MATH. SCAND. 9 (1961), 359–371

ABBILDUNGEN VOM HILBERT-SCHMIDTSCHEN TYPUS UND IHRE ANWENDUNGEN

KRZYSZTOF MAURIN

Einführung

Die Theorie der abstrakten Eigenfunktionsentwicklungen ist seit der Abhandlung von Gelfand–Kostjučenko ([6], 1955) immer mehr verallgemeinert worden ([2]–[7]); dabei wurden die Beweise immer einfacher. In einer interessanten Note hat Berezanskij [2] bemerkt, dass viele der oben erwähnten Ergebnisse sich durch eine Anwendung der Hilbert–Schmidtschen Operatoren einfach herleiten lassen. Das gab u.a. Anregung zu den Untersuchungen der vorliegenden Abhandlung.

Im ersten Abschnitt dieser Arbeit werden *Hilbert–Schmidtsche Abbildungen* zwischen zwei Hilberträumen E und F eingeführt, die sich im Falle $E=F$ auf die wohlbekannten Hilbert–Schmidtschen Operatoren reduzieren. Auch werden dort die Eigenschaften dieser Abbildungen studiert; es wird u.a. bewiesen, dass das Produkt zweier Hilbert–Schmidtschen Abbildungen nuklear ist.

Im Abschnitt 2 betrachten wir den Raum $H^k(\Omega)$ aller komplexen Funktionen, deren Ableitungen bis zur Ordnung k in einem offenen Gebiet Ω des euklidischen Raumes E^N quadratisch integrierbar sind. Es wird im Falle $2m>N$ bewiesen, dass (Ω beschränkt und regulär berandet) die Sobolevschen Einbettungen

$$H^{m+k}(\Omega) \to H^k(\Omega)$$

Hilbert–Schmidtsche Abbildungen sind. Diese Tatsache ermöglicht im 3. Abschnitt einen einfachen Beweis eines Satzes von Browder [4].

Im Abschnitt 4 wird dann der Hauptsatz über abstrakte Eigenfunktionsentwicklungen bewiesen. Durch Verbindung dieses Satzes mit den Ergebnissen des Abschnitts 2 werden schliesslich im letzten Abschnitt Verschärfungen interessanter Sätze von Berezanskij [2], Browder [4], Gelfand–Kostjučenko [6], Gårding [7] u.a. bewiesen.

Über diese Ergebnisse wurde bereits auf dem 2. Ungarischen Mathematischen Kongress (Budapest, September 1960) und der Banach-Kon-

Eingegangen am 31. Januar 1961.

ferenz (Jabłonna, September 1960) kurz berichtet. — Zu grossem Dank bin ich Herrn Professor Lars Gårding verpflichtet, der das Manuskript kritisch durchgesehen hat.

1. Hilbert-Schmidtsche Abbildungen.

Wir betrachten lineare Abbildungen, die Elemente eines separablen Hilbertschen Raumes E in Elemente eines separablen Raumes F überführen. (Im Falle $E=F$ handelt es sich also um gewöhnliche lineare Operatoren eines separablen Hilbertschen Raumes, und auf Grund der Isomorphie zweier separablen Hilberträume existiert natürlich im abstrakten Sinne kein Unterschied zwischen »Abbildungen« und »Operatoren«. Es wird sich aber zeigen, dass unsere Terminologie zweckmässig ist). Wir werden eine wichtige Klasse von solchen Abbildungen charakterisieren, die sich im Falle $E=F$ auf die Klasse Hilbert–Schmidtscher Operatoren reduziert und die wir deshalb die Klasse der Hilbert–Schmidtschen Abbildungen (kurz H.S.-Abbildungen) nennen werden. Es wird sich zeigen, dass H.S.-Abbildungen etwas allgemeiner sind als nukleare Abbildungen aber spezieller als vollstetige. Auch wird bewiesen, dass durch Superposition einer stetigen und einer H.S.-Abbildung wieder eine H.S.-Abbildung entsteht und dass das Produkt zweier H.S.-Abbildungen sogar nuklear ist.

Wir betrachten in der ganzen Arbeit nur separable Hilberträume; oft wird diese Voraussetzung nicht ausgeschrieben.

Im folgenden sind E und F zwei Hilbertsche Räume, $\{e_i\}$ und $\{f_k\}$ sind vollständige orthonormale Systeme (v.o.S.) in E bzw. F, und $(\cdot,\cdot)_E, \|\cdot\|_E$, u.s.w. bezeichnen Skalarprodukt und Norm im entsprechenden Raum.

Es sei jetzt A eine lineare Abbildung von E in F:

$$E \ni u \to Au \in F\ .$$

Ist A stetig, d.h. ist $\|A\| = \sup \|Au\|_F / \|u\|_E < \infty$, wird die zu A adjungierte Abbildung A^* von F auf E durch die Identität

$$(1.1) \qquad (Au,v)_F = (u,A^*v)_E, \qquad u \in E, \quad v \in F\ ,$$

erklärt.

Wir definieren so die Zahlen

$$(1.2) \qquad \begin{aligned} |A|^2 &= \textstyle\sum_i \|Ae_i\|_F{}^2\ , \\ |A^*|^2 &= \textstyle\sum_k \|A^*f_k\|_E\ . \end{aligned}$$

Lemma 1. *Es sei die Abbildung A von E auf F linear und stetig. Dann sind $|A|$ und $|A^*|$ von den Ortogonalsystemen in* (1.2) *unabhängig, und es gilt*

$$(1.3) \qquad |A| = |A^*|\ .$$

Beweis. Es gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned}|A|^2 = \textstyle\sum_i \|Ae_i\|_F^2 &= \textstyle\sum_i\sum_k |(Ae_i, f_k)_F|^2 \\ &= \textstyle\sum_k\sum_i |(e_i, A^*f_k)_E|^2 \\ &= \textstyle\sum_k \|A^*f_k\|_E^2 = |A^*|^2 .\end{aligned}$$

Da das erste Glied von $\{f_k\}$ und das letzte von $\{e_i\}$ unabhängig ist, folgt die Behauptung. Speziell folgt also, dass die Zahlen $|A|$ und $|A^*|$ entweder beide endlich sind oder sie sind beide $= \infty$.

Satz 1. *Es sei A eine lineare Abbildung von E in F und es sei $|A| < \infty$. Dann ist A stetig, und es gilt die Ungleichung*

$$\|A\| \leqq |A| = |A^*| . \tag{1.4}$$

Beweis. Wir betrachten solche $u = \sum_i a_i e_i$ in E, wo höchstens endlich viele a_i von Null verschieden sind. Dann ist

$$\begin{aligned}\|Au\|_F^2 = \|\textstyle\sum_i a_i Ae_i\|_F^2 &\leqq (\textstyle\sum_i |a_i| \, \|Ae_i\|_F)^2 \leqq \\ &\leqq \textstyle\sum_i |a_i|^2 \sum_i \|Ae_i\|_F^2 = |A|^2 \, \|u\|_E^2 .\end{aligned}$$

Daraus folgt auch für allgemeine $u \in E$

$$\|Au\|_F \leqq |A| \, \|u\|_E , \tag{1.5}$$

und der Beweis ist fertig.

Wir sind jetzt imstande, H.S.-Abbildungen zu definieren:

Definition. *Die lineare Abbildungen A, die die Voraussetzungen des Satzes* 1 *erfüllen, werden Hilbert-Schmidtsche (H.S.) genannt. Die Zahl $|A|$ heisst H.S.-Norm.*

Es gilt der einfache

Satz 2. *Produkt endlich vieler stetigen Abbildungen, von denen mindestens eine H.S. ist, ist wieder H.S.*

Beweis. Es genügt offenbar, den Satz für das Produkt von zwei Abbildungen zu beweisen. Es seien also E, F und G drei Hilberträume und A und B zwei stetige Abbildungen:

$$E \overset{A}{\to} F \overset{B}{\to} G .$$

Dann sind

$$|BA| \leqq |B| \, \|A\| , \tag{1.6}$$

$$|BA| \leqq |A| \, \|B\| , \tag{1.7}$$

und $|BA|$ ist also endlich falls $|A|$ oder $|B|$ endlich ist. Man hat nämlich

$$\begin{aligned}|BA|^2 = \textstyle\sum_i \|BAe_i\|_G{}^2 &= \textstyle\sum_i \|B(Ae_i)\|_G{}^2 \\ &\leqq \textstyle\sum_i \|B\|^2 \, \|Ae_i\|_F{}^2 \\ &= \|B\|^2 \, |A|^2 \, ,\end{aligned}$$

woraus mit Hilfe von (1.3) auch (1.7) folgt, weil

$$|BA|^2 = |(BA)^*|^2 = |A^*B^*|^2 \leqq |B^*|^2 \, \|A^*\|^2 = |B|^2 \, \|A\|^2 \, .$$

Dass jede H.S.-Abbildung vollstetig ist, sieht man unmittelbar (genau so wie bei den Hilbert-Schmidtschen Operatoren), und es ist wohlbekannt, dass ein vollstetiger Operator nicht Hilbert-Schmidtsch zu sein braucht. Wir werden jetzt die Relationen zwischen H.S.-Abbildungen und *nuklearen Abbildungen* begründen, und geben deshalb zuerst die Definition einer nuklearen Abbildung.

Die Abbildung A von E auf F wird nuklear genannt, wenn die folgende Voraussetzung erfüllt ist. Es existieren zwei Funktionenfolgen $\{g_i\}$ und $\{h_i\}$ mit Elementen aus E bzw. F, derart dass für jedes u in E das Bildelement Au durch

$$Au = \textstyle\sum_i (u, g_i)_E h_i, \qquad g_i \in E, \quad h_i \in F \, , \tag{1.8}$$

gegeben ist, wobei

$$\textstyle\sum_i \|g_i\|_E \, \|h_i\|_F < \infty \, . \tag{1.9}$$

Wir zeigen zuerst, dass jede nukleare Abbildung H.S. ist. Ist nämlich $\{e_k\}$ ein v.o.S. in E, so hat man

$$\|Ae_k\|_F{}^2 = \|\textstyle\sum_i (e_k, g_i)_E h_i\|_F{}^2 \leqq \left(\textstyle\sum_i |(e_k, g_i)_E| \, \|h_i\|_F\right)^2 .$$

Ohne die Gültigkeit von (1.9) zu stören, können wir immer die Funktionen $\{g_i\}$ und $\{h_i\}$ derart normieren, dass $\|g_i\|_E{}^2 = \|h_i\|_F{}^2 = p_i$. Dann folgt wegen (1.9)

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_k \|Ae_k\|_F{}^2 &\leqq \textstyle\sum_k \left(\sum_i |(e_k, g_i)_E| \, \|h_i\|_F\right)^2 \\ &\leqq \textstyle\sum_k \left\{\sum_i |(e_k, g_i)_E|^2 \sum_i \|h_i\|_F{}^2\right\} \\ &= \textstyle\sum_i \|h_i\|_F{}^2 \left\{\sum_i \sum_k |(e_k, g_i)_E|^2\right\} \\ &= \textstyle\sum_i \|h_i\|_F{}^2 \sum_i \|g_i\|_E{}^2 \\ &= \left(\textstyle\sum_i p_i\right)^2 < \infty \, .\end{aligned}$$

Eine H.S.-Abbildung braucht dagegen nicht nuklear zu sein. Um das einfach zu zeigen, nehmen wir an, dass $\{e_i\}$ und $\{f_k\}$ v.o.S. in E bzw. F sind, und erklären die Abbildung A durch

$$Ae_i = a_i f_i \, ,$$

mit

$$\textstyle\sum_i |a_i|^2 < \infty, \qquad \sum_i |a_i| = \infty \, . \tag{1.10}$$

Dann ist A offenbar H.S. Wäre A auch nuklear, dann wäre

$$Ae_i = a_i f_i = \sum_k (e_i, g_k)_E h_k$$

mit

$$\sum_k \|g_k\|_E \, \|h_k\|_F < \infty .$$

Also wäre

$$\begin{aligned} \sum_i |a_i| &= \sum_i |(a_i f_i, f_i)_F| \\ &= \sum_i \left| \sum_k (e_i, g_k)_E (h_k, f_i)_F \right| \\ &\leqq \sum_k \left\{ \sum_i |(e_i, g_k)_E|^2 \sum_i |(h_k, f_i)_F|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \sum_k \|g_k\|_E \|h_k\|_F < \infty , \end{aligned}$$

was aber der Voraussetzung (1.10) widerspricht. Also ist A nicht nuklear.

Die Zusammensetzung zweier H.S.-Abbildungen ist aber immer nuklear:

Satz 3. *Es seien E, F und G Hilbertsche Räume und A und B zwei H.S.-Abbildungen:*

$$E \xrightarrow{A} F \xrightarrow{B} G .$$

Dann ist die Abbildung $B \circ A$ von E auf G nuklear.

Beweis. Wie früher sind $\{e_i\}$ und $\{f_k\}$ vollständige Orthogonalsysteme in E bzw. F. Dann gilt für jedes u in E

$$u = \sum_i (u, e_i)_E e_i, \qquad Au = \sum_k (Au, f_k)_F f_k ,$$

und folglich

$$(B \circ A)u = B(Au) = \sum_k (Au, f_k)_F Bf_k = \sum_k (u, A^* f_k)_E Bf_k ,$$

und rechts steht hier ein Ausdruck in der gewünschten Form (1.8). Dass auch (1.9) erfüllt ist, zeigt die Ungleichung

$$\sum_k \|A^* f_k\|_E \|Bf_k\|_G \leqq (\sum_k \|A^* f_k\|_E{}^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_k \|Bf_k\|_G{}^2)^{\frac{1}{2}} = |A^*| \cdot |B| < \infty .$$

2. H.S.-Eigenschaft der Sobolevschen Einbettungen.

In der Theorie der partiellen Differentialgleichungen treten oft die Funktionenräume H^k auf. Wir erinnern zuerst an die Definition dieser Räume.

Wir bezeichnen mit α ein N-tupel $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)$ von nicht negativen ganzen Zahlen, mit $|\alpha|$ die Summe $\sum_{j=1}^N \alpha_j$, und schreiben

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_N}\right)^{\alpha_N} .$$

Es sei Ω ein offenes Gebiet des N-dimensionalen Euklidischen Raumes E^N. (Die folgenden Definitionen und Sätze übertragen sich unmittelbar auf N-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeiten Ω). Der Raum $H^m(\Omega)$ besteht aus denjenigen Funktionen, für die alle Ableitungen bis zur Ordnung m in Ω existieren (fast überall) und über Ω quadratisch integrierbar sind. Mit dem skalaren Produkt

$$(u,v)_m = \sum_{|\alpha|\leqq m} \int_\Omega D^\alpha u \, \overline{D^\alpha v}$$

wird H^m bekanntlich ein vollständiger separabler Hilbertscher Raum. Speziell ist H^0 mit $L^2(\Omega)$ identisch. – Wir definieren auch $H_0^m(\Omega)$ als die Abschliessung in der H^m-Norm der Menge $C_0^\infty(\Omega)$ von beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompakten Trägern in Ω.

Es ergibt sich unmittelbar, dass H^{m+k} bzw. H_0^{m+k} im Raume H^m bzw. H_0^m enthalten ist für jedes $k \geqq 0$. Somit kann H^{m+k} in H^m kanonisch abgebildet werden. In der Theorie der partiellen Differentialgleichungen spielen diese Einbettungen, die man nach Sobolev und Rellich zu benennen pflegt, eine wichtige Rolle. In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass unter gewissen Voraussetzungen die Einbettungen H.S.-Abbildungen sind.

Es sei jetzt u ein Element in H_0^{m+k} $(m \geqq 1)$ und y ein Punkt in Ω. Wir können u auf die komplexe Zahl $D^\alpha u(y)$ abbilden, falls $|\alpha| \leqq k$ ist, und dadurch wird also ein lineares Funktional T auf H_0^{m+k} definiert:

$$H_0^{m+k} \ni u \to T_y(u) = D^\alpha u(y) .$$

Ähnlich wird H^{m+k} auf den Raum der komplexen Zahlen abgebildet.

Für beschränktes Ω ist für $m > \frac{1}{2}N$ die oben definierte Abbildung von H_0^{m+k} in die komplexen Zahlen sogar stetig; es gilt (Sobolev–Friedrichs, siehe z.B. [13])

$$(2.1) \qquad |D^\alpha u(y)| \leqq C\|u\|_{m+k}, \qquad m > \tfrac{1}{2}N, \quad |\alpha| = k, \quad u \in H_0^{m+k} ,$$

wo die Konstante C nur von α und Ω (und also nicht von y) abhängt.

Analoge Ungleichungen gelten auch für die Räume H^{m+k}, wobei aber noch gewisse Forderungen dem Rande $\partial\Omega$ des Gebiets Ω auferlegt werden müssen. Im folgenden Lemma geben wir nicht die exakten Voraussetzungen über den Rand an, sondern weisen den Leser auf die wohlbekannte Literatur (z.B. [13]) hin.

Lemma (Sobolev). *Es sei Ω ein beschränktes Gebiet des Raumes E^N, dessen Rand die Sobolevschen Forderungen erfüllt. Weiter sei $m > \frac{1}{2}N$ und $|\alpha| \leqq k$. Dann ist die Abbildung*

$$H^{m+k}(\Omega) \ni u \to T_y(u) = D^\alpha u(y)$$

für jedes y in Ω ein stetiges lineares Funktional. Dabei gilt die Ungleichung

$$|D^\alpha u(y)| \leqq C\|u\|_{m+k}\,, \tag{2.2}$$

mit C unabhängig von y.

Mit Hilfe dieses Lemmas beweisen wir

SATZ 4. *Es sei Ω ein beschränktes, Sobolevsches Gebiet des N-dimensionalen euklidischen Raumes E^N; es sei auch $m > \frac{1}{2}N$ und $k \geqq 0$. Dann sind die kanonischen Einbettungen*

$$H^{m+k}(\Omega) \to H^k(\Omega) \tag{2.3}$$

und

$$H_0^{m+k}(\Omega) \to H_0^k(\Omega) \tag{2.4}$$

Abbildungen vom H.S.-Typus. Für die Abbildung (2.4) *gilt dies sogar für jedes beschränktes Gebiet ohne Voraussetzungen über den Rand.*

BEWEIS. Sei α beliebig, $|\alpha| \leqq k$. Dann gibt es für jedes y in Ω eine Funktion $g_y^\alpha(x)$ in H^{m+k}, derart dass

$$T_y(u) = D^\alpha u(y) = (u, g_y^\alpha)_{m+k}, \qquad u \in H^{m+k}\,, \tag{2.5}$$

weil ja nach dem obigen Lemma das Funktional T stetig ist. Bekanntlich folgt dann $\|g_y^\alpha\|_{m+k}^2 = \|T\|^2$. Ist $\{e_i\}$ ein v.o.S. in H^{m+k}, so folgt aber aus (2.5)

$$\|g_y^\alpha\|_{m+k}^2 = \sum_i |(g_y^\alpha e_i)_{m+k}|^2 = \sum_i |D^\alpha e_i(y)|^2\,,$$

und also, wegen (2.2),

$$\sum_i |D^\alpha e_i(y)|^2 = \|g_y^\alpha\|_{m+k}^2 = \|T\|^2 \leqq C^2\,. \tag{2.6}$$

Hier kann natürlich C so gewählt werden, dass (2.6) für alle $|\alpha| \leqq k$ richtig ist. Wir summieren über α und integrieren dann über Ω:

$$\begin{aligned} \infty > \int_\Omega \left[\sum_{|\alpha|\leqq k} \|g_y^\alpha\|_{m+k}^2\right] dy &= \int_\Omega \left[\sum_{|\alpha|\leqq k} \sum_i |D^\alpha e_i(y)|^2\right] dy \\ &= \sum_i \left[\sum_{|\alpha|\leqq k} \int_\Omega |D^\alpha e_i(y)|^2 dy\right] = \sum_i \|e_i\|_k^2\,. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Schreiben wir die Einbettung (2.3) in der Form

$$H^{m+k} \ni u \to \sum_i (u, e_i) e_i \in H^k\,,$$

so folgt nun aus (2.7) unmittelbar, dass die Einbettung H.S. ist. Ähnlich beweisst man, unter Berücksichtigung von (2.1), dass auch die Einbettung (2.4) H.S. ist. Damit ist der Beweis erledigt.

Aus den Sätzen 3 und 4 bekommen wir sofort das folgende

KOROLLAR (vgl. [9]). *Unter den Voraussetzungen des Satzes* 4 *sind die Einbettungen*

$$H^{2m+k}(\Omega) \to H^k(\Omega) , \tag{2.8}$$

$$H_0^{2m+k}(\Omega) \to H_0^k(\Omega) , \tag{2.9}$$

nukleare Abbildungen.

BEMERKUNG. In [9] wurde die Nuklearität von (2.9) auf ganz andere Weise auf dem Umwege über einen Satz von Grothendieck gewonnen.

3. Eine Anwendung auf elliptische Randwertaufgaben.

In letzter Zeit hat man für elliptische Operatoren (und Systeme) allgemeine Randbedingungen ermittelt, bei welchen das Problem r-ter Ordnung

$$\begin{aligned} Au &= f \in H^k(\Omega), \qquad & k &= 0,1,2,\dots , \\ B_\nu u|_{\partial\Omega} &= 0, & \nu &= 1,2,\dots,p , \end{aligned} \tag{3.1}$$

eindeutig lösbar ist und die Ungleichungen

$$\|u\|_{r+k} \leqq C_k \|Au\|_k \tag{3.2}$$

mit gewissen Konstanten C_k erfüllt sind. (A ist hier ein Differentialoperator $\sum_{|\alpha|\leq r} a_\alpha(x) D^\alpha$ und B_ν sind Differentialoperatoren auf dem Rande.) (Vgl. [1] und [12].)

Aus (3.2) folgt, dass die durch (3.1) definierte Abbildung A eine Inverse A^{-1} hat, die H^0 stetig auf H^r abbildet, und dass auch die Operatoren $(A^{-1})^j$ von H^0 auf H^{jr} stetig sind. Betrachtet man A^{-1} als einen stetigen Operator R von $L^2 = H^0$ auf L^2, bekommt man $R = I_r A^{-1}$ und $R^j = I_{rj}(A^{-1})^j$, wo I_k die kanonische Einbettung $H^k \to H^0$ bedeutet. Weil $(A^{-1})^j$ stetig ist, folgt aus den Sätzen 2 und 4

SATZ 5. *Für $jr > \frac{1}{2}N$ ist die j-te Potenz der Resolvente des Operators* (3.1) *r-ter Ordnung eine H.S.-Abbildung und ist also als Integraloperator mit einem Hilbert-Schmidtschen Kern darstellbar.*

BEMERKUNG. Der Satz 5 ist eine weitgehende Verallgemeinerung eines vor kurzem von F. E. Browder ([4], vgl. auch [3]) auf ganz kompliziertem Wege gewonnenen Satzes für den Dirichletschen Operator.

4. Allgemeine Eigenfunktionsentwicklungen.

Wir kommen jetzt zu dem wichtigsten Anwendungsgebiet der H.S. Abbildungen: den singulären Eigenwertsaufgaben. Um die Lektüre zu erleichtern und die Bezeichnungen zu fixieren, formulieren wir zuerst den sogenannten vollständigen Spektralsatz (von Neumann [11], 1949).

Es sei Λ ein lokalkompakter Raum und $\mu(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, ein positives Mass auf Λ. Für jedes $\lambda \in \Lambda$ sei $\hat{H}(\lambda)$ der Hilbertsche Folgenraum der Dimension $k(\lambda)$:

$$\hat{u}(\lambda) \in \hat{H}(\lambda) \Rightarrow \hat{u}(\lambda) = \{\hat{u}_1(\lambda), \hat{u}_2(\lambda), \ldots, \hat{u}_{k(\lambda)}(\lambda)\}$$

mit

$$\sum_{j=1}^{k(\lambda)} |\hat{u}_j(\lambda)|^2 < \infty .$$

(Die Dimension $k(\lambda)$ von $\hat{H}(\lambda)$ variiert also mit λ und braucht nicht endlich zu sein). Dann ist bekanntlich das »direkte Integral«

$$\hat{H} = \int_\Lambda \hat{H}(\lambda) d\mu(\lambda) \tag{4.1}$$

ein separabler Hilbertscher Raum, wenn das skalare Produkt in $\hat{H}$ durch

$$((\hat{u}, \hat{v})) = \int_\Lambda \left\{ \sum_{j=1}^{k(\lambda)} \hat{u}_j(\lambda) \overline{\hat{v}_j(\lambda)} \right\} d\mu(\lambda)$$

erklärt wird.

Der allgemeine Spektralsatz besagt nun, dass wenn $\{A_\beta\}$ ein System (beliebiger Mächtigkeit) von starkvertauschbaren, selbstadjungierten Operatoren A_β in einem Hilbertschen Raum H ist, dann existiert eine unitäre Abbildung F, die H auf ein direktes Integral vom Typus (4.1) überführt und die gleichzeitig das System $\{A_\beta\}$ diagonalisiert:

$$\begin{gathered} H \ni u \to Fu = \hat{u} = \int_\Lambda \hat{u}(\lambda)\, d\mu(\lambda) \in \hat{H}, \\ ((Fu, Fv)) = (u, v)_H, \qquad u, v \in H, \\ (FA_\beta u)_j(\lambda) = \hat{a}_\beta(\lambda) \hat{u}_j(\lambda), \qquad j = 1, 2, \ldots . k(\lambda) . \end{gathered} \tag{4.2}$$

Wenn λ variiert, durchläuft $\hat{a}_\beta(\lambda)$ das Spektrum von A_β, d.h. $\hat{a}_\beta(\cdot)$ bildet Λ auf $Sp(A_\beta)$ ab.

Um unseren Hauptsatz zu beweisen, geben wir zuerst das folgende

Lemma. *Es sei G ein Hilbertscher Raum und A eine lineare Abbildung*

$$G \xrightarrow{A} \hat{H} = \int_\Lambda \hat{H}(\lambda)\, d\mu(\lambda) .$$

Ist A vom H.S.-Typus, dann ist auch die Abbildung

$$G \ni f \to (Af)(\lambda) \in \hat{H}(\lambda) \tag{4.3}$$

vom H.S.-Typus für fast alle λ.

Beweis. Wir haben, wenn $\{e_i\}$ ein v.o.S. in G ist,

$$Af = \sum_{i=1}^{\infty} (f,e_i)Ae_i = \sum_{i=1}^{\infty} (f,e_i)\hat{e}^i; \qquad Ae_i = \hat{e}^i, \quad i = 1,2,\ldots .$$

Weil A eine H.S. Abbildung ist, gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|\hat{e}^i\|_{\hat{H}}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\Lambda} \left[\sum_{j=1}^{k(\lambda)} |\hat{e}_j{}^i(\lambda)|^2\right] d\mu(\lambda) < \infty .$$

Daraus folgt aber

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k(\lambda)} |\hat{e}_j{}^i(\lambda)|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|\hat{e}^i(\lambda)\|^2_{\hat{H}(\lambda)} < \infty \tag{4.4}$$

für alle λ, abgesehen höchstens von einer μ-Nullmenge N. Da die Abbildung (4.3) sich als

$$f \to (Af)(\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} (f,e_i)\hat{e}^i(\lambda) \in \hat{H}(\lambda)$$

schreiben lässt, besagt (4.4) eben, dass diese Abbildung H.S. ist für $\lambda \notin N$.

Hauptsatz. *Es sei Φ eine lineare Untermenge von H, die eine solche prehilbertsche Struktur besitzt, dass die identische Einbettung von Φ in H eine H.S. Abbildung ist; es sei weiter F die Fourier-transformation, die das System $\{A_\beta\}$ diagonalisiert.*

Dann ist die Abbildung

$$\Phi \ni u \to (Fu)(\lambda) = \hat{u}(\lambda) \in \hat{H}(\lambda) \tag{4.5}$$

für fast alle λ stetig (und sogar H.S.) und kann also in der Form

$$\hat{u}_j(\lambda) = \langle u, e_j(\lambda)\rangle, \qquad j = 1,2,\ldots,\dim H(\lambda) , \tag{4.6}$$

dargestellt werden, wo die $e_j(\lambda)$ stetige lineare Funktionale auf Φ sind.

Beweis. Bezeichnet I die identische Einbettung von Φ in H, dann ist $F \circ I$ die Abbildung von Φ auf $\hat{H}$. Nun ist I Hilbert–Schmidtsch und F unitär, und folglich ist $F \circ I$ auch H.S. Dann ist aber nach dem Lemma auch (4.5) vom H.S.-Typus, wenn λ nicht einer μ-Nullmenge angehört. Damit ist der Satz bewiesen.

Bemerkung. Die Funktionale $e_j(\lambda)$ in (4.6) dürfen als verallgemeinerte Eigenelemente des Systems $\{A_\beta\}$ betrachtet werden, weil nach (4.2) für $u \in \Phi$

$$\langle A_\beta u, e_j(\lambda)\rangle = (FA_\beta u)_j(\lambda) = \hat{a}_\beta(\lambda)\hat{u}_j(\lambda) = \langle u, \hat{a}_\beta(\lambda)e_j(\lambda)\rangle, \qquad \lambda \notin N .$$

Es ist klar, dass F auf Φ durch die $\{e_j(\lambda)\}$ bestimmt wird. Wenn Φ in H dicht liegt, ist also $\{e_j(\lambda)\}$ ein vollständiges System von verallgemeinerten Eigenfunktionen, und die $\{e_j(\lambda)\}$ bestimmen eindeutig die Fouriertransformation F.

Aus dem Hauptsatz folgt

Satz 6. *Es seien $H_j, j=1,2,\ldots$, lineare Untermengen des Raumes H mit einer solchen prehilbertschen Struktur, dass die identische Einbettung $H_j \to H$ vom H.S.-Typus ist. Wenn Φ induktiver limes der Räume H_j und F die $\{A_\beta\}$-Fouriertransformation $H \to \hat{H}$ ist, dann ist die Abbildung $\Phi \to \hat{H}(\lambda)$ stetig für fast alle λ.*

Beweis. Wir wissen aus dem Hauptsatz, dass die Abbildung

$$H_j \ni u \to \hat{u}(\lambda) \in \hat{H}(\lambda)$$

stetig ist, wenn λ nicht zu einer μ-Nullmenge N_j gehört. Die Abbildung

$$\Phi \ni u \to \hat{u}(\lambda) \in \hat{H}(\lambda)$$

ist also stetig, wenn λ nicht zu $\bigcup_{j=1}^{\infty} N_j$ gehört. Da auch $\bigcup_{j=1}^{\infty} N_j$ eine μ-Nullmenge ist, folgt die Behauptung.

5. Folgerungen aus dem Hauptsatz.

Einen dichten Unterraum Φ, der den Bedingungen des Hauptsatzes genügt, kann man natürlich auf viele Weise konstruieren. Es sei zum Beispiel B ein dicht definierter Operator in H, derart dass B^{-1} H.S. ist. Mit dem skalaren Produkt

$$(u,v)_\Phi = (u,v)_H + (Bu,Bv)_H$$

wird das Definitionsgebiet $\mathscr{D}(B)$ von B ein Hilbertscher Raum, und die Einbettung

$$\mathscr{D}(B) = \Phi \ni u \to u \in H$$

ist H.S., weil sie sich aus den beiden Abbildungen

$$\Phi \ni u \to Bu \in H$$

und

$$H \ni Bu \to B^{-1}(Bu) \in H$$

zusammensetzen lässt. Die erste Abbildung ist nämlich stetig, die andere nach Voraussetzung H.S. Es gelten also für $\Phi = \mathscr{D}(B)$ die Behauptungen des Hauptsatzes. Damit haben wir einen Satz von Berezanskij [2] sehr einfach bewiesen; aus diesem Satz folgt nach Berezanskij [2] ein Satz von Mautner [10] über die Eigenfunktionen eines Carlemanschen Integraloperators.

In manchen Fällen, zum Beispiel wenn $\{A_\beta\}$ ein System von Differentialoperatoren ist, enthält H die Menge $C_0^\infty(\Omega)$, wo Ω ein offenes Gebiet des Euklidischen Raumes E^N ist. Auf der Menge aller Funktionen mit kompakten Trägern in Ω, deren Ableitungen bis zur Ordnung r quadratisch integrierbar sind, definieren wir eine Topologie durch die Halbnormen

$$\left[\int \sum_{|\alpha|\leqq r} \varrho(x)\,|D^\alpha f(x)|^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{5.1}$$

wo $\varrho(x)$ eine beliebige, positive und stetige Funktion ist. Den so entstehenden Raum bezeichnen wir $\Phi^r(\Omega)$. Ist dann $\{\Omega_j\}$ eine Folge prekompakter Gebiete, die wachsend gegen Ω streben, ist, wie man sofort sieht,

$$\Phi^r(\Omega) = \liminf_{j\to\infty} H_0{}^r(\Omega_j)\,. \tag{5.2}$$

Ist $S, u \to \langle S, u\rangle$, eine Distribution auf $C_0{}^\infty(\Omega)$, die sich stetig auf Φ^r erweitern lässt, nennen wir S eine Distribution der Ordnung $\leqq r$, und den Raum dieser Distributionen bezeichnen wir Φ^{-r}. Eine equivalente Forderung ist, dass es zu jedem kompakten $K\subset\Omega$ eine Konstante $C(K)$ gibt, derart dass

$$|\langle S,u\rangle| \leqq C(K)\,\|u\|_r\,, \tag{5.3}$$

wenn u ausserhalb K verschwindet. (Hier hat $\|\cdot\|_r$ die im Abschnitt 2 definierte Bedeutung.) Ähnlich sagen wir, dass das skalare Produkt $b(u,v)$ von der Ordnung $\leqq r$ ist, falls es zu jedem kompakten $K\subset\Omega$ eine $C(K)$ gibt, so dass

$$|b(u,v)| \leqq C(K)\,\|u\|_r\,\|v\|_r, \qquad u,v\in C_0^\infty(K)\,. \tag{5.4}$$

Für unsere letzte Anwendung der obigen Theorie nehmen wir jetzt an, im Hilbertraum $H\supset C_0^\infty(\Omega)$ sei das Skalarprodukt von der Ordnung $\leqq r$. Dann enthält H die Räume $H_0^r(\Omega_j)$, weiter sind die identischen Einbettungen $H_0^r(\Omega_j)\to H$ stetig. Wir haben dann

Satz 7. *Im Hilbertschen Raume $H\supset C_0^\infty(\Omega)$ mit einem skalaren Produkt von der Ordnung $\leqq r$ sei $\{A_\beta\}$ ein System starkvertauschbarer, selbstadjungierter Operatoren; weiter sei F die unitäre Abbildung $H\to\hat{H}$, die das System diagonalisiert. Dann ist für $m>\frac{1}{2}N$ und fast alle λ die Abbildung*

$$\Phi^{r+m}(\Omega)\ni u\to(Fu)(\lambda) = \hat{u}(\lambda)\in\hat{H}(\lambda)$$

stetig, und die verallgemeinerten Eigenelemente $e_j(\lambda)$, die durch (4.6) erklärt werden, sind folglich Elemente in $\Phi^{-m-r}(\Omega)$, also Distributionen, deren Ordnung nicht $[\frac{1}{2}N]+r+1$ übertrifft.

Die verallgemeinerten Eigenfunktionen $\{e_j(\lambda)\}$ *sind vollständig, wenn* $C_0^\infty(\Omega)$ *in* H *dicht liegt.*

BEWEIS. Die Einbettung $H_0^{m+r}(\Omega_j) \to H$ schreiben wir

$$H_0^{m+r}(\Omega_j) \to H_0^r(\Omega_j) \to H .$$

Die erste Abbildung hier ist H.S. nach Satz 4, die zweite ist stetig, und also die Zusammensetzung H.S. Aus dem Satz 6 folgt dann die Behauptung.

BEMERKUNG. Der obige Satz ist eine Verschärfung von Sätzen von Gelfand–Kostjučenko [6] (verschärft von Gårding [7]), Berezanskij [2] u.a. ([4], [5]). Früher wurde nur $e_j(\lambda) \in (D^{N+r})'$ gezeigt. — Wie einfache Beispiele (Diracsche δ_λ) zeigen, kann im allgemeinen die Ordnung der Distribution $e_j(\lambda)$ nicht unter die von uns gegebene Grenze heruntergedrückt werden.

SCHRIFTTUM

1. S. Agmon, *The coerciveness problem for integro-differential forms*, J. Analyse math. 6 (1958), 183–223.
2. Ju. M. Berezanskij, *Eigenfunktionsentwicklungen selbstadjungierter Operatoren*, Ukrain. mat. Žurn. 11 (1959), 16–24. (Russisch.)
3. F. E. Browder, *Eigenfunction expansions for singular elliptic differential operators*, Proc. nat. Acad. Sci. USA 40 (1954), 459–463.
4. F. E. Browder, *Eigenfunction expansions for non-symmetric partial differential operators* III, Amer. J. Math. 81 (1959), 715–734.
5. C. Foias, *Sur la décomposition spectrale en opérateurs propres des opérateurs linéaires dans les espaces nucléaires*, C. r. Acad. Sci. Paris 248 (1959), 1105–1108.
6. I. M. Gelfand und A. G. Kostjučenko, *Entwicklung nach Eigenfunktionen von Differentialoperatoren*, Doklady Akad. Nauk SSSR 103 (1955), 349–352. (Russisch.)
7. L. Gårding, *Eigenfunction expansions. A seminar in applied mathematics*, Boulder, Colorado, June 23 to July 19, 1957.
8. K. Maurin, *Eine Bemerkung zur allgemeinen Eigenfunktionsentwicklungen ...*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astron. Phys. 8 (1960), 381–384.
9. K. und L. Maurin, *Nuklearität gewisser Rellich-Sobolevschen Einbettungen*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astron. Phys. 8 (1960), 621–624.
10. F. I. Mautner, *On eigenfunction expansions*, Proc. nat. Acad. Sci. USA 39 (1953), 49–53.
11. J. von Neumann, *On rings of operators*, Ann. of Math. (2) 50 (1949), 401–485.
12. M. Schechter, *General boundary value problems for elliptic differential equations*, Commun. pure appl. Math. 12 (1959), 457–486.
13. L. Schwartz, *Théorie des distributions* I et II, Paris, 1950 et 1951.

UNIVERSITÄT WARSCHAU, POLEN