

$$|G(z;\alpha)| > K e^{-|z|^{\omega+\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0, \quad |z| > N/\varepsilon .$$

Comme les fonctions $g(z)$ et $G(z;\alpha)$ n'ont pas de zéros on peut les soumettre aux conditions suivantes:

(4) $|g(z)| \leqq e^{B_1|z|^\omega}, \quad |G(z;\alpha)| \leqq e^{B|z|^\omega}$, pour $|z|$ suffisamment grand ,

(5) $|g(x)| \leqq e^{-B_1|x|^\omega}, \quad |G(x;\alpha)| \leqq e^{-B|x|^\omega}$, sur l'axe réel ,

(6) $|g(z)| > e^{-B_1|z|^\omega}, \quad |G(z;\alpha)| > e^{-B|z|^\omega}$, pour $|z|$ suffisamment grand ,

où B est une constante positive, $B_1 = B(1-|\alpha|^\omega)$.

LEMME 7. *La série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-\alpha)^n \frac{Q_n(y)}{n!} \varphi^{(n)}(x), \qquad |\alpha| < 1 ,$$

est absolument et uniformément convergente pour x, y réels dans l'intervalle $-\infty < x < \infty$, $-R \leqq y \leqq R$, R arbitraire.

Nous avons

$$\frac{|Q_n(y)|}{n!} = \frac{1}{2\pi}\left| \int_{|z|=\varrho} \frac{e^{izy}\,dz}{G(z;\alpha)\,(iz)^{n+1}} \right| < \frac{e^{\varrho|y|+B\varrho^\omega}}{\varrho^n}, \tag{7}$$

où le dernier membre atteint son minimum pour $\varrho = \varrho_n$, ϱ_n la racine positive de l'équation

$$\varrho|y| + B\omega\varrho^\omega = n .$$

On a évidemment

$$\varrho_n < \left(\frac{n}{B\omega}\right)^{\omega^{-1}},$$

donc

$$\varrho_n|y| + B\varrho_n{}^\omega = \varrho_n|y| + \frac{n-\varrho_n|y|}{\omega}$$

$$= \frac{n}{\omega} + \frac{\varrho_n|y|}{\omega_1} < \frac{n}{\omega} + \frac{|y|}{\omega_1}\left(\frac{n}{B\omega}\right)^{\omega^{-1}}$$

et

$$\varrho_n{}^\omega = \frac{n}{B\omega} - \frac{\varrho_n|y|}{B\omega}$$

$$> \frac{n}{B\omega} - \frac{|y|}{B\omega}\left(\frac{n}{B\omega}\right)^{\omega^{-1}} = \frac{n}{B\omega}\left(1 - \frac{|y|}{B\omega}\left(\frac{B\omega}{n}\right)^{\omega_1^{-1}}\right) > 0\,,$$

pour y fixé et n suffisamment grand, $n > N(y)$. On a

$$\varrho_n{}^n > \left(\frac{n}{B\omega}\right)^{n/\omega}\left[1 - \frac{|y|}{B\omega}\left(\frac{B\omega}{n}\right)\right]^{(n/\omega)\omega_1^{-1}(n/\omega)^{\omega^{-1}}} > \left(\frac{n}{B\omega}\right)^{n/\omega} e^{-(|y|/\omega)(n/B\omega)^{\omega^{-1}}}$$

donc

$$\frac{e^{|y|\varrho_n + B\varrho_n{}^\omega}}{\varrho_n{}^n} < \frac{e^{n/\omega + (|y|/\omega_1)(n/B\omega)^{\omega^{-1}}}}{(n/B\omega)^{n/\omega} e^{-(|y|/\omega)(n/B\omega)^{\omega^{-1}}}} = \frac{e^{n/\omega + |y|(n/B\omega)^{\omega^{-1}}}}{(n/B\omega)^{n/\omega}}\,,$$

et, d'après (7),

$$\left|\frac{Q_n(y)}{n!}\right| < \frac{e^{n/\omega + |y|(n/B\omega)^{\omega^{-1}}}}{(n/B\omega)^{n/\omega}}.$$

Pour des valeurs réelles de x nous avons ensuite

$$\begin{aligned}
|\varphi^{(n)}(x)| &< (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} |t^n G(t;\alpha)|\,dt \\
&< K_1 \int_0^\infty t^n e^{-Bt^\omega}\,dt \\
&= K_1 B^{-n/\omega}\Gamma\left(\frac{n+1}{\omega}\right) \\
&< K_2 B^{-n/\omega}\left(\frac{n}{\omega} - \frac{1}{\omega_1}\right)^{n/\omega - \omega_1^{-1}} e^{-n/\omega + \omega_1^{-1}} n^{\frac{1}{2}} \\
&= K_2\left(\frac{n}{B\omega}\right)^{n/\omega}\left(\frac{n}{\omega}\right)^{-\omega_1^{-1}}\left(1 - \frac{\omega}{n\omega_1}\right)^{(n\omega_1/\omega)\,\omega_1^{-1} - \omega_1^{-1}} e^{-n/\omega + \omega_1^{-1}} n^{\frac{1}{2}} \\
&< K_3\left(\frac{n}{B\omega}\right)^{n/\omega}\left(\frac{n}{\omega}\right)^{-\omega_1^{-1}} e^{-n/\omega} n^{\frac{1}{2}}\,,
\end{aligned}$$

où K_i sont certaines constantes. On a par conséquent

$$\left|\frac{Q_n(y)}{n!}\varphi^{(n)}(x)\right| < K_3 e^{|y|(n/B\omega)^{\omega^{-1}}}\left(\frac{n}{\omega}\right)^{-\omega_1^{-1}} n^{\frac{1}{2}} \tag{8}$$

et

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{Q_n(y)\varphi^{(n)}(x)}{n!}\right|^{n^{-1}} = 1\,. \tag{9}$$

Le lemme 7 est donc démontré.

THÉORÈME 4. *Supposons que $G(z;\alpha)$ satisfont aux conditions* (4), (5), (6). *On a alors*

$$f(x-\alpha y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\alpha)^n \frac{Q_n(y)\varphi^{(n)}(x)}{n!}, \tag{10}$$

$$f_m(x-\alpha^m y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\alpha^m)^n \frac{Q_n(y)\varphi^{(n)}(x)}{n!}, \tag{10'}$$

et, pour le noyau résolvant,

$$\begin{aligned} R(x,y;\lambda) &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} f_n(x-\alpha^n y) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n Q_n(y)\varphi^{(n)}(x)}{(1-\lambda\alpha^n)n!}, \quad f_1 = f. \end{aligned} \tag{10''}$$

Mettons

$$F_N(x, y) = \sum_{n=0}^{N} (-\alpha)^n \frac{Q_n(y)\varphi^{(n)}(x)}{n!}.$$

Désignant par le symbole $\overline{F_N(\cdot,y)}(z)$ la transformée de Fourier de $F_N(x,y)$ par rapport à x on a

$$\overline{F_N(\cdot,y)}(z) = \left(\sum_{n=0}^{N} (i\alpha z)^n \frac{Q_n(y)}{n!}\right) \breve{\varphi}(z), \quad \breve{\varphi}(z) = G(z;\alpha).$$

Il s'ensuit que

$$\overline{F_N(\cdot,y)}(z) = (2\pi)^{-1} G(z;\alpha) \int_{\gamma} \sum_{n=0}^{N} \frac{(i\alpha z)^n e^{iyt}\, dt}{G(t;\alpha)(it)^{n+1}}, \quad |z| < |t|,$$

où γ est un cercle entourant l'origine, ([1], (10b)), donc

$$\begin{aligned} \overline{F_N(\cdot\,;y)}(z) \to (2\pi)^{-1}(G(z;\alpha) \int_{\gamma} \frac{e^{iyt} dt}{G(t;\alpha)(t-\alpha z)} &= \frac{G(z;\alpha)e^{i\alpha zy}}{G(\alpha z;\alpha)} \\ &= g(z)e^{i\alpha zy}, \quad \text{pour } N \to \infty. \end{aligned}$$

Si les fonctions $\psi(y)$ forment la classe schwartzienne S [2] le théorème de Parseval donne

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{F_N(\cdot,y)}(z)\, \psi(z)\, dz = \int_{-\infty}^{\infty} F_N(x,y) \breve{\psi}(x)\, dx,$$

d'où, pour $N \to \infty$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(z) e^{i\alpha zy} \psi(z)\, dz = \int_{-\infty}^{\infty} F(x,y) \breve{\psi}(x)\, dx$$

et

$$F(x,y) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} g(z) e^{-iz(x-\alpha y)}\, dz = f(x-\alpha y).$$

Pour avoir le développement du noyau $f_2(x-\alpha^2 y)$, nous multiplions les deux membres de l'égalité

$$f(s-\alpha y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\alpha)^n \frac{Q_n(y)}{n!} \varphi^{(n)}(s)$$

par $f(x-\alpha s)$ et intégrons par rapport à s. A cause de

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-\alpha s)\varphi^{(n)}(s)\, ds = \alpha^n \varphi^{(n)}(x)$$

on obtient donc

$$f_2(x-\alpha^2 y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\alpha^2)^n \frac{Q_n(y)}{n!} \varphi^{(n)}(x) .$$

On en conclut immédiatement que

$$f_m(x-\alpha^m y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\alpha^m)^n \frac{Q_n(y)}{n!} \varphi^{(n)}(x)$$

et que le développement (9) du noyau résolvant est valable.

Remarque. On peut aussi démontrer l'égalité (10) de la façon suivante. La série

$$F(x;y) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-\alpha)^n \frac{Q_n(y)}{n!} \varphi^{(n)}(x)$$

est absolument et uniformément convergente dans un intervalle arbitraire, fini $|x| < \infty$, $|y| < K$. On démontre de même que c'est le cas aussi pour les séries

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-\alpha)^n \frac{Q_n(y)}{n!} \varphi^{(n+1)}(x) ,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \sum_{n=1}^{\infty} (-\alpha)^n \frac{Q_{n-1}(y)}{n-1!} \varphi^{(n)}(x) = -\alpha \sum_{n=0}^{\infty} (-\alpha)^n \frac{Q_n(y)}{n!} \varphi^{(n+1)}(x),$$

d'où il suit que

$$\alpha \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0 .$$

$F(x,y)$ est donc une fonction du seul argument $x-\alpha y$.

La série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-\alpha)^n \frac{Q_n(y)}{n!} \varphi^{(n)}(x)$$

est uniformément convergente par rapport à α dans un intervalle $|\alpha| \leqq k < 1$. En effet,

$$G(z;\alpha) \to g(z) \quad \text{quand} \quad \alpha \to 0\,,$$

en vertue de

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1\,.$$

$$\frac{Q_n(y)}{n!} \to \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=k} \frac{e^{izy}\,dz}{g(z)\,(iz)^{n+1}} \quad \text{quand} \quad \alpha \to 0\,,$$

$$\varphi^{(n)}(x) \to f^{(n)}(x) \qquad \text{quand} \quad \alpha \to 0\,.$$

De plus l'évaluation (8) reste valable si l'on remplace B par B_1. Par conséquent on a

$$F(x,y)_{\alpha=0} = F(x-\alpha y)_{\alpha=0} = F(x) = f(x)\,,$$

d'où l'égalité (10).

On peut remarquer dans le cas trivial où l'on a $f(x)$ au lieu de $f(x-\alpha y)$ que les fonctions

$$\left(\frac{Q_n(y)}{n!}\right)_{\alpha=0} \qquad \text{et} \qquad f^{(n)}(x)$$

sont des solutions correspondant à $\lambda = 1$ $(n=0)$, $\lambda = \infty$ $(n>0)$.

Exemple. Prenons ici $f(t) = (\pi)^{-1}e^{-t^2}$. Ce cas se ramène facilement à la théorie des équations à noyau symétrique, le noyau étant symétrisable par multiplication de la fonction $e^{(1-\alpha^2)x^2}$,

$$e^{-(x-\alpha y)^2+(1-\alpha^2)x^2} = e^{-\alpha(x^2+y^2)+2\alpha xy}\,.$$

On obtient

$$g(x) = e^{-\frac{1}{4}x^2}, \qquad G(x;\alpha) = e^{\frac{1}{4}x^2(1-\alpha^2)^{-1}},$$

$$\varphi^{(n)}(x) = (1-\alpha^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}e^{-x^2(1-\alpha^2)}H_n\big(x(1-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}\big)\,,$$

$$Q_n(y) = (-\tfrac{1}{2})^n\frac{H_n\big(y(1-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}\big)}{(1-\alpha^2)^{\frac{1}{2}n}},$$

où H_n sont les polynômes d'Hermite. On a, par conséquent,

$$e^{-(x-\alpha y)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n(1-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}\frac{e^{-x^2(1-\alpha^2)}}{n!}H_n\big(x(1-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}\big)H_n\big(y(1-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}\big)\,,$$

formule qui se vérifie facilement.

Remarque. Si la fonction $h(y)\in L$, on peut, après avoir multiplié les deux membres de l'égalité (10) par cette fonction, intégrer terme par terme. Mettons

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-\alpha y)h(x)\,dx = k(y)\,.$$

On obtient

$$k(y) = \sum_{n=0}^{\infty}(-\alpha)^n a_n \frac{Q_n(y)}{n!}, \qquad a_n = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(n)}(x)h(x)\,dx\,.$$

$$\breve{k}(z) = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}{|\alpha|}\breve{h}(z)g(-z/\alpha), \quad \text{donc} \quad h(x) = \frac{1}{2\pi|\alpha|}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\breve{k}(z)\,e^{-izx}}{g(-z/\alpha)}\,dz\,.$$

On en conclut:

La fonction $k(y)$ est développable dans une série absolument convergente dans l'intervalle $(-\infty,\infty)$ suivant les polynômes $Q_n(y)$ si la fonction

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\breve{k}(z)\,e^{-ixz}}{g(-z/\alpha)}\,dz \in L\,.$$

Nous considérons maintenant le cas où la fonction $g(z)$ a des zéros complexes z_m. La fonction $G(z;\alpha)$ a donc les zéros z_m/α^n. Pour simplifier les formules nous supposons de plus que les zéros sont *simples*. Nous les indiquons de manière que

$$|z_1| \leqq |z_2| \leqq |z_3| \leqq \ldots\,.$$

Pour pouvoir maintenir les hypothèses (4), (5), (6) nous supposons que l'exposant de convergence de la suite $|z_1|, |z_2|, |z_3|, \ldots$ est $\leqq \omega$ et nous excluons, en vue de l'hypothèse (6), du plan de z les cercles

$$|z-z_\nu| < \frac{1}{|z_\nu|^{p+\varepsilon}}, \qquad p \geqq \omega, \quad \varepsilon > 0\,.$$

Soit D la partie restante du plan.

L'inégalité (8) est obtenue par une évaluation du minimum de l'expression

$$\frac{e^{|\varrho y|+B\varrho^\omega}}{\varrho^n},$$

atteint pour $\varrho=\varrho_n$, où ϱ_n est la racine positive de l'équation

$$\varrho|y| + B\omega\varrho^\omega = n\,.$$

Si le cercle $|z|=\varrho_n$ sort du domaine D il faut échanger ϱ_n contre une valeur ϱ_n' de sorte que le cercle $|z|=\varrho_n'$ reste dans ce domaine et que l'inégalité

$$(2\pi)^{-1}\left|\int\limits_{|z|=\varrho_n'} \frac{e^{izy}\,dz}{G(z;\alpha)(iz)^{n+1}}\right| < K\frac{e^{n/\omega+|y|(n/B\omega)^{\omega-1}}}{(n/B\omega)^{n/\omega}}, \qquad K \text{ une constante,}$$

soit valable à partir d'une certaine valeur de l'indice n. A cet effet nous supposons que la distribution des zéros z_n satisfait à la condition suivante:

Si $|z_{m-1}| < |z_m| = \ldots = |z_{m+k-1}| < |z_{m+k}|$ on a

$$|z_{m+k}| - \frac{1}{|z_{m+k}|^p} > |z_m| + \frac{1}{|z_m|^p}. \tag{11}$$

Si le cercle $|z| = \varrho_n$ entre par exemple dans l'intérieur du cercle

$$|z - z_m| = 1/z_m^{p+\varepsilon}$$

on peut remplacer ϱ_n par $\varrho_n' = |z_m| + 1/|z_m|^p$. On a donc

$$\big|\varrho_n - |z_m|\big| < 1/z_m^{p+\varepsilon}, \qquad \big|\varrho_n' - |z_m|\big| < 1/|z_m|^p,$$

d'où il suit que

$$|\varrho_n' - \varrho_n| < 2/|z_m|^p.$$

En vertu de

$$\varrho_n \sim (n/B\omega)^{\omega^{-1}}$$

on a donc

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\varrho_n'}{\varrho_n}\right)^n = 1,$$

et par conséquent, pour n suffisamment grand,

$$\frac{e^{\varrho'_n|y|+B'\varrho_n'^{\omega}}}{\varrho_n'^{n}} < K\frac{e^{n/\omega+|y|(n/B\omega)^{\omega-1}}}{(n/B\omega)^{n/\omega}}, \qquad K \text{ une constante}.$$

Nous avons maintenant

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=\varrho'_n} \frac{e^{izy}\,dz}{G(z;\alpha)(iz)^{n+1}}\right| = \left|\frac{Q_n(y)}{n!} + \sum_{|z_\nu|<\varrho'_n} \frac{e^{iz_\nu y}}{G'(z_\nu;\alpha)(iz_\nu)^{n+1}}\right| \tag{12}$$

$$< K\frac{e^{n/\omega+|y|(n/B\omega)^{\omega-1}}}{(n/B\omega)^{n/\omega}},$$

ce qui donne le motif de considérer la série

$$\sum_{n=0}(-\alpha)^n\left(\frac{Q_n(y)}{n!} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{e^{iz_\nu y}}{G'(z_\nu;\alpha)(iz)^{n+1}}\right)\varphi^{(n)}(x). \tag{13}$$

Cette série est absolument et uniformément convergente pour x, y réels dans l'intervalle $-\infty < x < \infty$, $-R < y < R$, R arbitraire, et pour $|\alpha| \leqq k < 1$, en supposant que

$$(14) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{|z|=r_n} \frac{e^{izy}\,dz}{G(z;\alpha)(iz)^{m+1}}, \quad m = -1,0,1,2,\ldots,$$

existe, où les cercles $|z| = r_n$ sont situés dans D et tendent vers l'infini avec n.

Voici, comme exemple, un cas où cette condition est satisfaite. En vertu de la supposition que le genre du produit canonique de $G(z;\alpha)$ est plus petit que le genre de $G(z;\alpha)$ il y a des domaines angulaires où on a

$$|G(z;\alpha)| > e^{k|z|^\omega}, \qquad k \text{ une constante positive,}$$

pour z suffisamment grand et appartenant au domaine D. Si alors les zéros z_n, à partir d'un certain rang, sont tous situés dans ces domaines angulaires, l'hypothèse est évidemment remplie.

Les séries

$$(15) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{iz_\nu x}}{G'(z_\nu;\alpha)(iz_\nu)^{n+1}}, \qquad n = -1,0,1,2,\ldots,$$

sont donc convergentes, et nous allons évaluer les restes

$$\sum_{|z_\nu|>\varrho'_n} \frac{e^{iz_\nu y}}{G'(z_\nu;\alpha)(iz_\nu)^{n+1}}.$$

On peut mettre

$$\left|\frac{e^{iz_\nu y}}{G'(z_\nu;\alpha)}\right| < K, \qquad y \text{ fixé},$$

et on obtient, pour n suffisamment grand,

$$\sum_{|z_\nu|>\varrho'_n} \left|\frac{e^{iz_\nu y}}{G'(z_\nu;\alpha)z_\nu^{n+1}}\right| < \frac{K}{\varrho_n'^{\,n+1-\omega}} \sum_{|z_\nu|>\varrho'_n} |z_\nu|^{-\omega}$$
$$< \frac{KK_1(n/B\omega)^{\omega_1-1} e^{|y|(n/B\omega)^{\omega-1}}}{(n/B\omega)^{n/\omega}},$$

donc

$$\left|\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{iz_\nu y}}{G'(z_\nu;\alpha)z_\nu^{n+1}}\right| < K_2(n/B\omega)^{\omega_1-1} \frac{e^{n/\omega+|y|(n/B\omega)^{\omega-1}}}{(n/B\omega)^{n/\omega}}.$$

On trouve donc, d'après (8) et (9), que les séries (15) sont absolument et uniformément convergentes dans l'intervalle $-\infty < x < \infty$, $-R < y < R$, $|\alpha| < k < 1$.

Mettons

$$(16) \qquad F(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\alpha)^n \left(\frac{Q_n(y)}{n!} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{iz_\nu y}}{G'(z_\nu;\alpha)(iz_\nu)^{n+1}}\right) \varphi^{(n)}(x).$$

Il s'ensuit que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-\alpha)^n \left(\frac{Q_n(y)}{n!} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{iz_\nu y}}{G'(z_\nu;\alpha)(iz_\nu)^{n+1}}\right) \varphi^{(n+1)}(x)\,,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\alpha \sum_{n=0}^{\infty}(-\alpha)^n \left(\frac{Q_n(y)}{n!} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{iz_\nu y}}{G'(z_\nu;\alpha)(iz_\nu)^{n+1}}\right) \varphi^{(n+1)}(x) + \\ + \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{iz_\nu y}}{G'(z_\nu;\alpha)}\right)\varphi(x)\,,$$

en vertu de la convergence uniforme des séries des membres droits. La fonction $F(x,y)$ satisfait donc à l'équation

$$\alpha \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{iz_\nu y}}{G'(z_\nu;\alpha)}\right)\varphi(x)\,,$$

dont la solution générale peut se mettre sous la forme

$$F(x,y) = h(x-\alpha y) + \left(\int_0^y \varphi(\alpha t + x_0)\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{iz_\nu t}}{G'(z_\nu;\alpha)}\right) dt\right)_{x_0 = x-\alpha y}. \tag{17}$$

En comparant les expressions (16), (17) de $F(x,y)$ on obtient pour $\alpha = 0$

$$\left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{iz_\nu y}}{g'(z_\nu)\,iz_\nu}\right) f(x) = h(x) + \left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{e^{iz_\nu y}}{g'(z_\nu)\,iz_\nu} - \frac{1}{g'(z_\nu)\,iz_\nu}\right)\right) f(x)\,,$$

d'où

$$h(x) = \left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{g'(z_\nu)\,iz_\nu}\right) f(x)\,.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant.

Théorème 5. *Si la fonction $G(z;\alpha)$ satisfait aux conditions*

$|G(z;\alpha)| \leqq e^{B|z|^\omega}$, *pour $|z|$ suffisamment grand,*
$|G(x;\alpha)| \leqq e^{-B|x|^\omega}$, *sur l'axe réel ,*
$|G(z;\alpha)| > e^{-B|z|^\omega}$, *pour $|z|$ suffisamment grand dans le domaine D,*

et si, de plus, les zéros z_n de cette fonction sont distribués de sorte qu'on a

$$|z_{m+k}| - \frac{1}{|z_{m+k}|^p} > |z_m| + \frac{1}{|z_m|^p}, \quad \text{pour } |z_{m+k}| > |z_m|\,,$$

et que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|z|=r_n} \frac{e^{izy}\,dz}{G(z;\alpha)\,z^{m+1}}, \qquad m = -1,0,1,2,\ldots\,,$$

existe, alors on a

$$f(x-\alpha y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-\alpha)^n\left(\frac{Q_n(y)}{n!}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{e^{iz_\nu y}}{G'(z_\nu;\alpha)(iz_\nu)^{n+1}}\right)\varphi^{(n)}(x)-\right.$$
$$\left.-\left(\int_0^y\varphi(\alpha t+x_0)\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{e^{iz_\nu t}}{G'(z_\nu;\alpha)}\right)dt\right)_{x_0=x-\alpha y}\right)\cdot\left(1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{g'(z_\nu)iz_\nu}\right)^{-1}.$$

Remarque. Si l'égalité

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(y-\alpha x)\left(\lim_{n\to\infty}\int_{|z|=r_n}\frac{e^{izy}\,dz}{G(z;\alpha)(iz)^{m+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(y-\alpha x)\int_{|z|=r_n}\frac{e^{izy}\,dz}{G(z;\alpha)(iz)^{m+1}}$$

est valable, la fonction

$$\lim_{n\to\infty}\int_{|z|=r_n}\frac{e^{izy}\,dz}{G(z;\alpha)(iz)^{m+1}},\qquad m=0,1,\ldots,$$

est une solution de l'équation

$$\psi(x)=\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(y-\alpha x)\psi(y)\,dy\qquad\text{pour}\quad\lambda=\alpha^{-m}.$$

On le voit immédiatement en substituant $y-\alpha x=s$ dans l'intégrale du membre droit. On obtient alors

$$\int_{|z|=r_n}\frac{e^{i\alpha zx}}{G(z;\alpha)}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(s)\,e^{izs}\,ds\right)dz=\int_{|z|=r_n}\frac{e^{i\alpha z}g(z)\,dz}{G(z;\alpha)(iz)^{m+1}}$$
$$=\alpha^m\int_{|z|=r_n}\frac{\alpha e^{i\alpha zx}\,dz}{G(\alpha z;\alpha)(i\alpha z)^{m+1}}=\alpha^m\int_{|z|=|\alpha|r_n}\frac{e^{izx}\,dz}{G(z;x)(iz)^{m+1}}.$$

Exemple. Comme un exemple simple auquel la théorie ci-dessus est applicable on peut choisir

$$f(t)=\pi^{-\frac{1}{2}}e^{-t^2}(1-t).$$

On en obtient

$$g(z)=e^{-z^2/4}(1-\tfrac{1}{2}ix)\quad\text{et}\quad G(z;\alpha)=e^{z^2/4(1-\alpha^2)}\prod_{\nu=0}^{\infty}(1-\tfrac{1}{2}i\alpha^\nu x).$$

La série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{e^{iz_\nu y}}{G'(z_\nu;\alpha)(iz_\nu)^{n+1}}\equiv\frac{2i}{\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-\alpha^\nu)}\left[\frac{e^{2y-(1-\alpha^2)^{-1}}}{2^{n+1}}+\right.$$
$$\left.+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{e^{2\alpha^{-\nu}y-\alpha^{-2\nu}(1-\alpha^2)^{-1}}\alpha^{\frac{1}{2}\nu(\nu-1)}\alpha^{\nu(n+1)}}{(-1)^\nu\prod_{\mu=1}^{\nu}(1-\alpha^\mu)2^{n+1}}\right].$$

est évidemment convergente.

BIBLIOGRAPHIE

1. T. Carleman, *L'intégrale de Fourier et questions qui s'y rattachent* ((Publ. Sci. de l'Institut Mittag-Leffler 1), Uppsala, 1944.
2. I. M. Gel'fand and G. E. Šilov, *Fourier transforms of rapidly increasing functions and questions of the uniqueness of the solution of Cauchy's problem,* Amer. Math. Soc. Transl. Series 2, Vol. 5 (1957), 221–274.
3. V. Stenström, *Sur une certaine classe d'équations intégrales singulières,* Math. Scand. 6 (1958), 263–272.

THE ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY, STOCKHOLM, SWEDEN