MATH. SCAND. 11 (1962), 91–102

RELATIONEN ZWISCHEN DIVERGENZ UND ROTATION

JOSEF WEIER

In der Literatur nimmt die Behandlung der Rotation, des äusseren Differentials, einen viel breiteren Platz ein als die Behandlung der Divergenz. Die Struktur einer Mannigfaltigkeit lässt sich aber mit Hilfe der Divergenzgruppen ebenso beschreiben wie mit Hilfe der Gruppen geschlossener Differentialformen. Dies weiss man, seit G. de Rham und W. V. D. Hodge gezeigt haben, dass jedes schiefsymmetrische Tensorfeld eindeutig in einen rotationsfreien, einen divergenzfreien und einen harmonischen Teil zerfällt. Es sind aber über die Divergenz eine Reihe von Sätzen noch nicht explizit bewiesen worden, die den glatten Dualismus zwischen Divergenz und Rotation demonstrieren. Hierzu einen Beitrag zu liefern, ist der Zweck dieser Arbeit. An den ursprünglichen Beweis des Greenschen Integralsatzes ist übrigens erst kürzlich [1] erinnert worden.

1. Zerlegung von Tensorfeldern in lokale Tensorfelder.

Sei $n \geqq 2$ eine natürliche Zahl. Bis zum Schluss bedeute M eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n. Über M definierte schiefsymmetrische r-fach kontravariante Tensorfelder bezeichnen wir auch als r-Felder, über M definierte schiefsymmetrische r-fach covariante Tensorfelder wie üblich als r-Formen. Bekanntlich bedeutet es keine wesentliche Einschränkung, wenn man M als in einem Zahlenraume liegend voraussetzt. Jede eineindeutige stetig differenzierbare Abbildung des n-dimensionalen Zahlenraumes R_n in M, deren Funktionaldeterminante überall maximalen Rang hat, heisse ein Koordinatensystem von M. Die bei schiefsymmetrischen Tensorfeldern auftretenden gestrichenen Summen $\sum'$ sind nur über die r-Tupel $\lambda_1 < \ldots < \lambda_r$ zu erstrecken.

Ist φ ein Koordinatensystem in M, N eine offene n-Zelle mit $\bar{N} \subset \varphi(R_n)$. weiter t ein Tensorfeld über M und gilt $t(p) = 0$ für alle Punkte $p \in M - N$, so heisse t ein *lokales Tensorfeld* über M.

Eingegangen am 4. März 1961.

THEOREM 1. *Zu jedem r-covarianten Tensorfelde t über M gibt es endlich viele lokale r-covariante Tensorfelder $t_1, t_2, \ldots$ über M mit $t = \sum t_i$.*

BEWEIS. Seien φ_i: $R_n \to M$ endlich viele Koordinatensysteme über M mit $\bigcup \varphi_i(R_n) = M$. Dann gibt es eine offene n-Vollkugel V in R_n derart, dass sogar $\bigcup \varphi_i(V) = M$. Sei $U_i = \varphi_i(R_n)$ und $V_i = \varphi_i(V)$, ferner W_i eine in M offene Menge mit $\overline{V}_i \subset W_i$ und $\overline{W}_i \subset U_i$. Für $p \in W_i$ bedeute $\xi_i(p)$ die Zahl $\operatorname{dist}(p, \overline{W}_i - W_i)/(\operatorname{dist}(p, \overline{W}_i - W_i) + \operatorname{dist}(p, V_i))$.

Für alle Paare (i,p) mit $p \in U_i$ seien $e_{ij}(p)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, die kontravarianten und $e_i^j(p)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, die covarianten Basisvektoren von M in p bezüglich φ_i. Es seien $t_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}$ die Komponenten des Tensorfeldes $t \mid U_1$ bezüglich φ_1, so dass die $t_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}$ also relle Funktionen über U_1 sind. Setzt man hierauf

$$t_1(p) = t(p) \quad \text{für } p \in V_1, \quad t_1(p) = 0 \quad \text{für } p \in M - W_1\,,$$
$$t_1(p) = \sum [\xi_1(p) t_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}(p)]\, e_1^{\lambda_1}(p) \otimes \ldots \otimes e_1^{\lambda_r}(p) \quad \text{für } p \in W_1 - V_1\,.$$

so ist t_1 ein lokales r-covariantes Tensorfeld über M.

Wir machen nun die für $m = 1$ richtige Annahme, es seien bereits lokale r-covarianten Tensorfelder $t_1, t_2, \ldots, t_m$ über M definiert, so dass

$$t(p) - \sum_{i=1}^{m} t_i(p) = 0 \qquad \text{für alle } p \in \bigcup_{i=1}^{m} V_i\,.$$

Der Tensor $t(p) - \sum_{i=1}^m t_i(p)$ heisse $T(p)$.

Für $p \in W_{m+1}$ sei wie oben die Zahl $T_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}(p)$ definiert als die $(\lambda_1 \ldots \lambda_r)$-Komponente des Tensors $T(p)$ bezüglich des Koordinatensystemes φ_{m+1}. Wir setzen nun wieder

$$t_{m+1}(p) = T(p) \quad \text{für } p \in V_{m+1}, \quad t_{m+1}(p) = 0 \quad \text{für } p \in M - W_{m+1}$$

und

$$t_{m+1}(p) = \sum [\xi_{m+1}(p)\, T_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}(p)]\, e_{m+1}^{\lambda_1}(p) \otimes \ldots \otimes e_{m+1}^{\lambda_r}(p)$$
$$\text{für } p \in W_{m+1} - V_{m+1}\,.$$

Ist dann p *erstens* ein Punkt aus $\bigcup_{i=1}^m V_i$, so ist $T(p) = 0$, daher $t_{m+1}(p) = 0$ und also $t(p) - \sum_{i=1}^{m+1} t_i(p) = 0$. Wenn *zweitens* $p \in V_{m+1}$, so ist

$$t(p) - \sum_{i=1}^{m+1} t_i(p) = T(p) - t_{m+1}(p) = T(p) - T(p) = 0\,.$$

Der $(m+1)$-te Schritt ist also ausführbar und daher der obige Satz richtig.

THEOREM 2. *Sei t ein schiefsymmetrisches r-covariantes Tensorfeld, eine r-Form, über M. Dann gibt es endlich viele lokale r-Formen $t_1, t_2, \ldots$ über M mit $t = \sum t_i$.*

Beweis. Die Bedeutung von φ_i, U_i, V_i, W_i, ξ_i, e_{ij}, e_i^j und $t_{\lambda_1\ldots\lambda_r}$ sei die gleiche wie im letzten Satze. Wir setzen jetzt

$$t_1(p) = \sum' [\xi_1(p)t_{\lambda_1\ldots\lambda_r}(p)]\, e_1^{\lambda_1}(p) \wedge \ldots \wedge e_1^{\lambda_r}(p) \qquad \text{für } p \in W_1 - V_1 \,.$$

ferner $t_1(p) = t(p)$ für $p \in V_1$ und $t_1(p) = 0$ für $p \in M - W_1$.

Dann kann man den Beweis wie im Falle des letzten Satzes weiterführen. Lediglich $t_{m+1}(p)$ ist für $p \in W_{m+1} - V_{m+1}$ durch

$$t_{m+1}(p) = \sum' [\xi_{m+1}(p)T_{\lambda_1\ldots\lambda_r}(p)]\, e_{m+1}^{\lambda_1}(p) \wedge \ldots \wedge e_{m+1}^{\lambda_r}(p)$$

zu definieren.

Theorem 3. *Zu jedem r-kontravarianten Tensorfelde t über M gibt es endlich viele lokale r-kontravariante Tensorfelder* $t_1, t_2, \ldots$ *über M mit* $t = \sum t_i$. *Zu jedem r-Felde t über M existieren endlich viele lokale r-Felder* $t_1, t_2, \ldots$ *mit* $t = \sum t_i$.

Der Beweis verläuft wie für die beiden ersten Sätze.

Theorem 4. *Sei* ω *eine r-Form über M und* ${}_M\!\int \omega\cdot x = 0$ *für jedes r-Feld x über M. Dann ist* $\omega = 0$.

Beweis. Seien q ein Punkt aus M, φ ein q enthaltendes Koordinatensystem von M und $e_i(p)$, $e^i(p)$ für jeden Punkt p aus $X = \varphi(R_n)$ die kontravarianten bzw. covarianten Basisvektoren von M in p bezüglich φ. Für $p \in X$ seien $\omega_{\lambda_1\ldots\lambda_r}(p)$ die Komponenten von $\omega(p)$ bezüglich φ. Sei $(\mu_1 \ldots \mu_r)$ ein r-Tupel natürlicher Zahlen $\leqq n$.

Zum Nachweis, dass $\omega_{\mu_1\ldots\mu_r}(q) = 0$, seien Y, Z kleine offene Umgebungen von q bezüglich X mit $\bar{Z} \subset Y$, ferner $\xi(p)$ für alle $p \in Y$ die Zahl $\operatorname{dist}(p, \bar{Y} - Y)/(\operatorname{dist}(p, \bar{Y} - Y) + \operatorname{dist}(p, Z))$. Sei t folgendes r-Feld über M:

$$t(p) = e_{\mu_1}(p) \wedge \ldots \wedge e_{\mu_r}(p) \qquad \text{für } p \in Z. \qquad t(p) = 0 \qquad \text{für } p \in M - Y \,.$$

$$t(p) = \xi(p)\, e_{\mu_1}(p) \wedge \ldots \wedge e_{\mu_r}(p) \qquad \text{für } p \in Y - Z \,.$$

Nach Voraussetzung ist $\int \omega \cdot t = 0$. Also ist

$$\int_{Y-Z} \omega\cdot t + \int_Z \omega \cdot t = 0 \,.$$

Ist Y eine hinreichend enge Umgebung von Z, so ist das erste Integral der linken Seite gegenüber dem zweiten sehr klein. Nach dem Mittelwertsatze gibt es einen Punkt q' in Z mit

$$\int_Z \omega\cdot t = |Z|\, \omega(q')\cdot t(q') \,.$$

Andererseits ist

$$\left(e^{\lambda_1}(p)\wedge\ldots\wedge e^{\lambda_r}(p)\right)\cdot\left(e_{\nu_1}(p)\wedge\ldots\wedge e_{\nu_r}(p)\right) = \delta^{\lambda_1\ldots\lambda_r}_{\nu_1\ldots\nu_r},$$

also

$$\omega(q')\cdot t(q') = \omega_{\mu_1\ldots\mu_r}(q').$$

In jeder Nähe von q und zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es daher einen Punkt q' mit $|\omega_{\mu_1\ldots\mu_r}(q')| < \varepsilon$. Also ist $\omega_{\mu_1\ldots\mu_r}(q) = 0$, wie behauptet.

Wie den letzten Satz beweist man:

THEOREM 5. *Ist ω ein r-covariantes Tensorfeld über M und ${}_M\!\int \omega\cdot x = 0$ für jedes r-kontravariante Tensorfeld x über M, so ist $\omega = 0$.*

Ist t ein schiefsymmetrisches r-kontravariantes Tensorfeld, ein r-Feld, über M und ${}_M\!\int \xi\cdot t = 0$ für jede r-Form ξ über M, so ist $t = 0$.

Ist t ein r-kontravariantes Tensorfeld über M und ${}_M\!\int \xi\cdot t = 0$ für jedes r-covariante Tensorfeld ξ über M, so ist $t = 0$.

Für relative Tensorfelder gelten leichte Modifizierungen der voraufgehenden Sätze.

2. Neuer Beweis eines Stokesschen Integralsatzes.

Sei t eine $(n-1)$-Form über M. Dann ist nach dem Stokesschen Integralsatze ${}_M\!\int \operatorname{rot} t = 0$. Nach dem ersten Abschnitte lässt sich jedes Tensorfeld als Summe lokaler Tensorfelder darstellen. Sei $t = \sum t_i$, wo t_i lokal, und t_j eines der t_i. Da t_j lokal, gibt es ein Koordinatensystem φ von M und eine offene n-Zelle W in M mit $\overline{W} \subset \varphi(R_n)$ derart, dass $t_j(p) = 0$ für alle Punkte $p \notin W$. Somit folgt

$$\int_M \operatorname{rot} t_j = 0$$

aus dem nachstehenden Satze.

THEOREM 6. *Seien φ ein Koordinatensystem in M, N die Menge $\varphi(R_n)$, weiter Q eine offene n-Zelle in R_n und W das Bild von Q bei φ, schliesslich t eine $(n-1)$-Form über N, die in einer Umgebung von ∂W verschwindet. Dann ist ${}_W\!\int \operatorname{rot} t = 0$.*

BEWEIS. Sind $e_i(p)$ die kontravarianten Basisvektoren im Punkte p von N bezüglich φ und $g(p)$ die Determinante des Masstensors in p bezüglich φ, so ist definitionsgemäss

$$\int_W \operatorname{rot} t = \int_W (\operatorname{rot} t)\cdot(g^{-\frac{1}{2}} e_1\wedge\ldots\wedge e_n) = \int_Q (\operatorname{rot} t)\cdot(g^{-\frac{1}{2}} e_1\wedge\ldots\wedge e_n)\, g^{\frac{1}{2}}\, dQ\,.$$

Für $p \in R_n$ sei $s(x)$ derjenige $(n-1)$-kontravariante Tensor in x, der bezüglich der identischen Abbildung von R_n die Komponenten $t_{\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}}\varphi(x)$ hat. Dann ist $(\operatorname{rot} s)(x) = (\operatorname{rot} t)\varphi(x)$. Sind E_i die natürlichen kontravarianten Einheitsvektoren von R_n, so ist also

$$(\operatorname{rot} t)_{\varphi(x)}\cdot(e_1\wedge\ldots\wedge e_n) = (\operatorname{rot} s)_x\cdot(E_1\wedge\ldots\wedge E_n)\,.$$

Somit folgt der obige Satz aus dem nachstehenden euklidischen Satze.

THEOREM 7. *Seien Q eine offene n-Zelle im n-Zahlenraume R_n und v eine $(n-1)$-Form über R_n, die in einer Umgebung von ∂Q verschwindet. Dann ist ${}_Q\!\int \operatorname{rot} v = 0$.*

BEWEIS. Seien e_i die natürlichen kontravarianten Einheitsvektoren von R_n und $t(p) = e_1\wedge\ldots\wedge e_n$ für jeden Punkt $p\in R_n$. Dann ist

$$\int\limits_Q \operatorname{rot} v = \int\limits_Q (\operatorname{rot} v)\cdot t$$

und nach Theorem 8 weiter

$$(\operatorname{rot} v)\cdot t = \pm\operatorname{div}(v\cdot t) - v\cdot\operatorname{div} t\,,$$

wegen $\operatorname{div} t = 0$ daher

$$\int\limits_Q \operatorname{rot} v = \pm\int\limits_Q \operatorname{div}(v\cdot t)\,.$$

Andererseits ist die rechte Seite nach dem Greenschen Integralsatze Null.

THEOREM 8. *Seien w ein schiefsymmetrisches r-kontravariantes und v ein schiefsymmetrisches $(r-1)$-covariantes Tensorfeld über R_n. Dann ist*

$$\operatorname{div}(v\cdot w) = (-1)^{r-1}(\operatorname{rot} v)\cdot w + v\cdot\operatorname{div} w\,.$$

BEWEIS. Mit $v = (v_{\lambda_1\ldots\lambda_{r-1}})$, $w = (w^{\lambda_1\ldots\lambda_r})$ und $v\cdot w = t = (t^i)$ ist

$$t^i = \frac{1}{(r-1)!}\sum_\lambda v_{\lambda_1\ldots\lambda_{r-1}} w^{\lambda_1\ldots\lambda_{r-1}i}\,,$$

also

$$\begin{aligned}\operatorname{div} t &= \sum_i \frac{\partial t^i}{\partial x^i}\\ &= \frac{1}{(r-1)!}\sum_\lambda\sum_i \frac{\partial v_{\lambda_1\ldots\lambda_{r-1}}}{\partial x^i} w^{\lambda_1\ldots\lambda_{r-1}i} + \frac{1}{(r-1)!}\sum_\lambda\sum_i v_{\lambda_1\ldots\lambda_{r-1}}\frac{\partial w^{\lambda_1\ldots\lambda_{r-1}i}}{\partial x^i}\,.\end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}A = \sum_\lambda \frac{\partial v_{\lambda_1\ldots\lambda_{r-1}}}{\partial x^{\lambda_r}} w^{\lambda_1\ldots\lambda_r} &= (-1)^{r-1}\sum_\lambda \frac{\partial v_{\lambda_1\ldots\lambda_{r-1}}}{\partial x^{\lambda_r}} w^{\lambda_r\lambda_1\ldots\lambda_{r-1}}\\ &= (-1)^{r-1}\sum_\lambda \frac{\partial v_{\lambda_2\ldots\lambda_r}}{\partial x^{\lambda_1}} w^{\lambda_1\ldots\lambda_r}\,.\end{aligned}$$

Sei $(\alpha_1 \dots \alpha_r)$ eine Permutation von $(1 \dots r)$. Ist dann $(\lambda_1 \dots \lambda_r)$ ein r-Tupel von Zahlen λ_i zwischen 1 und n, so bedeute $(\mu_1 \dots \mu_r)$ immer diejenige Permutation von $(\lambda_1 \dots \lambda_r)$, die $(\alpha_1 \dots \alpha_r)$ entspricht. Es ist also $(\mu_1 \dots \mu_r) = (\lambda_{\alpha_1} \dots \lambda_{\alpha_r})$. Dann ist

$$\begin{aligned}(-1)^r A &= \sum_\lambda \frac{\partial v_{\mu_2 \dots \mu_r}}{\partial x^{\mu_1}} w^{\mu_1 \dots \mu_r} = \sum_\lambda \operatorname{sign}\begin{pmatrix}\mu_1 \dots \mu_r \\ \lambda_1 \dots \lambda_r\end{pmatrix} \frac{\partial v_{\mu_2 \dots \mu_r}}{\partial x^{\mu_1}} w^{\lambda_1 \dots \lambda_r} \\ &= \frac{1}{r!} \sum_\lambda \sum_\mu \operatorname{sign}\begin{pmatrix}\mu_1 \dots \mu_r \\ \lambda_1 \dots \lambda_r\end{pmatrix} \frac{\partial v_{\mu_2 \dots \mu_r}}{\partial x^{\mu_1}} w^{\lambda_1 \dots \lambda_r} \\ &= \frac{1}{r} \sum_\lambda (\operatorname{rot} v)_{\lambda_1 \dots \lambda_r} w^{\lambda_1 \dots \lambda_r} \\ &= (r-1)!\, (\operatorname{rot} v) \cdot w\,.\end{aligned}$$

Also ist $\operatorname{div} t = (-1)^{r-1} (\operatorname{rot} v) \cdot w + v \cdot \operatorname{div} w$, wie behauptet.

3. Bedingungen für Quellen- und Wirbelfreiheit.

Sei M wie oben eine kompakte Riemannsche n-Mannigfaltigheit. Ist t ein r-Feld über M und bezeichnet $\operatorname{grad} t$ die covariante Ableitung von t bezüglich der Riemannschen Metrik von M, so ist bekanntlich $\operatorname{div} t$ das $(r-1)$-Feld mit

$$(\operatorname{div} t)^{\lambda_1 \dots \lambda_{r-1}} = \sum_\alpha (\operatorname{grad} t)_\alpha^{\lambda_1 \dots \lambda_{r-1} \alpha}\,.$$

Offenbar hängt $\operatorname{div} t$ von der Metrik von M ab.

Ist ω eine r-Form über M, so ist $\operatorname{rot} \omega = d\omega$ eine $(r+1)$-Form. Sind φ ein Koordinatensystem von M, N die in M offene Menge $\varphi(R_n)$, für jeden Punkt p aus N weiter $\varphi^{-1}(p) = (x_p^1, \dots, x_p^n)$, ferner $\Omega = \omega \mid N$ und

$$\Omega = \sum{}' \Omega_{\lambda_1 \dots \lambda_r} dx^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge dx^{\lambda_r}\,.$$

so ist

$$(\operatorname{rot} \Omega)_{\lambda_1 \dots \lambda_{r+1}} = \frac{1}{r!} \sum \varepsilon_{\lambda_1 \dots \lambda_{r+1}}^{\mu_1 \dots \mu_{r+1}} \frac{\partial \Omega_{\mu_2 \dots \mu_{r+1}}}{\partial x^{\mu_1}}\,.$$

$$\operatorname{rot} \Omega = \sum{}' d\Omega_{\lambda_1 \dots \lambda_r} \wedge dx^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge dx^{\lambda_r}\,.$$

Ersichtlich ist dx^i ein covariantes Vektorfeld über N: es ist $(dx^i)(p)$ derjenige covariante Vektor im Punkte p, der bezüglich des Koordinatensystemes φ die Komponenten $\delta_1^i, \dots, \delta_n^i$ hat. Dabei ist $x^i = x^i(p)$ eine Skalarfunktion, f, über N, und $df = dx^i$ ist die covariante Ableitung von f.

Sei $\Gamma_i(M)$ der lineare Raum der i-Felder und $\Gamma^i(M)$ der lineare Raum der i-Formen über M. Dann sind div und rot lineare Abbildungen div: $\Gamma_r(M) \to \Gamma_{r-1}(M)$ und rot: $\Gamma^r(M) \to \Gamma^{r+1}(M)$ mit $\operatorname{div}\operatorname{div} = 0$, $\operatorname{rot}\operatorname{rot} = 0$ und der weiteren Eigenschaft: für alle Paare (ω, t), wobei ω eine r-Form und t ein $(r+1)$-Feld über M bedeuten, ist

$$\int_M \omega \cdot \operatorname{div} t = \int_M (\operatorname{rot} \omega) \cdot t \,.$$

Man findet die letzte Gleichung z. B. in [3, p. 434–436] bewiesen.

Theorem 9. *Sei ω eine r-Form über M. Für jedes r-Feld $x = \operatorname{div} y$ über M sei ${}_M\!\int \omega \cdot x = 0$. Dann ist ω geschlossen.*

Beweis. Sei t ein $(r+1)$-Feld über M. Dann ist ${}_M\!\int (\operatorname{rot}\omega) \cdot t = {}_M\!\int \omega \cdot \operatorname{div} t = 0$. Es ist also ${}_M\!\int (\operatorname{rot}\omega) \cdot t = 0$ für jedes $(r+1)$-Feld t über M. Nach einem obigen Satze ist daher $\operatorname{rot}\omega = 0$.

Theorem 10. *Sei t ein r-Feld über M. Für jede derivierte r-Form ξ sei ${}_M\!\int \xi \cdot t = 0$. Dann ist $\operatorname{div} t = 0$.*

Beweis. Sei σ eine $(r-1)$-Form über M. Dann ist $\int \sigma \cdot \operatorname{div} t = \int (\operatorname{rot}\sigma) \cdot t = 0$. Es ist also $\int \sigma \cdot \operatorname{div} t = 0$ für jede $(r-1)$-Form σ. Nach einem obigen Satze ist dies nur bei $\operatorname{div} t = 0$ möglich.

4. Lineare Transformation von Tensorfeldern.

Sei $C_r(M), C^r(M)$ der lineare Raum der r-kontravarianten bzw. r-covarianten Tensorfelder über M. Bekanntlich bestimmt dann jede lineare Abbildung von $C_r(M)$ bzw. $C^r(M)$ in die reellen Zahlen ein Feld aus $C^r(M)$ bzw. aus $C_r(M)$.

Theorem 11. *Seien $C_r(M)$ der lineare Raum der r-kontravarianten Tensorfelder über M und Φ eine lineare Abbildung von $C_r(M)$ in die reellen Zahlen. Dann gibt es ein r-covariantes Tensorfeld ω über M derart, dass ${}_M\!\int \omega \cdot x = \Phi(x)$ für jedes Feld x aus $C_r(M)$.*

Beweis. Seien R_n der n-Zahlenraum, σ ein Koordinatensystem von M und U die Menge $\sigma(R_n)$. Sind V eine offene n-Zelle in M mit $\overline{V} \subset U$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ natürliche Zahlen $\leqq n$, so sei das r-kontravariante Tensorfeld $E[\sigma, V]_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}$ wie folgt bestimmt.

Es bedeute α die grösste Zahl derart, dass eine bezüglich M gebildete sphärische Umgebung des Durchmessers α in V liegt. Sei V' die offene $(\alpha)^2$-Umgebung von V bezüglich M und $W = U \cap V'$. Für alle $p \in U$ seien $e_1(p), \ldots, e_n(p)$ die kontravarianten Basisvektoren und $e^1(p), \ldots, e^n(p)$ die covarianten Basisvektoren in p bezüglich σ. Für alle $p \in W$ sei $\xi(p)$ die Zahl $\operatorname{dist}(p, \overline{W} - W)/(\operatorname{dist}(p, \overline{W} - W) + \operatorname{dist}(p, V))$. Hierauf setzen wir

$$E[\sigma, V]_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}(p) = e_{\lambda_1}(p) \otimes \ldots \otimes e_{\lambda_r}(p) \qquad \text{für } p \in V,$$
$$= \xi(p) e_{\lambda_1}(p) \otimes \ldots \otimes e_{\lambda_r}(p) \qquad \text{für } p \in W - V$$

und $E[\sigma, V]_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}(p) = 0$ für $p \in M - W$. Offenbar ist $\lim \alpha/(\alpha + \alpha^2) = 1$ für $\alpha \to 0$.

Für alle Punkte $p \in U$ und alle r-Tupel $(\lambda_1 \ldots \lambda_r)$ setzen wir nun

$$\omega_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}(p) = \lim_{V \to p} \frac{r!}{|V|} \Phi(E[\sigma, V]_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}),$$

wobei V eine sphärische Umgebung von p und $|V|$ das Volumen von V bedeutet. Hierauf sei

$$\omega(p) = \sum \omega_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}(p)\, e^{\lambda_1}(p) \otimes \ldots \otimes e^{\lambda_r}(p)$$

in allen Punkten p aus U. Man bestätigt leicht, dass die Erklärung von $\omega(p)$ vom Koordinatensysteme unabhängig ist. Man kann daher $\omega(p)$ als in allen Punkten aus M erklärt ansehen.

Zum Nachweis, dass ω die verlangten Eigenschaften hat, sei t ein r-kontravariantes Tensorfeld über M. Nach dem ersten Abschnitte kann man weiterhin voraussetzen, es sei t lokal. Hierauf kann man annehmen, dass σ ein zu t gehöriges Koordinatensystem ist, dass also eine n-Zelle X mit $\bar{X} \subset U$ und

$$t(p) = 0 \qquad \text{für alle } p \in M - X$$

existiert. Sei $t(p) = \sum t_p^{\lambda_1 \ldots \lambda_r} e_{\lambda_1}(p) \otimes \ldots \otimes e_{\lambda_r}(p)$ für alle $p \in U$.

Wir zerlegen nun X in kleine n-Zellen X_i. Dann ist

$$\int_M \omega \cdot t = \int_X \omega \cdot t = \sum_i \sum_\lambda \int_{X_i} \omega \cdot (t^{\lambda_1 \ldots \lambda_r} e_{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes e_{\lambda_r}).$$

Nach dem Mittelwertsatze liegt daher in jedem X_i ein Punkt q_i mit

$$\begin{aligned}
\int_M \omega \cdot t &= \sum_i \sum_\lambda |X_i| \omega(q_i) \cdot \{t_{q_i}^{\lambda_1 \ldots \lambda_r} e_{\lambda_1}(q_i) \otimes \ldots \otimes e_{\lambda_r}(q_i)\} \\
&= \frac{1}{r!} \sum_i \sum_\lambda |X_i| \omega_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}(q_i)\, t^{\lambda_1 \ldots \lambda_r}(q_i) \\
&\sim \frac{1}{r!} \sum_i \sum_\lambda |X_i| \frac{r!}{|X_i|} \Phi(E[\sigma, X_i]_{\lambda_1 \ldots \lambda_r})\, t_{q_i}^{\lambda_1 \ldots \lambda_r} \\
&= \Phi\left(\sum_i \sum_\lambda t^{\lambda_1 \ldots \lambda_r}(q_i)\, E[\sigma, X_i]_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}\right).
\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\sum_i \sum_\lambda t^{\lambda_1 \ldots \lambda_r}(q_i)\, E[\sigma, X_i]_{\lambda_1 \ldots \lambda_r} \sim t,$$

sofern nur die Unterteilung von X hinreichend fein ist. Also $\int \omega \cdot t = \Phi(t)$, wie behauptet.

5. Darstellbarkeit von r-Feldern als Divergenz von $(r+1)$-Feldern.

Wie oben ist M eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n.

THEOREM 12. *Sei t ein r-Feld über M. Für jede geschlossene r-Form φ über M gelte ${}_M\int \varphi \cdot t = 0$. Dann ist t Divergenz eines $(r+1)$-Feldes.*

BEWEIS. Sei $\Delta^{r+1}(M)$ der lineare Raum der derivierten $(r+1)$-Formen über M. Für jedes Feld $\xi = d\eta$ aus $\Delta^{r+1}(M)$ setzen wir

$$F(\xi) = \int_M \eta \cdot t .$$

Zum Nachweis, dass F eindeutig ist, sei $\xi = d\bar{\eta}$. Dann ist

$$\int_M \eta \cdot t - \int_M \bar{\eta} \cdot t = \int_M (\eta - \bar{\eta}) \cdot t .$$

Andererseits ist $d\eta = d\bar{\eta}$, also $\eta - \bar{\eta}$ geschlossen und nach Voraussetzung daher das letzte Integral Null.

Offenbar ist F eine lineare Abbildung von $\Delta^{r+1}(M)$ in die Menge R der reellen Zahlen. Sei $\Gamma^{r+1}(M)$ der lineare Raum der $(r+1)$-Formen und $F' : \Gamma^{r+1}(M) \to R$ eine lineare Fortsetzung von F über $\Gamma^{r+1}(M)$. Im Sinne des letzten Abschnittes bezeichne f das der linearen Abbildung F' entsprechende $(r+1)$-Feld.

Sei σ eine r-Form über M. Dann ist

$$\int_M \sigma \cdot t = F(\operatorname{rot} \sigma) = F'(\operatorname{rot} \sigma) = \int_M (\operatorname{rot} \sigma) \cdot f = \int_M \sigma \cdot \operatorname{div} f ,$$

also

$$\int_M \sigma \cdot (t - \operatorname{div} f) = 0 .$$

Da die letzte Gleichung für jedes σ gilt, ist nach einem obigen Satze $t - \operatorname{div} f = 0$, wie behauptet.

THEOREM 13. *Sei ω eine r-Form über M. Für jedes divergenzfreie r-Feld x über M gelte ${}_M\int \omega \cdot x = 0$. Dann ist ω eine derivierte Form.*

BEWEIS. Sei $\Delta_{r-1}(M)$ der lineare Raum derjenigen $(r-1)$-Felder über M, die Divergenz von r-Feldern sind. Für jedes Feld $x = \operatorname{div} y$ aus $\Delta_{r-1}(M)$ setzen wir

$$\Phi(x) = \int_M \omega \cdot y .$$

Zum Nachweis, dass Φ eindeutig ist, sei $x = \operatorname{div}\bar{y}$. Dann ist

$$\int_M \omega \cdot y - \int_M \omega \cdot \bar{y} = \int_M \omega \cdot (y - \bar{y}) .$$

Andererseits ist $\operatorname{div} y = \operatorname{div}\bar{y}$, daher $y - \bar{y}$ divergenzfrei und nach Voraussetzung also das letzte Integral Null.

Offenbar ist Φ eine lineare Abbildung von $\Delta_{r-1}(M)$ in die Menge R der reellen Zahlen. Sei $\Gamma_{r-1}(M)$ der lineare Raum der $(r-1)$-Felder über M und Φ': $\Gamma_{r-1}(M) \to R$ eine lineare Fortsetzung von Φ über $\Gamma_{r-1}(M)$. Im Sinne des letzten Abschnittes bezeichne φ die der linearen Abbildung Φ' entsprechende $(r-1)$-Form.

Sei t ein r-Feld über M. Dann ist

$$\int_M \omega \cdot t = \Phi(\operatorname{div} t) = \Phi'(\operatorname{div} t) = \int_M \varphi \cdot \operatorname{div} t = \int_M (\operatorname{rot} \varphi) \cdot t ,$$

also

$$\int_M (\omega - \operatorname{rot} \varphi) \cdot t = 0 .$$

Da die letzte Gleichung für jedes t gilt, ist nach einem obigen Satze $\omega - \operatorname{rot}\varphi = 0$, wie behauptet.

6. Die Divergenzgruppen.

Bekanntlich lässt sich jedem reellen r-Cozyklus derart eine geschlossene r-Form zuordnen, dass diese Zuordnung den de Rhamschen Isomorphiesatz liefert. Entsprechend kommt jedem reellen r-Zyklus ein divergenzfreies r-Feld zu. Man vergleiche auch [2, p. 87–101].

Theorem 14. *Zu jedem reellen r-Zyklus z in M gibt es genau ein divergenzfreies schiefsymmetrisches r-kontravariantes Tensorfeld t über M derart, dass*

$$\int_z \omega = \int_M \omega \cdot t$$

für alle r-Formen ω über M.

Beweis. Setzt man $f(\omega) = {}_z\!\int \omega$ für alle ω, so ist f eine lineare Abbildung des linearen Raumes der r-Formen über M in die reellen Zahlen. Nach Theorem 11 gibt es genau ein schiefsymmetrisches r-kontravariantes Tensorfeld t über M mit ${}_M\!\int \omega \cdot t = f(\omega)$ für alle ω. Andererseits ist

$$\int_M \omega \cdot t = \int_z \omega = \int_z d\eta = \int_{\partial z} \eta = 0$$

für jede derivierte Form $\omega = d\eta$. Nach Theorem 10 ist also $\operatorname{div} t = 0$.

THEOREM 15. *Sei $H_r(M)$ die reelle r-dimensionale Homologiegruppe von M. Setzt man dann $\Phi\{z\}=\{t\}$ für jede Homologieklasse $\{z\}$ aus $H_r(M)$, wobei t das nach Theorem 14 zu z gehörige divergenzfreie r-Feld bedeutet. so ist Φ eindeutig.*

BEWEIS. In Theorem 15 bedeutet $\{t\}$ natürlich die Divergenzklasse von t. Seien jetzt $z_1 \sim z_2$ Zyklen aus $\{z\}$ und t_i das z_i entsprechende Feld im Sinne von Theorem 14. Nach Theorem 12 ist nur zu zeigen, dass $_M\int \omega\cdot(t_1-t_2)=0$ für jede geschlossene r-Form ω. Nun ist

$$\int_M \omega\cdot(t_1-t_2) = \int_{z_1}\omega - \int_{z_2}\omega = \int_{\partial C}\omega = \int_C d\omega = 0\,,$$

wie behauptet.

THEOREM 16. *Seien z_1, z_2 zwei reelle r-Zyklen über M und t_i das zu z_i gehörige divergenzfreie r-Feld im Sinne von Theorem 14. Gehören dann t_1 und t_2 zur gleichen Divergenzklasse, so ist $z_1 \sim z_2$.*

BEWEIS. Es genügt zu zeigen, dass $(z_1-z_2)\cdot c=0$ für jeden reellen r-Cozyklus c. Nun gibt es zu jedem reellen r-Cozyklus c und zu jedem reellen r-Zyklus z eine geschlossene r-Form ω mit $_z\int\omega=z\cdot c$. Daher genügt es zu zeigen, dass

$$\int_{z_1-z_2}\omega = 0 \qquad \text{für jede geschlossene } r\text{-Form } \omega\,.$$

Wie man dem Beweise von Theorem 14 entnimmt, entspricht dem Zyklus z_1-z_2 gerade das Feld t_1-t_2. Also ist

$$\int_{z_1-z_2}\omega = \int_M \omega\cdot(t_1-t_2) = \int_M \omega\cdot\operatorname{div} T = 0\,,$$

woraus der vorstehende Satz folgt.

THEOREM 17. *Sei $\Delta^r(M)$ der lineare Raum der Coklassen geschlossener r-Formen über M und $\Delta_r(M)$ der lineare Raum der Divergenzklassen divergenzfreier r-Felder über M. Dann sind $\Delta^r(M)$ und $\Delta_r(M)$ isomorph.*

BEWEIS. Für jedes Element Ω aus $\Delta^r(M)$ und jedes Element T aus $\Delta_r(M)$ sei $\Omega\cdot T$ die Zahl

$$\Omega\cdot T = \int_M \omega\cdot t\,, \tag{1}$$

wo ω eine r-Form aus Ω und t ein r-Feld aus T sind. Zum Nachweis, dass $\Omega\cdot T$ eindeutig bestimmt ist, seien ω_1, ω_2 Formen aus Ω, also $\omega_1-\omega_2=\operatorname{rot}\xi$, und t_1, t_2 Felder aus T, also $t_1-t_2=\operatorname{div} s$. Dann ist

$$\int \omega_1 \cdot t_1 - \int \omega_2 \cdot t_2 = \left(\int \omega_1 \cdot t_1 - \int \omega_2 \cdot t_1\right) + \left(\int \omega_2 \cdot t_1 - \int \omega_2 \cdot t_2\right)$$
$$= \int (\operatorname{rot} \xi) \cdot t_1 + \int \omega_2 \cdot \operatorname{div} s .$$

Wegen $\operatorname{div} t_1 = 0$ ist $\int (\operatorname{rot} \xi) \cdot t_1 = 0$, wegen $\operatorname{rot} \omega_2 = 0$ ist $\int \omega_2 \cdot \operatorname{div} s = 0$.

Wir wollen zeigen, dass

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{annihilator}(\Delta_r(M)) = 0 .$$

Sei Ω_0 ein Element aus $\Delta^r(M)$ mit $\Omega_0 \cdot T = 0$ für alle T. Zu zeigen, dass $\Omega_0 = 0$. Hierzu sei ω_0 eine r-Form aus Ω_0. Dann genügt es offenbar zu zeigen, dass ω_0 deriviert ist. Da $\Omega_0 \cdot T = 0$ für alle T, ist $\int \omega_0 \cdot t = 0$ für alle divergenzfreien r-Felder t. Also ist ω_0 nach Theorem 13 deriviert. Entsprechend ist

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{annihilator}(\Delta^r(M)) = 0 .$$

Hierzu sei T_0 ein Element aus $\Delta_r(M)$ mit $\Omega \cdot T_0 = 0$ für alle Ω. Zu zeigen, dass $T_0 = 0$. Sei t_0 ein Feld aus T_0. Da $\Omega \cdot T_0 = 0$ für alle Ω, ist $\int \omega \cdot t_0 = 0$ für alle geschlossenen r-Formen ω. Also lässt sich t_0 nach Theorem 12 als Divergenz darstellen.

Nun gilt folgendes elementare *Lemma* [4, p. 345–346]. Seien H, H^* durch ein skalares Produkt gepaarte Vektorräume. Sei annihilator(H) und annihilator(H^*) beziehungsweise die Null von H^* und H. Sei $\bar{H}$ der zu H duale Vektorraum. Ordnet dann Φ jedem Element h^* aus H^* jene lineare Abbildung von H in die reellen Zahlen, also jenes Element aus $\bar{H}$ zu, das durch $[\Phi(h^*)](h) = h^* \cdot h$ bestimmt ist, so ist Φ ein Isomorphismus von H^* auf $\bar{H}$.

Sind V ein Vektorraum endlicher Dimension und $\bar{V}$ der zu V duale Vektorraum, so sind sie bekanntlich isomorph. Hieraus und aus dem vorstehenden Lemma folgt der obige Satz.

LITERATUR

1. G. Green, *An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism*, Göteborg, 1958.
2. W. V. D. Hodge, *The theory and applications of harmonic integrals*, 2nd Edition, Cambridge, 1952.
3. H. K. Nickerson, D. C. Spencer, N. E. Steenrod, *Advanced calculus*, Princeton, 1959.
4. H. Whitney, *Geometric integration theory*, Princeton, 1957.

UNIVERSITÄT FREIBURG I. BR., DEUTSCHLAND