MATH. SCAND. 11 (1962), 103–106

SUR UN THÉORÈME DE H. BOHR

M. TOMIĆ

1.

Soit E la classe des fonctions $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ régulières et bornées à l'intérieur du cercle $|z|=r<1$; c'est-à-dire la série converge et $|f(z)| \leqq 1$ pour $|z|<1$. Alors d'après le théorème bien connu de H. Bohr [2, p. 32], de $f(z) \in E$ résulte

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| \varrho^\nu \leqq 1 \qquad \text{pour} \qquad \varrho \leqq \tfrac{1}{3} .$$

L'exemple

$$f(z) = \frac{\alpha - z}{1-\alpha z}, \qquad 0<\alpha<1 ,$$

montre que la constante $\frac{1}{3}$ ne peut pas être abaissée [2, p. 34].

Dans cette note nous allons donner une nouvelle démonstration du théorème de Bohr, laquelle met en évidence le rôle de la partie réelle de $f(z)$. De cette démonstration résulte aussi que la constante $\frac{1}{3}$ peut être améliorée si $a_0=0$. La méthode de démonstration est la même que L. Fejér [1] a utilisée dans la démonstration des résultats semblables; elle est fondée sur la positivité d'une série en cosinus. Le théorème mentionné de Bohr sera une conséquence immédiate du théorème suivant.

Théorème I. *Soit* $f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ *régulière pour* $|z|<1$ *et soit*

1) $a_0 > 0$

2) $|\mathrm{Re} f(z)| \leqq 1 \qquad$ *pour* $\qquad |z| < 1$.

Alors

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| (\tfrac{1}{3})^\nu \leqq 1 .$$

Pour en déduire de ce théorème le théorème de Bohr, supposons que $f(z) \in E$, et soit a_0 un nombre complexe arbitraire, $a_0 \neq 0$, $a_0=|a_0| \exp(\varepsilon_0 i)$. Envisageons la fonction

$$f_1(z) = \exp(-\varepsilon_0 i) f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu' z^\nu .$$

Reçu le 17 février 1962.

Nous avons évidemment

$$1')\ a_0' = |a_0| > 0, \qquad |a_\nu'| = |a_\nu|, \qquad \nu = 0,1,2,\ldots,$$

$$2')\ |\mathrm{Re} f_1(z)| \leqq |f_1(z)| = |f(z)| \leqq 1, \qquad |z| < 1,$$

de sorte que $f_1(z)$ satisfait aux conditions 1) et 2) du Théorème I et en tenant compte de 1') on a

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu'|(\tfrac{1}{3})^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|(\tfrac{1}{3})^\nu \leqq 1 .$$

Le fait que la constante $\frac{1}{3}$ peut être améliorée si $a_0 = 0$, résulte du théorème suivant, dont la démonstration est fondée sur le même procédé.

Théorème II. *Soit* $f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu z^\nu$ *régulière pour* $|z| < 1$, *et soit*

1) $a_1 > 0$,

2) $|f(z)| \leqq 1$ *pour* $|z| < 1$.

Alors

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu| (\tfrac{1}{2})^\nu \leqq 1 - \tfrac{1}{2} a_1 .$$

Dans ce cas, d'après le lemme de Schwarz on a aussi $\max_{|z|=\frac{1}{2}} |f(z)| \leqq \frac{1}{2}$.

2. Démonstration du Théorème I.

Soit $z = r\exp(\varphi i)$, $0 < r < 1$, $a_n = |a_n| \exp(\varepsilon_n i)$, $n = 0, 1, \ldots$, $\varepsilon_0 = 0$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n + i\beta_n) z^n = u(r,\varphi) + iv(r,\varphi),$$

avec

$$u(r,\varphi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\alpha_\nu \cos\nu\varphi - \beta_\nu \sin\nu\varphi) r^\nu .$$

Utilisant les formules connues

$$(1)\qquad \begin{aligned} a_\nu r^\nu &= (\alpha_\nu + i\beta_\nu) r^\nu = \pi^{-1} \int_0^{2\pi} u(r,\varphi) \exp(-\nu\varphi i)\, d\varphi, \qquad \nu > 0, \\ \alpha_0 &= a_0 = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} u(r,\varphi)\, d\varphi, \end{aligned}$$

et multipliant par $\varrho^\nu \exp(-i\varepsilon_\nu)$ où ϱ est un paramètre < 1, on obtient par une intégration terme à terme

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| \varrho^\nu r^\nu = \pi^{-1} \int_0^{2\pi} u(r,\varphi) \left(\tfrac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varrho^\nu \exp(-\nu\varphi - \varepsilon_\nu) i \right) d\varphi$$

$$(2) \qquad = \pi^{-1} \int_0^{2\pi} u(r,\varphi) \left(\tfrac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varrho^\nu \cos(\nu\varphi + \varepsilon_\nu) \right) d\varphi -$$

$$- i\pi^{-1} \int_0^{2\pi} u(r,\varphi) \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \varrho^\nu \sin(\nu\varphi + \varepsilon_\nu) \right) d\varphi \, .$$

Étant donné que le membre gauche de cette identité est réel et que chaque intégrande au second membre est aussi réelle, on conclut que l'intégrale derrière i est égale à zéro, donc

$$(3) \quad \begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| \varrho^\nu r^\nu &\leqq \pi^{-1} \int_0^{2\pi} |u(r,\varphi)| \left| \tfrac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varrho^\nu \cos(\nu\varphi + \varepsilon_\nu) \right| d\varphi \\ &\leqq \pi^{-1} \max_{0 \leqq \varphi \leqq 2\pi} |u(r,\varphi)| \int_0^{2\pi} \left| \tfrac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varrho^\nu \cos(\nu\varphi + \varepsilon_\nu) \right| d\varphi \, . \end{aligned}$$

De

$$\tfrac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varrho^\nu \cos(\nu\varphi + \varepsilon_\nu) \geqq \tfrac{1}{2} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \varrho^\nu = \tfrac{1}{2} - \frac{\varrho}{1-\varrho} \, ,$$

résulte pour $\varrho \leqq \frac{1}{3}$ la positivité de la série en cosinus au membre gauche de cette inégalité. Or, dans la dernière intégrale dans (3), pour $\varrho \leqq \frac{1}{3}$ l'intégrande peut être prise sans le signe de la valeur absolue. En décomposant alors $\cos(\nu\varphi + \varepsilon_\nu)$ en $\cos\nu\varphi \cos\varepsilon_\nu - \sin\nu\varphi \sin\varepsilon_\nu$, après une intégration terme à terme, il vient de (3)

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| \varrho^\nu r^\nu \leqq \max_{0 \leqq \varphi \leqq 2\pi} |u(r,\varphi)|, \qquad \varrho \leqq \tfrac{1}{3} \, ,$$

d'où il en résulte le théorème I en prenant $\varrho = \frac{1}{3}$ et en faisant tendre $r \to 1-0$ d'une façon monotone.

3. Démonstration du Théorème II.

Posons, avec $0 < r < 1$,

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu r^\nu \exp(\nu\varphi i) \, .$$

où $a_1 > 0$, $a_\nu = |a_\nu| \exp(\varepsilon_\nu i)$, $\nu > 1$, et

$$f_1(z) = \exp(-\varphi i) f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu r^\nu \exp[(\nu-1)\varphi i] = u^*(r,\varphi) + i v^*(r,\varphi) \, ,$$

où

$$u^*(r,\varphi) = a_1 r + \sum_{\nu=2}^{\infty} \left(\alpha_\nu \cos(\nu-1)\varphi - \beta_\nu \sin(\nu-1)\varphi\right) r^\nu .$$

Des formules

$$2a_1 r = \pi^{-1} \int_0^{2\pi} u^*(r,\varphi)d\varphi, \qquad a_\nu r^\nu = \pi^{-1} \int_0^{2\pi} u^*(r,\varphi) \exp[-(\nu-1)\varphi i]\, d\varphi ,$$

par des raisons analogues avec (3), on aura pour $\varrho < 1$,

$$2a_1 r\varrho + \sum_{\nu=2}^{\infty} |a_\nu|\, r^\nu \varrho^\nu = \pi^{-1} \int_0^{2\pi} u^*(r,\varphi) \left[\varrho + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varrho^{\nu+1} \exp[(-\nu\varphi - \varepsilon_{\nu+1})i]\right] d\varphi ,$$

d'où il s'ensuit

$$\begin{aligned} &2a_1 r\varrho + \sum_{\nu=2}^{\infty} |a_\nu| r^\nu \varrho^\nu \\ (4) \qquad &\leqq \pi^{-1}\varrho \max_{0\leqq\varphi\leqq 2\pi} |u^*(r,\varphi)| \int_0^{2\pi} \left| 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varrho^\nu \cos(\nu\varphi + \varepsilon_{\nu+1}) \right| d\varphi . \end{aligned}$$

D'une part on a

$$|u^*(r,\varphi)| = |\mathrm{Re} \exp(-\varphi i) f(z)| \leqq |f(z)| \leqq 1 ,$$

et d'autre part de

$$1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varrho^\nu \cos(\nu\varphi + \varepsilon_{\nu+1}) > 1 - \frac{\varrho}{1-\varrho}$$

résulte la positivité de la série en cosinus au membre gauche de cette inégalité pour $\varrho \leqq \frac{1}{2}$. En prenant alors pour $\varrho \leqq \frac{1}{2}$ l'intégrande dans la dernière intégrale sans le signe de la valeur absolue, après une décomposition de $\cos(\nu\varphi + \varepsilon_{\nu+1})$ et après une intégration terme à terme il vient de (4)

$$2a_1 r\varrho + \sum_{\nu=2}^{\infty} |a_\nu| r^\nu \varrho^\nu \leqq 2\varrho \leqq 1 ,$$

d'où en prenant $\varrho = \frac{1}{2}$ et en faisant tendre $r \to 1-0$ on a

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu| (\tfrac{1}{2})^\nu \leqq 1 - \tfrac{1}{2} a_1 ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

BIBLIOGRAPHIE

1. L. Fejér, *Über die Positivität von Summen die nach trigonometrischen oder Legendreschen Funktionen fortschreiten*, Acta Litterarum ac Scientiarum Szeged 2 (1925), 75–86.
2. E. Landau, *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie*, Berlin, 1928.

ISTARSKA 22, BELGRADE, YUGOSLAVIA