MATH. SCAND. 12 (1963), 117–128

QUELQUES REMARQUES SUR UNE CONSTRUCTION DE SCHENSTED

M. P. SCHÜTZENBERGER

1. Introduction.

Soit N l'ensemble des entiers positifs et $\alpha\colon A \to B$, une bijection d'un sous-ensemble $A \subset \mathsf{N}$ sur un autre sous-ensemble $B \subset \mathsf{N}$. C. Schensted [1] a découvert une construction remarquable qui associe de façon injective à $\alpha\colon A \to B$ une paire $\big(P(\alpha,A),\, Q(\alpha,B)\big)$ de tableaux standards de même forme.

Nous nous proposons de montrer ici que $Q(\alpha,B)$ est en fait égal à $P(\alpha^{-1},B)$ et qu'il existe une relation simple entre $Q(\alpha,B)$ et la factorisation de la suite $\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_i, \ldots$ (où $A = \{a_1 < a_2 < \ldots < a_i < \ldots\}$) en séquences croissantes maximales.

Pour simplifier les notations nous considérerons les tableaux standards comme des éléments particuliers du module $\mathscr{T}$ des applications de $\mathsf{N} \times \mathsf{N}$ dans Z bien que seules interviennent réellement les structures d'ordre de ces ensembles. Pour tout $P \in \mathscr{T}$ on définira la *forme* $|P|$ de P comme l'ensemble des $(i,j) \in \mathsf{N} \times \mathsf{N}$ tels que $P_{i,j} \neq 0$; le *contenu* $\{P\}$ de P sera l'image par P de $|P|$ dans Z. L'element P est *standard* si les conditions suivantes sont satisfaites:

1. Si (i,j) n'appartient pas à $|P|$, alors ni $(i+1,j)$ ni $(i,j+1)$ n'appartiennent à $|P|$.
2. La restriction de P à $|P|$ est non décroissante en chacun de ses arguments et $\{P\}$ est un ensemble d'entiers positif.
3. La restriction de P à $|P|$ est une bijection sur $\{P\}$.

Quand $P\colon |P| \to \{P\}$ est une bijection on dénotera par P^{-1} l'application inverse; pour tout $a \in \mathsf{Z}\setminus\{0\}$ et tout $(i,j) \in \mathsf{N} \times \mathsf{N}$, $a_{i,j}$ sera l'élément de $\mathscr{T}$ défini par les conditions $|a_{i,j}| = (i,j)$ et $\{a_{i,j}\} = a$.

Rappelons la construction de Schensted. Si P est un tableau standard et si $a \in \mathsf{N}\setminus\{P\}$, on montre qu'il existe un et un seul tableau standard P' (désigné par $P \leftarrow a$) qui satisfasse les conditions suivantes:

4. $|P| \subset |P'|$ et $\{P'\} = \{P\} \cup \{a\}$.

Reçu le 12. février, 1963.

5. $P'_{1,j_1}=a$ pour un certain $j_1 \in \mathsf{N}$; pour chaque $i \in \mathsf{N}$ il existe au plus un $j \in \mathsf{N}$ tel que $P_{i,j} \neq P'_{i,j}$; en outre, dans ce cas, il existe un $j' \leqq j$ tel que $P_{i,j}=P'_{i+1,j'}$.

De façon analogue, Schensted note $a \rightarrow P$ le tableau standard $(P^T \leftarrow a)^T$, où ^{T} indique la transposition.

Soit maintenant $\alpha: A \rightarrow B$ comme plus haut. Pour tout sous-ensemble fini A' de A et tout entier non négatif m, on posera

$$P(\alpha, A_m') = 0 \quad \text{si} \quad m=0\,,$$

et, inductivement,

$$P(\alpha, A_m') = P(\alpha, A'_{m-1}) \leftarrow \alpha a_m' \quad \text{si} \quad 0<m\leqq \operatorname{Card} A'$$

où a_m' dénote le m-ième élément de A' par ordre croissant;

$$P(\alpha, A_m') = P(\alpha, A_n') = P(\alpha, A') \quad \text{si} \quad m \geqq \operatorname{Card} A' = n\,.$$

Il est logique de considérer ici $0 \leftarrow \alpha a_1'$ comme le tableau standard $(\alpha a_1')_{1,1}$ et, par conséquent, $P(\alpha, A')$ est exactement le P-symbole de Schensted de la séquence $(\alpha a_1', \alpha a_2', \ldots, \alpha a_n')$. De même:

$$\begin{aligned} Q(\alpha, A_0') &= 0; \\ Q(\alpha, A_m') &= Q(\alpha, A'_{m-1}) + (a_m')_{i,j} \quad \text{pour} \quad 0<m\leqq \operatorname{Card} A' \end{aligned}$$

avec $(i,j)=|P(\alpha, A_m')| \setminus |P(\alpha, A'_{m-1})|$,

$$Q(\alpha, A_m') = Q(\alpha, A_n') = Q(\alpha, A') \quad \text{pour} \quad m \geqq \operatorname{Card} A' = n\,.$$

Quand $A'=[1,n]$ ceci est la définition même du Q-symbole de Schensted de $(\alpha a_1', \alpha a_2', \ldots, \alpha a_n')$, et pour A' quelconque, $Q(\alpha, A')$ se déduit simplement de ce Q-symbole en remplaçant dans ce dernier tableau chaque $m \in [1,n]$ par a_m'.

Posons $\|0\|=0$ et pour chaque $T \in \mathscr{T} \setminus \{0\}$,

$$\|T\|^{-1} = \operatorname{Min}\big(i+j-1:\ (i,j) \in |T|\big)\,.$$

Il résulte de la définition même de l'opération $\leftarrow$ que pour $A'=A$ on a

$$\lim_{m,m'\to\infty} \|P(\alpha, A_m) - P(\alpha, A_{m'})\| = \lim_{m,m'\to\infty} \|Q(\alpha, A_m) - Q(\alpha, A_{m'})\| = 0\,.$$

On pourra donc toujours définir

$$P(\alpha, A) = \lim_{m\to\infty} P(\alpha, A_m) \quad \text{et} \quad Q(\alpha, A) = \lim_{m\to\infty} Q(\alpha, A_m)\,.$$

Les notations qui viennent d'être introduites seront systématiquement utilisées dans tout ce qui suit.

2. L'opération Δ.

Soit $Q = Q(\alpha, A_m) \neq 0$, $m < \infty$. On définit un autre tableau standard $Q' = \Delta Q(\alpha, A_m)$ et une séquence $|U_m| = ((i_1,j_1), (i_2,j_2), \ldots, (i_p,j_p))$ d'éléments de $|Q|$ par les conditions suivantes:

$$(i_1,j_1) = (1,1) \tag{1}$$

et, pour chaque $k \in [1,p-1]$,

$$(i_{k+1},j_{k+1}) = (i_k+1,j_k) \quad \text{ou} = (i_k,j_k+1);$$

$$\begin{aligned} Q'_{i',j'} &= Q_{i',j'} \text{ si } (i',j') \notin |U_m|; \\ &= Q_{i,j} \text{ avec } (i,j) = (i_{k+1},j_{k+1}) \in |U_m| \end{aligned} \tag{2}$$

si $(i',j') = (i_k,j_k) \in |U_m|$ et $k \in [1,p-1]$;

$$Q'_{i',j'} = 0 \text{ si } (i',j') = (i_p,j_p)\,,$$

le dernier élément de $|U_m|$;

$$Q' \text{ est un tableau standard}\,. \tag{3}$$

De façon plus explicite, connaissant déjà $(i',j') = (i_k,j_k) \in |U_m|$, on pose $k = p$ (c'est-à-dire que l'on considerè (i',j') comme le dernier élément de $|U_m|$) si

$$Q_{i'+1,j'} = Q_{i',j'+1} = 0\,.$$

Sinon on détermine $(i_{k+1},j_{k+1}) \in |U_m|$ par les conditions

$$(i_{k+1},j_{k+1}) = (i'+1,j')$$

si $0 < Q_{i'+1,j'} < Q_{i',j'+1}$ ou si $0 = Q_{i',j'+1} < Q_{i'+1,j'}$;

$$(i_{k+1},j_{k+1}) = (i',j'+1)$$

si $0 < Q_{i',j'+1} < Q_{i'+1,j'}$ ou si $0 = Q_{i'+1,j'} < Q_{i',j'+1}$ qui assurent automatiquement que (3) est satisfaite.

Donc, $\{\Delta Q\}$ est l'ensemble $\{Q\}$ privé de son plus petit élément $Q_{1,1}$. D'après les définitions mêmes, $|U_m| \subset |U_{m+1}|$, et par conséquent,

$$|U| = \lim |U_m|, \quad \text{ainsi que} \quad \Delta Q(\alpha, A) = \lim \Delta Q(\alpha, A_m)$$

sont bien définis. Plus généralement, si $\bar{Q}$ est un autre tableau standard on a

$$\|\Delta Q - \Delta \bar{Q}\|^{-1} \geqq \|Q - \bar{Q}\|^{-1} + 1\,.$$

EXEMPLE. Si $Q = {}^{248}_{679}$ avec les notations de Schensted,

$\Delta Q = {}^{478}_{69}$, $\Delta^2 Q = \Delta(\Delta Q) = {}^{678}_{9}$, $\Delta^3 Q = {}^{78}_{9}$, $\Delta^4 Q = {}^{8}_{9}$, $\Delta^5 Q = 9$, $\Delta^6 Q = 0$.

REMARQUE 1. *Si $A \neq \emptyset$, on a identiquement*

$$\Delta Q(\alpha, A) = Q(\alpha, A \setminus \{a_1\}) .$$

DÉMONSTRATION. Le résultat peut être vérifié directement pour $\operatorname{Card} A < 2$ et, dénotant pour abréger par A' l'ensemble $A \setminus \{a_1\}$, il suffit de vérifier que, pour $m > 1$, l'égalité de $\Delta Q(\alpha, A_{m-1})$ et $Q(\alpha, A'_{m-2})$ entraîne celle de $\Delta Q(\alpha, A_m)$ et $Q(\alpha, A'_{m-1})$.

Par définition il existe (i,j) et $(i',j') \in \mathsf{N} \times \mathsf{N}$ tels que

$$Q(\alpha, A'_{m-1}) = Q(\alpha, A'_{m-2}) + (a_m)_{i',j'}$$

et

$$Q(\alpha, A_m) = \Delta Q(\alpha, A_{m-1}) + (a_m)_{i,j} .$$

Donc, d'après l'hypothèse d'induction,

$$\Delta Q(\alpha, A_m) = Q(\alpha, A'_{m-1}) + (a_m)_{i,j} - (a_m)_{i',j'}$$

et il ne reste qu'à vérifier $(i,j) = (i',j')$.

Rappelant le résultat fondamental de Schensted [1, lemme 6, p. 183]

$$\begin{aligned} P(\alpha, A_m) &= \big(\alpha a_1 \to P(\alpha, A'_{m-2})\big) \leftarrow \alpha a_m \\ &= \alpha a_1 \to \big(P(\alpha, A'_{m-2}) \leftarrow \alpha a_m\big) \end{aligned}$$

et utilisant l'identité de forme des P-symboles et des Q-symboles on a

$$|Q(\alpha, A_{m-1})| \setminus |Q(\alpha, A'_{m-2})| = (i'',j'')$$

et

$$|Q(\alpha, A_m)| \supset |Q(\alpha, A'_{m-2})| \cup \{(i,j), (i',j'), (i'',j'')\} .$$

Distinguons maintenant deux cas:

1° $(i'',j'') \neq (i,j)$. Par conséquent,

$$|Q(\alpha, A_m)| = |Q(\alpha, A'_{m-2})| \cup \{(i,j), (i'',j'')\} .$$

La commutativité des opérations $\to$ et $\leftarrow$ implique la relation

$$Q(\alpha, A_m) - Q(\alpha, A_{m-1}) = Q(\alpha, A'_{m-1}) - Q(\alpha, A'_{m-2}) = (a_m)_{i,j} .$$

Donc, $(i,j) = (i',j')$ puisque le tableau obtenu en remplaçant a_m par zéro dans $\Delta Q(\alpha, A_m)$ est égal à $\Delta Q(\alpha, A_{m-1})$, c'est-à-dire à $Q(\alpha, A'_{m-2})$ par l'hypothèse d'induction.

2° $(i'',j'') = (i,j)$. Par conséquent,

$$|Q(\alpha, A_m)| = |Q(\alpha, A_{m-2})| \cup \{(i,j), (\bar{\imath},\bar{\jmath})\}$$

où $(\bar{\imath},\bar{\jmath}) = |P(\alpha, A_m)| \setminus |P(\alpha, A'_{m-1})|$. Cette dernière relation implique $(\bar{\imath},\bar{\jmath}) = (i+1,j)$ ou $(i,j+1)$ et par conséquent $|Q(\alpha, A'_{m-2})| \cup \{\bar{\imath},\bar{\jmath})\}$ n'est pas la forme d'un tableau standard. Comme $\Delta Q(\alpha, A_m)$ est un tableau standard tel que

$$|\Delta Q(\alpha, A_m)| = |Q(\alpha, A'_{m-2})| \cup \{(i',j')\} \subset |Q(\alpha, A_m)|$$

on a donc encore $(i',j') = (i,j)$ et la vérification est achevée.

PROPRIÉTÉ 1. *La correspondance de Schensted associant la paire* $(P(\alpha, A), Q(\alpha, A))$ *à* $\alpha: A \to B$ *est injective.*

DÉMONSTRATION. Le résultat plus fort prouvant, pour A fini, le caractère bijectif de la correspondance est dû à Schensted [1, lemme 3, p. 182]. Nous considérons le cas de A infini, et nous vérifions que la donnée de $P = P(\alpha, A)$ et de $Q = Q(\alpha, A)$ détermine de façon univoque a_1, αa_1, $P(\alpha, A')$ et $Q(\alpha, A')$, avec $A' = A \setminus \{a_1\}$ comme plus haut.

Pour tout m positif fini, Schensted a montré (loco citato) qu'il existe une et une seule paire (b, P_m') telle que P_m' soit un tableau standard satisfaisant les relations

$$|P_m'| = |\Delta Q(\alpha, A_m)| \quad \text{et} \quad b \to P_m' = P(\alpha, A_m);$$

la remarque 1 montre, qu'en fait, $b = \alpha a_1$, $P_m' = P(\alpha, A'_{m-1})$ et en outre

$$\{a_1\} = \{Q(\alpha, A_m)\} \setminus \{Q(\alpha, A_m')\} \quad (= \{Q\} \setminus \{\Delta Q\}).$$

De par la définition même de l'opération $\to$, on a

$$(P(\alpha, A_m))^{-1} b = (i_m', 1)$$

où i_m' est au moins égal au nombre i_m défini par

$$(i_m, j_m) = |Q(\alpha, A_m)| \setminus |\Delta Q(\alpha, A_m)|.$$

Comme $\lim i_m' = i'^* < \infty$, il en résulte

$$\lim i_m = i^* < \infty.$$

Ainsi, puisque, identiquement, $(i_m, j_m) \in |U|$ et $i_m \leqq i_{m+1}$, la valeur de i^* est déterminée de façon unique par Q. Plus précisément

$$i^* = \max_{d>0} \{i : (i,j) \in |U|, i+j = d\}$$

et les inégalités qui viennent d'être écrites montrent que ce nombre i^* est fini pour tout tableau standard qui est un Q-symbole.

Définissons maintenant pour chaque $d > i^*$ le tableau standard $P^{(d)}$ par les relations

$$\begin{aligned} P^{(d)}_{i,j} &= P_{i,j} \quad \text{si } i+j \leqq d; \\ &= 0 \qquad \text{si } i+j > d. \end{aligned}$$

D'après le résultat de Schensted rappelé plus haut, il existe pour chaque $d > i^*$ une et une seule paire $(b^{(d)}, P'^{(d)})$ satisfaisant

$$P^{(d)} = b^{(d)} \to P'^{(d)} \quad \text{et} \quad |P^{(d)}| \setminus |P'^{(d)}| = \{(i^*, d-i^*)\} .$$

C'est une propriété élémentaire de $\to$ que $b^{(d)} \leqq b$, identiquement. Par conséquent $b = \lim b^{(d)}$ et, trivialment,

$$P(\alpha, A') = \lim P'^{(d)}$$

ce qui achève la vérification.

Il est utile de noter que si $P = Q$, on a $b = P_{1,1}$ (et, par conséquent, $b = \{Q\} \setminus \{\Delta Q\}$) si et seulement si $i^* = 1$. Ceci résulte immédiatement de la remarque plus générale que S étant un tableau standard quelconque et $0 < s < S_{1,1}$, on a l'identité

$$\Delta(s \to S) = \Delta(S \leftarrow s) = S .$$

3. Factorisation en séquences croissantes.

Soit $Q = Q(\alpha, A)$ et pour m positif

$$\eta_m = \operatorname{sgn}(i' - j' - i + j)$$

où

$$(i,j) = Q^{-1} a_m \quad \text{et} \quad (i',j') = Q^{-1} a_{m+1} .$$

Par example, pour $Q = {}^{248}_{679}$ on trouve que la suite $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_5$ est égale à $+1$, -1, $+1$, $+1$, -1, les paires $(2,4)$, $(6,8)$, $(8,9)$ et $(4,6)$ illustrant respectivement les cas (1), (2), (3) et (4) énumérés plus bas. Le lien entre les Q-symboles de Schensted et le problème de Newcomb est fourni par la

Remarque 2. *Pour chaque m positif, $\eta_m = +1$ ou -1 selon que $\alpha a_m < \alpha a_{m+1}$ ou $> \alpha a_{m+1}$.*

Démonstration. Pour $a_m > a_1$ fixe, définissons

$$\bar{\eta}_m = \operatorname{sgn}(\bar{\imath}' - \bar{\jmath}' - \bar{\imath} + \bar{\jmath})$$

où

$$(\bar{\imath}, \bar{\jmath}) = (\Delta Q)^{-1} a_m, \qquad (\bar{\imath}', \bar{\jmath}') = (\Delta Q)^{-1} a_{m+1}$$

et vérifions d'abord que $\eta_m = \bar{\eta}_m$ identiquement. Pour cela, il est commode de distinguer quatre cas:

1° $i = i'$, $j = j' - 1$;
2° $i > i'$, $j < j'$;
3° $i = i' - 1$, $j = j'$;
4° $i < i'$, $j > j'$.

Ce sont les seuls possibles, car le fait que Q est standard et que $a_m < a_{m+1}$ exclut $i' \leqq i$ et $j' \leqq j$, et, d'autre part, le fait que a_m et a_{m+1} sont deux éléments consécutifs de $\{Q\}$ exclut les cas $i = i'$ et $j < j' - 1$, $i < i'$ et $j < j'$ ou $i < i' - 1$ et $j = j'$ qui entraîneraient l'existence d'un élément $a = Q_{i,j'-1}$, $= Q_{i,j'}$, ou $= Q_{i'-1,j}$, respectivement, tel que $a_m < a < a_{m+1}$.

Dans les cas 2° et 4°, puisque $(\Delta Q)^{-1}a_m = (i,j)$, $(i-1,j)$ ou $(i,j-1)$ et $(\Delta Q)^{-1}a_{m+1} = (i',j')$, $(i'-1,j')$ ou $(i',j'-1)$ et puisque ΔQ est standard, on obtient directement l'égalité $\eta_m = \bar{\eta}_m$ cherchée. Traitons en détails les sous-cas suivant du cas 1°:

1.1° $i > 1$ et $(i-1,j+1)\big(= (i-1,j')\big) \in |U|$. Dans ce cas $(\Delta Q)^{-1}a_m = Q^{-1}a_m$ et $(\Delta Q)^{-1}a_{m+1} = (i-1,j')$ ou $= (i,j')$ selon que (i,j') appartient ou non à $|U|$. Donc $\eta_m = \bar{\eta}_m$.

1.2° $i > 1$ et $(i-1,j) \notin |U|$. Puisqu'il n'existe aucun élément de $\{Q\}$ entre a_m et a_{m+1} on a $Q_{i-1,j+1} < a_m$. Donc $(i-1,j+1) \in |U|$ et on est ramené au cas précédent.

1.3° $j > 1$ et $(i,j-1) \in |U|$. Ou bien $(\Delta Q)^{-1}a_m = (i,j)$ et $(\Delta Q)^{-1}a_{m+1} = (i',j')$ ou bien $(i,j) \in |U|$. Dans ce dernier cas le fait que a_m et a_{m+1} sont consécutifs entraîne $a_{m+1} < Q_{i+1,j+1}$ ou $0 = Q_{i+1,j+1}$; donc $(i',j') \in |U|$, $(\Delta Q)^{-1}a_{m+1} = (i,j)$, et enfin $\eta_m = \bar{\eta}_m$.

1.4° Dans tous les cas restants,

$$(\Delta Q)^{-1}a_m = (i,j) \quad \text{et} \quad (\Delta Q)^{-1}a_{m+1} = (i',j')\,.$$

Donc $\eta_m = \bar{\eta}_m$.

Ceci achève l'examen du cas 1° et le cas 3° pouvant être traité de façon absolument analogue, nous ne répéterons pas la discussion.

Considérons maintenant le Q-symbole Q_m relatif à α et à l'ensemble $\{a_m, a_{m+1}, \ldots\}$. De par la définition même des Q-symboles on a

$$Q_m{}^{-1}a_m = (1,1) \quad \text{et} \quad Q_m{}^{-1}a_{m+1} = (1,2) \text{ ou } = (2,1)$$

selon que $\alpha a_m < \alpha a_{m+1}$ ou $\alpha a_m > \alpha a_{m+1}$. Puisque, d'après la remarque 1, Q_m est égal à $\Delta^{m-1}Q$ pour chaque m positif la remarque 2 résulte directement de $\eta_m = \bar{\eta}_m$ par induction sur m.

Il resulte de cette remarque que si $a_i < a_{i+1} < \ldots < a_{i+m}$ est une séquence d'éléments consécutifs de A tels que $\alpha a_i < \alpha a_{i+1} < \ldots < \alpha a_{i+m}$, ces éléments figurent dans des colonnes *distinctes* de $Q(\alpha, A)$. En conjonction avec la formule $Q(\alpha,A) = P(\alpha^{-1},B)$ vérifiée ci-dessous, ceci montre que les « modified standard tables » de Schensted [1, part II] n'ont aucune colonne possédant deux entrées positives égales.

4. La formule $Q(\alpha, A) = P(\alpha^{-1}, B)$.

Soient a_p et $a_{p'}$ deux éléments d'un sous-ensemble quelconque A' de A.

Nous définissons le déplacement $\mathrm{Dp}(a_p, a_{p'}, \alpha, A')$ de $\alpha a_{p'}$ par αa_p dans la construction de $P(\alpha, A')$ par les règles suivantes:

$$\mathrm{Dp}(a_p, a_{p'}, \alpha, A') = 0$$

si $p' > p$ ou si $p' < p$ et si $P(\alpha, A'_{p-1})^{-1} a_{p'} = P(\alpha, A_p')^{-1} a_{p'}$;

$$= \big((0,0),\, (i,j)\big)$$

$\big($où $(i,j) = P(\alpha, A_p')^{-1} a_p\big)$ si $p = p'$;

$$= \big((i',j'),\, (i,j)\big)$$

$\big($où $(i',j') = P(\alpha, A'_{p-1})^{-1} a_{p'}$ et $(i,j) = P(\alpha, A_p')^{-1} a_{p'}\big)$ si $p' < p$ et $i \neq i'$.

Dans les deux derniers cas on dira encore que αa_p *déplace* $\alpha a_{p'}$ *de* (i',j') *à* (i,j), la valeur $(0,0)$ de (i',j') pour $a_p = a_{p'}$ étant évidemment purement conventionnelle. De par la définition même de l'opération $\leftarrow \alpha a_p$ si $(i',j') \neq (0,0)$ on a nécessairement $i' = i + 1$ et $j < j'$; en outre on observera que ce déplacement se produit si et seulement s'il existe $a'' \in A'$ tel que $\alpha a_p \leqq \alpha a'' < \alpha a_{p'}$ et que $\mathrm{Dp}(a_p, a'', \alpha, A') = \big((i'',j''),\, (i',j')\big)$. Donc, dans tous les cas,

$$\begin{aligned}&\mathrm{Dp}(a_p, a_p{}', \alpha, A')\\ &\quad = \mathrm{Dp}\big(a_p, a_{p'}, \alpha, \{a_{p''} \in A' \colon\ p'' \leqq p;\ \alpha a_{p''} < \alpha a_p;\ \alpha a_p \leqq \alpha a_{p''}\}\big)\,.\end{aligned}$$

Ces notations sont étendues de façon évidente à la bijection $\alpha^{-1} \colon B \to A$ et aux sous-ensembles B' de B.

REMARQUE 3. *Pour tout* $a, a' \in A$, *on a*

$$\mathrm{Dp}(a, a', \alpha, A) = \mathrm{Dp}(\alpha a', \alpha a, \alpha^{-1}, B)\,.$$

DÉMONSTRATION. Il suffit évidemment de vérifier l'énoncé pour tous les ensembles finis et, procédant par induction, nous supposerons $A = A_n$, $B = B_n$ $(n < \infty)$ et que le résultat est déjà établi pour chacun des sous-ensembles propres de A.

Soit $a^* = \alpha^{-1} b_n$ où, comme toujours, $b_n = \max\{b \colon b \in B\}$. Si a, $a' \in A \setminus \{a^*\}$, on a rappelé plus haut que

$$\mathrm{Dp}(a, a', \alpha, A) = \mathrm{Dp}(a, a', \alpha, A \setminus \{a^*\})$$

et

$$\mathrm{Dp}(\alpha a', \alpha a, \alpha^{-1}, B) = \mathrm{Dp}(\alpha a', \alpha a, \alpha^{-1}, B_{n-1})\,.$$

Donc, dans ce cas, la relation cherchée se déduit immédiatement de l'hypothèse d'induction. En raison de la symétrie de l'énoncé (entre $\alpha \colon A \to B$ et $\alpha^{-1} \colon B \to A$), il ne reste à discuter que les deux cas où

1° soit $a = a^*$, $a' = a_n$;

2° soit $a = a_n$, $a' = a^*$, avec $a_n \neq a^*$.

Cas 1°. D'après la définition même de $\leftarrow \alpha a^*$ et le fait que αa^* est plus grand que tous les éléments de $\{P(\alpha, A)\}$, l'ensemble des éléments déplacés par αa^* se réduit à αa^* lui-même. Donc, si $a^* \neq a_n$, on a

$$0 = \mathrm{Dp}(a, a', \alpha, A) = \mathrm{Dp}(\alpha a', \alpha a, \alpha^{-1}, B) .$$

Au contraire, si $a^* = a_n$, $\mathrm{Dp}(a, a', \alpha, A) = ((0,0), (1,j))$ où j est le plus petit entier tel que $(1,j) \notin |\mathrm{P}(\alpha, A_{n-1})|$. La même observation vaut pour $\mathrm{Dp}(\alpha a', \alpha a, \alpha^{-1}, B)$ avec cette fois $(1,j') \notin |P(\alpha^{-1}, B_{n-1})|$ et l'égalité des deux déplacements résulte de l'hypothèse d'induction qui implique

$$|P(\alpha, A_{n-1})| = |Q(\alpha^{-1}, \alpha^{-1}A_{n-1})| = |P(\alpha^{-1}, B_{n-1})|$$

puisque dans le cas examiné ici $\alpha A_{n-1} = B_{n-1}$.

Cas 2°. Considérons d'abord le cas où

$$\mathrm{Dp}(a, a', \alpha, A) = ((i,j), (i+1, \bar{j})) .$$

Ceci implique $P(\alpha, A_{n-1})^{-1} b_n = (i,j)$ et, par conséquent, l'existence de $x \in A_{n-1}$ tel que αx ait déplacé b_n de (i',j') (qui est éventuellement $(0,0)$) à (i,j).

En outre il doit exister $y \in A_{n-1}$ tel que $\alpha a_n \leqq \alpha y < b_n$ et que αa_n déplace αy de (i'',j'') à (i,j). De fait αy est le plus grand des éléments de B_{n-1} qui soit déplacé par αa_n. Appliquant l'hypothèse d'induction à $A \setminus \{a^*\} = a^{-1} B_{n-1}$, on en conclut que y est le dernier élément de B_{n-1} déplaçant $a = a_n$ dans $P(\alpha^{-1}, B_{n-1})$ et que par conséquent,

$$P(\alpha^{-1}, B_{n-1})^{-1} a = (i,j) .$$

De façon analogue, l'hypothèse d'induction appliquée à A_{n-1} montre que $a' = \alpha^{-1} b_n$ déplace x de (i',j') à (i,j) dans $P(\alpha^{-1}, A_{n-1})$.

Comme $x < a_n$ il en résulte que l'operation $\leftarrow a'$ déplace $a = a_n$ de (i,j) en $(i+1, \bar{\bar{j}})$ ce qui achève la vérification dans ce cas puisque, trivialement, $\bar{j} = \bar{\bar{j}}$, ces deux nombres ne dépendant que des formes

$$|P(\alpha, A_{n-1} \setminus \{a^*\})| \qquad \text{et} \qquad |P(\alpha^{-1}, B_{n-1} \setminus \{\alpha a_n\})|$$

qui sont identiques d'après l'hypothèse d'induction.

En raison de la symétrie, on a établi du même coup que $\mathrm{Dp}(a_n, a^*, \alpha, A) = 0$ si et seulement si $\mathrm{Dp}(b_n, \alpha a_n, \alpha^{-1}, B) = 0$ ce qui termine la vérification de la remarque.

Observons maintenant que la construction qui vient d'être discutée donne

$$P(\alpha^{-1}, \alpha A_n) = P(\alpha^{-1}, \alpha A_{n-1}) + (a_n)_{i,j}$$

où $(i,j) = |P(\alpha, A_n)| \setminus |P(\alpha, A_{n-1})|$. Donc, supposant déjà établi que $P(\alpha^{-1}, \alpha A_{n-1}) = Q(\alpha, A_{n-1})$, on a encore

$$P(\alpha^{-1}, \alpha A_n) = Q(\alpha, A_n)$$

et, par induction, dans tous les cas,

$$P(\alpha^{-1}, B) = Q(\alpha, A)$$

ce qui est la formule cherchée.

Donnons une application de cette remarque au cas particulier de $A = B$.

Propriété 2. *Une condition nécessaire et suffisante pour que $\alpha: A \to A$ soit une involution est que $P(\alpha, A) = Q(\alpha, A)$.*

Démonstration. Il est trivial que $A = B$ et $\alpha = \alpha^{-1}$ entraînent $P(\alpha^{-1}, B) = P(\alpha, A)$, c'est-à-dire $P(\alpha, A) = Q(\alpha, A)$ d'après la formule vérifiée dans cette section.

Réciproquement, supposons $P(\alpha, A) = Q(\alpha, A)$ et montrons qu'il en résulte $a_1 = b_1$, $\alpha a_1 = \alpha b_1$,

$$P(\alpha, A \setminus \{a_1, \alpha a_1\}) = Q(\alpha, A \setminus \{a_1, \alpha a_1\})$$

ce qui, par induction, établit la propriété.

Revenant aux notations de la fin de la section 2, nous distinguons deux cas selon que $i^* > 1$ ou $i^* = 1$.

1° $i^* > 1$. On a $\Delta Q(\alpha, A) = Q(\alpha, A \setminus \{a_1\})$ et l'on sait en déduire αa_1 et $P(\alpha, A \setminus \{a_1\})$. D'après la formule de la présente section

$$P(\alpha, A \setminus \{a_1\}) = Q(\alpha^{-1}, B \setminus \{\alpha a_1\}) .$$

Donc par la remarque 1:

$$\Delta P(\alpha, A \setminus \{a\}) = \Delta Q(\alpha^{-1}, B \setminus \{\alpha a_1\}) = Q(\alpha^{-1}, B \setminus \{\alpha a_1, b_1\}) .$$

Partons maintenant de $Q(\alpha^{-1}, B)$ qui, toujours d'après la même formule, est égal à $P(\alpha, A)$. Répétant le même calcul que plus haut, on en déduit $Q(\alpha, A \setminus \{a^{-1} b_1, a_1\})$ qui est donc égal à $Q(\alpha^{-1}, B \setminus \{\alpha a_1, b_1\})$ d'après l'hypothèse $P(\alpha, A) = Q(\alpha, A)$. Une troisième application de la formule donne

$$Q(\alpha^{-1}, B \setminus \{\alpha a_1, b_1\}) = P(\alpha, A \setminus \{\alpha_1, \alpha^{-1} b_1\})$$

et le résultat est vrai dans ce cas.

2° $i^* = 1$. Dans ce cas les observations faites à la fin de la section 2 et la formule de la présente section donnent directement

$$\alpha a_1 = a_1 \quad \text{et} \quad P(\alpha, A \setminus \{a_1\}) = Q(\alpha, A \setminus \{a_1\}) .$$

La propriété est donc vérifiée dans tous les cas.

Examinons plus en détail le cas où $A = B \neq \emptyset$ est fini et $P(\alpha,A) = Q(\alpha,A)$ et, pour tout tableau standard S, dénotons par Imp$|S|$ le nombre des $j \in N$ tels qu'il existe un nombre impair de $i \in N$ pour lesquels $(i,j) \in |S|$. Il résulte des définitions que, dans le cas 2° discuté plus haut,

$$|Q(\alpha,A)| \setminus |\Delta Q(\alpha,A)| = (i,j^*)$$

et qu'il n'existe pas d'autre $i \in N$ tels que $(i,j^*) \in |Q(\alpha,A)|$. Donc

$$\mathrm{Imp}\,|Q(\alpha,A\setminus\{a_1\})| = \mathrm{Imp}\,|Q(\alpha,A)| - 1 \,.$$

Dans le cas 1° soit $(i^*,j^*) = |Q(\alpha,A)| \setminus |\Delta Q(\alpha,A)|$ où par hypothèse $i^* > 1$. Soit $|U'|$ la séquence relative à l'opération Δ dans $P(\alpha,A\setminus\{a_1\})$. Il est facile de voir qu'il existe un entier k tel que $(i_{k'},j_{k'}) \in |U|$ entraîne $(i_{k'},j_{k'}) \in |U'|$ si $k' < k$ et $(i_{k'-1},j_{k'}) \in |U'|$ si $k' \geqq k$. Il s'en déduit que

$$|P(\alpha,A\setminus\{a_1\})| \setminus |\Delta P(\alpha,A\setminus\{a_1\})| = (i^*-i,j^*)$$

et par conséquent, d'après nos remarques antérieures

$$\mathrm{Imp}\,|Q(\alpha,A\setminus\{a_1,\alpha^{-1}b_1\})| = \mathrm{Imp}\,|Q(\alpha,A)| \,.$$

Par induction, l'on conclut de ces deux relations que si α est une involution sur l'ensemble *fini* A, le nombre des éléments laissés invariants par α est précisément égal à Imp$|Q(\alpha,A)|$.

5. L'opération *I*.

Soit Q un tableau standard tel que $0 < \mathrm{Card}\{Q\} = n < \infty$. On définit $Q^I \in \mathscr{T}$ par l'équation

$$Q^I = \sum \{(a_k)_{i_k,j_k}\colon\ k \in [1,n]\}$$

où a_k désigne le k-ième élément de $\{Q\}$ par ordre croissant et où, ici $(i_k,j_k) = |\Delta^{n-k+1}Q| \setminus |\Delta^{n-k}Q|$ (avec $\Delta^0 Q = Q$). Trivialement, $\{Q\} = \{Q^I\}$, $|Q| = |Q^I|$ et $Q^{IT} = Q^{TI}$ où T indique la transposition. De plus si la bijection σ: $\{Q\}\setminus\{a_1\} \to \{Q\}\setminus\{a_n\}$ définie par $\sigma a_{k+1} = a_k$ pour $k \in [1,n-1]$ est étendue de façon naturelle à $\mathscr{T}$, on vérifie sans peine que

$$Q^I = \sigma(\Delta Q)^I + (a_n)_{i_n,j_n} \,.$$

On verra plus bas que Q^I est standard et $Q^{II} = Q$. Par exemple, pour $Q = {}^{248}_{679}$ comme plus haut,

$$Q^I = {}^{267}_{489}, \quad (\Delta Q)^I = {}^{478}_{69}, \quad \sigma(\Delta Q)^I = {}^{267}_{48} \,.$$

Soit maintenant $Q = Q(\alpha,A)$ où $0 < \mathrm{Card}\,A = n < \infty$. La bijection $\bar{\alpha}$: $A \to B$ étant définie par $\bar{\alpha} a_k = \alpha a_{n-k+1}$ pour $k \in [1,n]$, il a été prouvé par Schensted que

$$P(\bar{\alpha}, A) = P(\alpha, A)^T$$

[1, lemme 7, p. 186]. Nous vérifions par induction sur n que $Q(\bar{\alpha}, A) = Q(\alpha, A)^{IT}$ en observant que le résultat est vrai pour $n=1$ et en supposant qu'il est déjà établi pour $A' = A \setminus \{a_1\}$.

Compte tenu de la relation $\bar{\alpha}\sigma A' = A'$, et écrivant comme d'habitude A_{n-1} pour $A \setminus \{a_n\}$, ceci revient à supposer

$$Q(\bar{\alpha}, A_{n-1}) = \sigma Q(\alpha, A')^{IT} .$$

Maintenant, $Q(\bar{\alpha}, A) = Q(\bar{\alpha}, A_{n+1}) + (a_n)_{i,j}$ et, comme on l'a noté plus haut,

$$Q(\alpha, A)^{IT} = \sigma\big(\Delta Q(\alpha, A)\big)^{IT} + (a_n)_{j_n, i_n} .$$

D'après la remarque 1, $\Delta Q(\alpha, A) = Q(\alpha, A')$ et par conséquent:

$$Q(\bar{\alpha}, A) = Q(\alpha, A)^{IT} - (a_n)_{j_n, i_n} + (a_n)_{i,j} .$$

Il suffit donc de vérifier $|Q(\bar{\alpha}, A)| = |Q(\alpha, A)^{IT}|$. Or ceci résulte immédiatement de $|Q(\alpha, A)^I| = |Q(\alpha, A)|$, de l'égalité de forme des P-symboles et des Q-symboles et de l'égalité $|P(\bar{\alpha}, A)| = |P(\alpha, A)^T|$ impliquée par l'identité de Schensted. La formule est donc établie.

RÉFÉRENCES

1. C. Schensted, *Longest increasing and decreasing subsequences*, Canad. J. Math. 13 (1961), 179–192.

FACULTÉ DES SCIENCES, POITIERS, FRANCE