MATH. SCAND. 12 (1963), 147–162

COHOMOLOGIE LOCALE. APPLICATIONS

OLAV ARNFINN LAUDAL

Introduction.

Soit X un espace topologique et $x \in X$ un point. Nous allons étudier le groupe $H_q{}^p(x)$, que l'on appelera le groupe de cohomologie local de X au point x, défini par

$$H_q{}^p(x) = \lim{\uparrow}^q (H_c{}^p(U), j_U{}^V)_{U \in \mathscr{V}_x}$$

où $\lim{\uparrow}^q$ est la q-ième satellite du foncteur limite projective et où $(H_c{}^p(U), j_U{}^V)_{U \in \mathscr{V}_x}$ est le système projectif des groupes de cohomologie à support compact des voisinages ouverts de x dans X.

Ces groupes ont été étudié par Conner et Floyd [5], sous des conditions qui, en particulier, entraîne $\lim{\uparrow}^1 (H_c{}^p(U), j_U{}^V) = 0$.

Nous démontrons les résultats suivants:

Théorème 1. *Si X est localement compact et si $p^m(x,Z) < \omega$ pour tout $x \in X$ et pour tout $m \geqq 0$, alors, si X est de dimension cohomologique finie, nous avons* $\dim X \leqq n$ *si et seulement si $H_q{}^m(x) = 0$ pour tout $x \in X$, $q \geqq 0$ et pour tout $m > n$.*

Théorème 2. *Si X est localement compact et si pour $x \in X$, $p^m(x,Z) < \omega$ alors, $p^m(x,Z) = n$ existe et est fini si et seulement si $H_1{}^m(x) = 0$ et $H_0{}^m(x)$ est libre de dimension n.*

Nous pouvons dans certains cas calculer le groupe de cohomologie locale d'un produit $X \times Y$ au point (x,y) connaissant les groupes de cohomologie locaux de X au point x resp. de Y au point y. En particulier nous pouvons si X et Y sont clc. et si Y est tel que pour tout $y \in Y$, $H_1{}^k(y) = 0$ et $H_0{}^k(y)$ est de type fini, pour tout $k \geqq 0$, calculer la dimension de $X \times Y$ connaissant les groupes de cohomologie locaux de X et de Y. Aussi, il est possible d'interprèter l'accessibilité au sens d'Alexandroff [1]. En particulier, si $X \subset E^m$ est localement compact et si $x \in X$, $p^{m-s-1}(x,Z) < \omega$ alors X est s-accessible au point x si et seulement si $H_1{}^{m-s-1}(x) = 0$. Enfin nous introduisons de nouvaux groupes de cohomologie locaux, analogues aux groupes d'homologie locaux autour

Reçu le 6 Novembre, 1961.

d'un point d'Alexandroff. Il existe un diagramme reliant les groupes de cohomologie locaux au point x aux groupes de cohomologie locaux autour de x, § 4, Prop. 3.

Nous obtenons ces résultats en utilisant les résultats récents de Yeh [10] et de J. E. Roos [9] sur les foncteurs satellites de $\lim\uparrow$. Nous démontrons, § 2, Prop. 1, que si un système projectif de type fini $(F_\alpha,\eta_\alpha^{\alpha'})_{\alpha\in\Gamma}$ est tel que $\lim\uparrow^q_{\alpha\in\Gamma}(F_\alpha,\eta_\alpha^{\alpha'})=0$ pour tout $q\geqq 0$ alors pour tout $\alpha\in\Gamma$ il existe un $\alpha'>\alpha$ tel que $\operatorname{im}\eta_\alpha^{\alpha'}=0$. Ce résultat obtenu, le reste devient facile.

L'anneau des entiers rationels sera noté Z, l'ensemble des $q\in Z$, $q\geqq 0$, sera noté Z^+ et l'espace euclidien de dimension m sera noté E^m. La cohomologie sera la cohomologie au sens de Godement [6], à valeur dans le faisceau constant Z et à support compact. Les espaces sont supposés localement compacts.

1.

Soit Γ un ensemble ordonné filtrant à gauche par $>$. Nous allons considérer la catégorie des systèmes projectifs $(F_\alpha,\eta_\alpha^{\alpha'})_{\alpha\in\Gamma}$, notés aussi (F_α,η) quand il n'y a pas de danger de confusion, où les F_α sont des groupes abéliens, et où $\eta_\alpha^{\alpha'}:F_{\alpha'}\to F_\alpha$ pour $\alpha'>\alpha$ sont des homomorphismes de groupes.

Nous notons respectivement par $\lim\uparrow_\Gamma$ et $\lim\downarrow^\Gamma$ les foncteurs limites projectives et limites inductives. Pour la définition et l'existence des foncteurs satellites, voir les travaux de Yeh [10] et de Roos [9]. Ici nous allons donner les resultats qui sont nécessaires pour la suite. Les démonstrations se trouvent dans les travaux cités ci-dessus.

Définition. Le système projectif $(F_\alpha,\eta_\alpha^{\alpha'})_{\alpha\in\Gamma}$ sera dit de type fini, resp. libre, resp. fini, quand tous les F_α ont ces propriétés.

Définition. Le système projectif $(F_\alpha,\eta_\alpha^{\alpha'})$ sera dit compact si tous les F_α sont compacts et si pour tout $\alpha'>\alpha$, $\eta_\alpha^{\alpha'}$ est continu.

Définition. Le système projectif $(F_\alpha,\eta_\alpha^{\alpha'})$ sera dit surjectif si pour tout $\alpha'>\alpha$, $\eta_\alpha^{\alpha'}$ est surjectif.

Définition. Le système projectif $(F_\alpha,\eta_\alpha^{\alpha'})$ sera dit stable si pour tout $\alpha\in\Gamma$ il existe un $\alpha'\in\Gamma$, $\alpha'>\alpha$ tel que $\operatorname{im}\eta_\alpha^{\alpha''}=\operatorname{im}\eta_\alpha^{\alpha'}$ pour tout $\alpha''>\alpha'$.

Définition. Deux systèmes projectifs $(F_\alpha,\eta_\alpha^{\alpha'})_{\alpha\in\Gamma_1}$ et $(F'_\alpha,\eta'^{\alpha'}_\alpha)_{\alpha\in\Gamma_2}$ seront dits équivalents s'il existe un système projectif $(\bar F_\alpha,\bar\eta_\alpha^{\alpha'})_{\alpha\in\Pi}$, des sous-ensembles cofinals Π_1 et Π_2 de Π tels que $(F_\alpha,\eta_\alpha^{\alpha'})_{\alpha\in\Gamma_1}$ et $(\bar F_\alpha,\bar\eta_\alpha^{\alpha'})_{\alpha\in\Pi_1}$ resp. $(F'_\alpha,\eta'^{\alpha'}_\alpha)_{\alpha\in\Gamma_2}$ et $(\bar F_\alpha,\bar\eta_\alpha^{\alpha'})_{\alpha\in\Pi_2}$ sont isomorphes.

Définition. Le système projectif $(F_\alpha, \eta_\alpha^{\alpha'})_{\alpha\in\Gamma}$ sera dit flasque, si pour tout sous-ensemble $\Gamma' \subset \Gamma$ l'application canonique

$$\partial_{\Gamma'}{}^{\Gamma}: \quad \lim\uparrow_{\alpha\in\Gamma}(F_\alpha, \eta_\alpha^{\alpha'}) \to \lim\uparrow_{\alpha\in\Gamma'}(F_\alpha, \eta_\alpha^{\alpha'})$$

est surjective.

Proposition 1. *Soit* (F_α, η) *un système projectif flasque. Alors* $\lim\uparrow^q(F_\alpha, \eta) = 0$ *pour* $q > 0$.

Proposition 2. *Supposons qu'une des conditions suivantes soit satisfaite:*

a) Γ *contient une suite cofinale.*
b) $(F_\alpha, \eta_\alpha^{\alpha'})_{\alpha\in\Gamma}$ *est de type fini.*

Alors nous avons $\lim\uparrow^q{}_{\alpha\in\Gamma}(F_\alpha, \eta_\alpha^{\alpha'}) = 0$ *pour* $q > 1$.

Proposition 3. *Soit* $(F_\alpha \eta)$ *un système projectif fini. Alors* $\lim\uparrow^q(F_\alpha, \eta) = 0$ *pour tout* $q > 0$.

Remarque. Il est clair si le système projectif (F_α, η) est flasque, il est surjectif. Le contraire n'est pas vrai, voir Henkin [7].

Proposition 4. *Supposons* $\Gamma = Z^+$. *Alors, si le système projectif* $(F_\alpha, \eta_\alpha^{\alpha'})_{\alpha\in\Gamma}$ *est surjectif, il est aussi flasque.*

Proposition 5. *Soit* $\Gamma' \subset \Gamma$ *cofinal. Alors l'application canonique*

$$\partial_{\Gamma'}{}^{\Gamma}: \quad \lim\uparrow^q{}_{\alpha\in\Gamma}(F_\alpha, \eta_\alpha^{\alpha'}) \to \lim\uparrow^q{}_{\alpha\in\Gamma'}(F_\alpha, \eta_\alpha^{\alpha'})$$

est un isomorphisme pour tout système projectif (F_α, η) *et pour tout* $q \geqq 0$.

Corollaire. *Supposons que* Γ *contient une suite cofinale. Alors, si le système projectif* $(F_\alpha, \eta_\alpha^{\alpha'})$ *est surjectif, nous avons* $\lim\uparrow^q{}_{\alpha\in\Gamma}(F_\alpha, \eta_\alpha^{\alpha'}) = 0$ *pour tout* $q > 0$.

Proposition 6. *Soient* $(F_\alpha, \eta_\alpha^{\alpha'})_{\alpha\in\Gamma}$ *et* $(G_\beta, \varrho_\beta^{\beta'})_{\beta\in\Pi}$ *deux systèmes projectifs équivalents, et soit* F *un foncteur de la catégorie des groupes abéliens, à valeur dans la même catégorie. Alors*

$$\lim\uparrow^q{}_{\alpha\in\Gamma}\big(F(F_\alpha), F(\eta_\alpha^{\alpha'})\big) \cong \lim\uparrow^q{}_{\beta\in\Pi}\big(F(G_\beta), F(\varrho_\beta^{\beta'})\big) \quad \textit{pour tout } q \geqq 0\,.$$

Proposition 7. *Soit* $(F_\alpha, \eta_\alpha^{\alpha'})$ *un système projectif fini tel que pour un* $\alpha \in \Gamma$ *bien choisi et pour tout* $\alpha' > \alpha$, $\operatorname{im} \eta_\alpha^{\alpha'} \neq 0$. *Alors* $\lim\uparrow(F_\alpha, \eta) \neq 0$.

Proposition 8. *Soit* M *un groupe abélien de type fini, et supposons ou bien*

a) *Γ contient une suite cofinale,*
ou bien
b) $(F_\alpha, \eta_\alpha^{\alpha'})_{\alpha\in\Gamma}$ *est de type fini.*

Alors il existe un groupe abélien H tel que les deux suites suivantes sont exactes:

$$0 \to \lim\uparrow^1\big(\mathrm{Tor}(F_\alpha, M), \mathrm{Tor}(\eta, \mathrm{id})\big) \to H \to \lim\uparrow(F_\alpha\otimes M, \eta\otimes\mathrm{id}) \to 0\,,$$
$$0 \to \lim\uparrow(F_\alpha, \eta)\otimes M \to H \to \mathrm{Tor}\big(\lim\uparrow^1(F_\alpha,\eta), M\big) \to 0\,.$$

Proposition 9. *Soient Γ et Π filtrants à gauche. Alors il existe une suite spectrale donnée par $E_2^{p,q} = \lim\uparrow^p{}_{\alpha\in\Gamma}\lim\uparrow^q{}_{\beta\in\Pi}$ dont le terme E_∞ est le groupe bigradué associé à une filtration convenable de*

$$\sum_n \lim\uparrow^n{}_{\alpha,\beta\in\Gamma\times\Pi}\,.$$

Propositions 1, 2 et 5 sont dus à Milnor et Yeh [10]. Propositions 8 et 9 se trouvent dans Roos [9]. Les autres sont des consequences immédiates de celles-ci.

2.

Proposition 1. *Soit $(F_\alpha, \eta_\alpha^{\alpha'})_{\alpha\in\Gamma}$ un systéme projectif de type fini. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes:*

a) $\lim\uparrow^q{}_{\alpha\in\Gamma}(F_\alpha, \eta_\alpha^{\alpha'}) = 0$ *pour* $q \geqq 0$.
b) *pour tout $\alpha\in\Gamma$ il existe un $\alpha' > \alpha$ tel que* $\mathrm{im}\,\eta_\alpha^{\alpha'} = 0$.

Corollaire 1. *Soit $(F_\alpha, \eta_\alpha^{\alpha'})_{\alpha\in\Gamma}$ un système projectif de type fini tel que $\lim\uparrow(F_\alpha,\eta)$ est de type fini. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes:*

a) $\lim\uparrow^q(F_\alpha,\eta) = 0$ *pour tout* $q \geqq 1$.
b) (F_α,η) *est stable, et il existe $\alpha' > \alpha$ tels que* $\lim\uparrow(F_\alpha,\eta) \cong \mathrm{im}\,\eta_\alpha^{\alpha'}$.

Corollaire 2. *Supposons que Γ contient une suite cofinale. Soit $(F_\alpha, \eta_\alpha^{\alpha'})_{\alpha\in\Gamma}$ un système projectif de type fini. Alors les propriétées suivantes sont équivalentes:*

a) $\lim\uparrow^q{}_{\alpha\in\Gamma}(F_\alpha, \eta_\alpha^{\alpha'}) = 0$ *pour tout* $q \geqq 1$.
b) (F_α,η) *est stable.*

Remarque. D'une manière générale, soit $(F_\alpha, \eta_\alpha^{\alpha'})_{\alpha\in\Gamma}$ un système projectif; définissons un nouveau système projectif $(\bar F_{\bar\alpha}, \bar\eta_{\bar\alpha}^{\bar\alpha'})_{\bar\alpha\in\bar\Gamma}$ où $\bar\Gamma$ sera l'ensemble $\{(\alpha,\beta \mid \alpha,\beta\in\Gamma, \alpha>\beta\}$. Pour $\bar\alpha\in\bar\Gamma$, $\bar\alpha = (\alpha,\beta)$ posons $\bar F_{\bar\alpha} =$

$\operatorname{im}\eta_\beta^\alpha$. Pour $\bar{\alpha}'>\bar{\alpha}$, $\bar{\alpha}'=(\alpha',\beta')$, $\bar{\alpha}=(\alpha,\beta)$, donc $\alpha'>\alpha$, $\beta'>\beta$, l'application $\bar{\eta}_{\bar{\alpha}}^{\bar{\alpha}'}$ sera la restriction de $\eta_\beta^{\beta'}$ à $\bar{F}_{\bar{\alpha}'}\subset F_{\beta'}$.

Soit Δ la diagonale de $\Gamma\times\Gamma$, alors $\Delta\subset\bar{\Gamma}$ et $(\bar{F}_{\bar{\alpha}},\bar{\eta}_{\bar{\alpha}}^{\bar{\alpha}'})_{\bar{\alpha}\in\Delta}$ est isomorphe à $(F_\alpha,\eta_\alpha^{\alpha'})_{\alpha\in\Gamma}$. Si nous nous donnons une fonction $f\colon\Gamma\to\Gamma$ tel que $f(\alpha)>\alpha$ pour tout $\alpha\in\Gamma$, alors soit $\Delta_f=\{(f(\alpha),\alpha)\mid\alpha\in\Gamma\}$ nous avons $\Delta_f\subset\bar{\Gamma}$ et il est clair que $(\bar{F}_{\bar{\alpha}},\bar{\eta}_{\bar{\alpha}}^{\bar{\alpha}'})_{\bar{\alpha}\in\Delta_f}$ et $(F_\alpha,\eta_\alpha^{\alpha'})_{\alpha\in\Gamma}$ sont équivalents.

Supposons le système projectif $(F_\alpha,\eta_\alpha^{\alpha'})_{\alpha\in\Gamma}$ tel que, pour tout $\alpha\in\Gamma$ il existe un $\alpha'>\alpha$ tel que $\operatorname{im}\eta_\alpha^{\alpha'}$ est de type fini. Par l'axiome de choix il existe une fonction $f\colon\Gamma\to\Gamma$ tel que $f(\alpha)>\alpha$ et pour laquelle $\operatorname{im}\eta_\alpha^{f(\alpha)}$ est de type fini, pour tout $\alpha\in\Gamma$. Donc le système projectif $(F_\alpha,\eta_\alpha^{\alpha'})_{\alpha\in\Gamma}$ est équivalent au système projectif $(\bar{F}_{\bar{\alpha}},\bar{\eta}_{\bar{\alpha}}^{\bar{\alpha}'})_{\bar{\alpha}\in\Delta_f}$ lequel est de type fini. Nous pouvons remplacer *de type fini* par n'importe quelle autre propriété, la conclusion subsiste.

Supposons que $(F_\alpha,\eta_\alpha^{\alpha'})_{\alpha\in\Gamma}$ est stable, ceci veut dire que pour tout $\alpha\in\Gamma$ il existe un $\alpha'>\alpha$ tel que pour tout $\alpha''>\alpha'$, $\operatorname{im}\eta_\alpha^{\alpha''}=\operatorname{im}\eta_\alpha^{\alpha'}$. Soit $f\colon\Gamma\to\Gamma$ une fonction telle que $f(\alpha)>\alpha$ pour tout $\alpha\in\Gamma$ et telle que $\operatorname{im}\eta_\alpha^{\alpha''}=\operatorname{im}\eta_\alpha^{f(\alpha)}$ pour tout $\alpha''>f(\alpha)$. Alors le système $(\bar{F}_{\bar{\alpha}},\bar{\eta}_{\bar{\alpha}}^{\bar{\alpha}'})_{\bar{\alpha}\in\Delta_f}$ est surjectif. Donc $(F_\alpha,\eta_\alpha^{\alpha'})_{\alpha\in\Gamma}$ est équivalent à un système surjectif. Inversement, supposons que $(F_\alpha,\eta_\alpha^{\alpha'})_{\in\Gamma}$ est équivalent à un système surjectif, alors il est facile de voir que (F_α,η) est stable. En particulier, supposons que pour tout $\alpha\in\Gamma$ il existe un $\alpha'>\alpha$ tel que $\operatorname{im}\eta_\alpha^{\alpha'}=0$, alors $(F_\alpha,\eta_\alpha^{\alpha'})_{\alpha\in\Gamma}$ est équivalent au système projectif nul.

Démonstration de la Proposition 1. On voit, tenant compte de la Remarque, que b) entraîne a). Pour démontrer que a) implique b), supposons pour commencer que le système projectif $(F_\alpha,\eta_\alpha^{\alpha'})_{\alpha\in\Gamma}$ est libre, que $\lim\uparrow(F_\alpha,\eta)=0$ et qu'il existe un α_0 tel que $\operatorname{im}\eta_{\alpha_0}^\alpha\neq0$ pour tout $\alpha>\alpha_0$. Il s'agit de montrer qu'alors $\lim\uparrow^1{}_{\alpha\in\Gamma}(F_\alpha,\eta_\alpha^{\alpha'})\neq0$.

Les applications $\eta_\alpha^{\alpha'}$ peuvent être représentées par des matrices à coefficients entiers. La relation $\eta_\alpha^{\alpha'}\circ\eta_{\alpha'}^{\alpha''}=\eta_\alpha^{\alpha''}$ pour $\alpha''>\alpha'>\alpha$ s'exprime

$$(1)\qquad (\eta_{ij}^{\alpha',\alpha})\circ(\eta_{jk}^{\alpha'',\alpha'}) = (\eta_{ik}^{\alpha'',\alpha})\,.$$

Prenons un $\alpha\in\Gamma$, pour tout $\alpha'>\alpha$ soit $n_\alpha^{\alpha'}$ le plus grand diviseur commun des $\eta_{ij}^{\alpha',\alpha}$, $i=1,2,\ldots$, $j=1,2,\ldots$. Il est clair que

$$(2)\qquad n_\alpha^{\alpha'}\,n_{\alpha'}^{\alpha''}\mid n_\alpha^{\alpha''}\,.$$

Supposons qu'il existe un nombre premier p tel que p ne divise aucun des $n_\alpha^{\alpha'}$ pour $\alpha'>\alpha>\alpha_0$. Considérons le système projectif $(F_\alpha\otimes Z_p,\eta_\alpha^{\alpha'}\otimes\mathrm{id})_{\alpha\in\Gamma}$. Puisque F_α est libre de type fini $F_\alpha\otimes Z_p$ est fini, puisque p ne divise aucun des $n_{\alpha_0}^\alpha$ les applications $\eta_{\alpha_0}^\alpha\otimes\mathrm{id}$ sont toutes differentes de zéro. En effet, soit $\varrho\colon Z\to Z_p$ l'homomorphisme canonique, la matrice de $\eta_{\alpha_0}^\alpha\otimes\mathrm{id}$

n'est autre que $\left(\varrho(\eta_{ij}^{\alpha_i;\alpha_0})\right)$ qui est non nulle. Donc § 1, Prop. 7 donne $\lim\uparrow(F_\alpha\otimes Z_p,\eta_\alpha^{\alpha'}\otimes\mathrm{id})\neq 0$, donc par § 1, Prop. 8

$$\mathrm{Tor}\left(\lim\uparrow^1(F_\alpha,\eta_\alpha^{\alpha'}),Z_p\right)\neq 0,\quad \text{donc}\quad \lim\uparrow^1(F_\alpha,\eta)\neq 0\,.$$

Dans le cas où, pour un α quelconque et pour tout nombre premier p, il existe un $\alpha'>\alpha$ tel que p divise $n_\alpha^{\alpha'}$, nous allons montrer que l'on peut supposer tous les $\eta_\alpha^{\alpha'}$ injectifs et de déterminant différent de zéro. En effet soit $\alpha_0\in\Gamma$ et soit

$$\Gamma(\alpha_0)=\{\alpha\mid\alpha\in\Gamma,\ \alpha>\alpha_0\}\,,$$

définissons le système projectif $(\overline{F}_\alpha,\bar\eta_\alpha^{\alpha'})_{\alpha\in\Gamma(\alpha_0)}$. $\overline{F}_\alpha=\mathrm{im}\,\eta_{\alpha_0}^{\alpha}$ et pour tout $\alpha'>\alpha>\alpha_0$ notons par $\bar\eta_\alpha^{\alpha'}:\overline{F}_{\alpha'}\to\overline{F}_\alpha$ l'injection $\mathrm{im}\,\eta_{\alpha_0}^{\alpha'}\to\mathrm{im}\,\eta_{\alpha_0}^{\alpha}$. Nous avons la suite exacte

$$0\to(\ker\eta_{\alpha_0}^{\alpha},\eta')_{\alpha\in\Gamma(\alpha_0)}\to(F_\alpha,\eta)_{\alpha\in\Gamma(\alpha_0)}\to(\overline{F}_\alpha,\bar\eta)_{\alpha\in\Gamma(\alpha_0)}\to 0\,.$$

Puisque $(\ker\eta_{\alpha_0}^{\alpha},\eta')_{\alpha\in\Gamma(\alpha_0)}$ est de type fini, $\lim\uparrow^q(\ker\eta_{\alpha_0}^{\alpha},\eta')=0$ pour tout $q\geqq 2$, par § 1, Prop. 2. Donc l'application

$$\lim\uparrow^1{}_{\alpha\in\Gamma(\alpha_0)}(F_\alpha,\eta)\to\lim\uparrow^1{}_{\alpha\in\Gamma(\alpha_0)}(\overline{F}_\alpha,\eta)$$

est surjectif; si nous montrons que $\lim\uparrow^1{}_{\alpha\in\Gamma(\alpha_0)}(\overline{F}_\alpha,\eta)\neq 0$, alors $\lim\uparrow^1{}_{\alpha\in\Gamma}(F_\alpha,\eta)\neq 0$. Supposons que $\lim\uparrow_{\alpha\in\Gamma(\alpha_0)}(\overline{F}_\alpha,\bar\eta)\neq 0$, soit $a\in\lim\uparrow(\overline{F}_\alpha,\bar\eta)$ un élément non nul. Puisque

$$\lim\uparrow(\overline{F}_\alpha,\bar\eta)=\bigcap_{\alpha>\alpha_0}\mathrm{im}\,\eta_{\alpha_0}^{\alpha}\subset F_{\alpha_0}\,,$$

il existe un nombre premier p tel que p ne divise pas a. Par l'hypothèse il existe un $\alpha>\alpha_0$ tel que p divise $n_{\alpha_0}^{\alpha}$, donc p divise tout élément dans $\mathrm{im}\,\eta_{\alpha_0}^{\alpha}$, donc contradiction. Donc $\lim\uparrow_{\alpha\in\Gamma(\alpha_0)}(\overline{F}_\alpha,\bar\eta)=0$.

Par hypothèse tous les $\overline{F}_\alpha$ sont differents de zéro, et ils sont libres parce que F_{α_0} l'est. Soit $m_\alpha=\dim\overline{F}_\alpha$, on voit que $0<m_\alpha\leqq\dim F_{\alpha_0}$, donc il existe un α_1 tel que $m_\alpha=m_{\alpha_1}=m$ pour tout $\alpha>\alpha_1>\alpha_0$. Ceci montre que le déterminant de l'homomorphisme $\bar\eta_\alpha^{\alpha'}$ pour $\alpha'>\alpha>\alpha_1$ est non nul, donc $\overline{F}_\alpha/\mathrm{im}\,\bar\eta_\alpha^{\alpha'}$ est fini.

Soit p un nombre premier et soit Γ_n l'ensemble des $\alpha\in\Gamma(\alpha_1)$, tel que $p^n\mid n_{\alpha_1}{}^{\alpha}$ mais $p^{n+1}\nmid n_{\alpha_1}^{\alpha}$. Evidemment $\Gamma(\alpha_1)=\bigcup_{n\geqq 0}\Gamma_n$ est cofinal dans Γ, et si $\alpha\in\Gamma_{n_1}$, $\alpha'\in\Gamma_{n_2}$, $\alpha'>\alpha$ alors $n_2\geqq n_1$, par 2).

Soit $(M_\alpha,\varrho_\alpha^{\alpha'})_{\alpha\in\Gamma(\alpha_1)}$ le système projectif suivant: pour tout $\alpha\in\Gamma(\alpha_1)$ on a $M_\alpha=Z^m$, si $\alpha'>\alpha$, $\alpha,\alpha'\in\Gamma_n$, l'application $\varrho_\alpha^{\alpha'}:Z^m\to Z^m$ sera l'identité, si $\alpha'>\alpha$, $\alpha\in\Gamma_{n_1}$, $\alpha'\in\Gamma_{n_2}$, l'application $\varrho_\alpha^{\alpha'}:Z^m\to Z^m$ sera l'identité multipliée par $p^{n_2-n_1}$. On vérifie facilement que ceci définit bien un système projectif. Aussi $\lim\uparrow(M_\alpha,\varrho)=0$ et $\lim\uparrow^1(M_\alpha,\varrho)\neq 0$ comme l'on voit sans difficulté. Nous allons définir un homomorphisme

$$k:\quad(\overline{F}_\alpha,\bar\eta)_{\alpha\in\Gamma(\alpha_1)}\to(M_\alpha,\varrho)_{\alpha\in\Gamma(\alpha_1)}$$

qui sera une injection. Pour α_1 nous notons par k_{α_1}: $\bar{F}_{\alpha_1} \to M_{\alpha_1}$ un isomorphisme moyennant lequel nous identifions $\bar{F}_{\alpha_1}$ et Z^m. Pour $\alpha \in \Gamma(\alpha_1)$, $\alpha \in \Gamma_n$, l'application k_α: $\bar{F}_\alpha \to M_\alpha$ sera $1/p^n\, \bar{\eta}^{\alpha}_{\alpha_1}$ qui existe parce que $p^n \mid n^{\alpha}_{\alpha_1}$. Il est facile de voir que ceci définit bien un homomorphisme de systèmes projectifs qui, puisque $\bar{\eta}^{\alpha}_{\alpha_1}$ sont tous de déterminant non nul, sera une injection. Soit $\hat{F}_\alpha = M_\alpha/\mathrm{im}\, k_\alpha$ et soit $\hat{\eta}_\alpha{}^{\alpha'}$: $\hat{F}_{\alpha'} \to \hat{F}_\alpha$ pour $\alpha' > \alpha > \alpha_1$ l'homomorphisme induit par $\varrho_\alpha{}^{\alpha'}$. Alors le système projectif $(\hat{F}_\alpha, \hat{\eta})_{\alpha \in \Gamma(\alpha_1)}$ est fini, et nous avons la suite exacte

$$0 \to (\bar{F}_\alpha, \bar{\eta}) \to (M_\alpha, \varrho) \to (\hat{F}, \hat{\eta}) \to 0\,.$$

Parce que $\lim\uparrow^1{}_{\alpha \in \Gamma(\alpha_1)}(\hat{F}_\alpha, \hat{\eta}) = 0$ pour $q \geqq 1$,

$$\lim\uparrow^1{}_{\alpha \in \Gamma(\alpha_1)}(\bar{F}_\alpha, \bar{\eta}) \;\to\; \lim\uparrow^1{}_{\alpha \in \Gamma(\alpha_1)}(M_\alpha, \varrho)$$

est surjectif, donc $\lim\uparrow^1{}_{\alpha \in \Gamma(\alpha_1)}(\bar{F}_\alpha, \bar{\eta}) \neq 0$, donc $\lim\uparrow^1{}_{\alpha \in \Gamma}(F_\alpha, \eta) \neq 0$.

Dans le cas général soit $(F_\alpha, \eta_\alpha{}^{\alpha'})_{\alpha \in \Gamma}$ un système projectif de type fini. Alors $F_\alpha = P_\alpha \oplus T_\alpha$, où P_α est libre et T_α fini. Il est clair que $\eta_\alpha{}^{\alpha'}$: $F_{\alpha'} \to F_\alpha$ applique $T_{\alpha'}$ dans T_α. Soit $\xi_\alpha{}^{\alpha'}$ la restriction de $\eta_\alpha{}^{\alpha'}$ à $T_{\alpha'}$, il vient une suite exacte de systèmes projectifs:

$$0 \to (T_\alpha, \xi) \to (F_\alpha, \eta) \to (P_\alpha, \zeta) \to 0$$

où $\zeta_\alpha{}^{\alpha'}$ est déduit de $\eta_\alpha{}^{\alpha'}$. Ici (P_α, ζ) est libre et (T_α, ξ) fini, $\lim\uparrow^q(P_\alpha, \zeta) = 0$ si $\lim\uparrow^q(F_\alpha, \eta) = 0$, donc a) entraine qu'il existe pour tout α un $\alpha' > \alpha$ tel que $\zeta_\alpha{}^{\alpha'} = 0$ et un α'' tel que $\xi_\alpha{}^{\alpha''} = 0$. Par exactitude ceci entraîne b).

Démonstration du Corollaire 1. Soit $(M_\alpha, \varrho_\alpha{}^{\alpha'})_{\alpha \in \Gamma}$ un système projectif tel que

1) $M_\infty = \lim\uparrow\, (M_\alpha, \varrho)$ est de type fini,
2) l'application canonique ϱ_α: $M_\infty \to M_\alpha$ est surjective pour tout $\alpha \in \Gamma$.

Considérons la suite exacte de systèmes projectifs

$$0 \to (\ker \varrho_\alpha, \eta) \to (M_\infty, \mathrm{id}) \to (M_\alpha, \varrho) \to 0$$

où $\eta_\alpha{}^{\alpha'}$ sont les injections évidentes. On en déduit une suite exacte

$$0 \to \lim\uparrow\, (\ker \varrho_\alpha, \eta) \to M_\infty \to \lim\uparrow\, (M_\alpha, \varrho) \to \lim\uparrow^1 (\ker \varrho_\alpha, \eta) \to 0$$

et $\lim\uparrow^1(M_\alpha, \varrho) = 0$. Puisque $M_\infty \to \lim\uparrow\, (M_\alpha, \varrho)$ est un isomorphisme, nous avons $\lim\uparrow^q(\ker \varrho_\alpha, \eta) = 0$ pour tout $q \geqq 0$. Par la Proposition 1 il existe pour tout $\alpha \in \Gamma$ un $\alpha' > \alpha$ tel que $\mathrm{im}\, \eta_\alpha{}^{\alpha'} = \ker \varrho_{\alpha'} = 0$, c'est à dire, $\varrho_{\alpha'}$: $\lim\uparrow\, (M_\alpha, \varrho) \to M_{\alpha'}$ est un isomorphisme.

Soit maintenant $(F_\alpha, \eta_\alpha{}^{\alpha'})_{\alpha \in \Gamma}$ un système projectif de type fini satisfaisant à a), tel que $\lim\uparrow\, (F_\alpha, \eta)$ est de type fini. Soit $M_\infty = \lim\uparrow\, (F_\alpha, \eta)$, et soit $M_\alpha = \eta_\alpha(M_\infty)$. Alors le système projectif $(M_\alpha, \varrho_\alpha^{\alpha'})_{\alpha\in\Gamma}$ où $\varrho_\alpha^{\alpha'}: M_{\alpha'} \to M_\alpha$ est la restriction de $\eta_\alpha^{\alpha'}$ à $M_{\alpha'}$, satisfait aux conditions 1) et 2), donc $\lim\uparrow^1(M_\alpha,\varrho) = 0$.

Soit $\bar{F}_\alpha = F_\alpha/M_\alpha$ et soit $\bar{\eta}_\alpha^{\alpha'}$ les applications déduites des $\eta_\alpha^{\alpha'}$. Alors nous avons une suite exacte de systèmes projectifs:

$$0 \to (M_\alpha,\varrho) \to (F_\alpha,\eta) \to (\bar{F}_\alpha,\bar{\eta}) \to 0\,.$$

Puisque $\lim\uparrow(M_\alpha,\varrho) = \lim\uparrow(F_\alpha,\eta)$ est un isomorphisme, il vient $\lim\uparrow^q(\bar{F}_\alpha,\bar{\eta}) = 0$ pour tout $q \geqq 0$, donc par la Proposition 1 il existe pour tout $\alpha \in \Gamma$ un $\alpha' > \alpha$ tel que $\operatorname{im}\bar{\eta}_\alpha^{\alpha'} = 0$. Donc par exactitude $\operatorname{im}\eta_\alpha^{\alpha'} \subset M_\alpha$, donc $\operatorname{im}\eta_\alpha^{\alpha'} = M_\alpha$, donc (F_α,η) est stable. Nous avons déjà montré qu'il existe un $\alpha \in \Gamma$ tel que $\lim\uparrow(F_\alpha,\eta) \to M_\alpha$ est un isomorphisme. Or ceci est précisement b).

Tenant compte à la Remarque il est facile à voir que b) entraîne a).

Démonstration du Corollaire 2. Considérons la suite exacte

$$0 \to (M_\alpha,\varrho) \to (F_\alpha,\eta) \to (\bar{F}_\alpha,\bar{\eta}) \to 0$$

comme ci-dessus. Puisque (M_α,ϱ) est surjectif et puisque Γ contient une suite cofinale nous avons par le Corollaire de § 1, Prop. 5: $\lim\uparrow^q(M_\alpha,\varrho) = 0$ pour tout $q \geqq 1$. Donc, si (F_α,η) est de type fini et satisfait à a), $\lim\uparrow^q(\bar{F}_\alpha,\bar{\eta}) = 0$ pour tout $q \geqq 0$, donc par la Proposition 1 il existe pour tout $\alpha \in \Gamma$ un $\alpha' > \alpha$ tel que $\operatorname{im}\bar{\eta}_\alpha^{\alpha'} = 0$. Ceci montre que $\operatorname{im}\eta_\alpha^{\alpha'} = M_\alpha$, donc que (F_α,η) est stable.

Tenant compte à la Remarque et au Corollaire de § 1, Prop. 5 il est facile de voir que b) entraîne a).

3.

Soit X un espace topologique localement compact. Pour un point $x \in X$ notons $\mathscr{V}_x(X)$ l'ensemble des voisinages ouverts de x dans X, ordonné filtrant par inclusion.

Soit $U \in \mathscr{V}_x(X)$. Désignons $H_c^m(U)$ le groupe de cohomologie à support compact, à valeur dans le faisceau constant Z. Pour $V \in \mathscr{V}_x(X)$, $V \subset U$, il existe un homomorphisme canonique $j_U^V: H_c^m(V) \to H_c^m(U)$. On voit que les groupes $H_c^m(U)$ et les homomorphismes j_U^V forment un système projectif

$$(H_c^m(U), j_U^V)_{U\in\mathscr{V}_x(X)}\,.$$

Notons par H_q^m le groupe

$$H_q^m(x) = \lim\uparrow^q{}_{U\in\mathscr{V}_x}(H_c^m(U), j_U^V)$$

et appelons $H_q^m(x)$ *le groupe de cohomologie local de dimension m et de degré q, de X au point* $x \in X$.

Si pour tout $U \in \mathscr{V}_x(X)$ il existe un $V \in \mathscr{V}_x(X)$ $V \subset U$ tel que $\mathrm{im} j_U{}^V = 0$, nous écrivons $p^m(x) = 0$. Si pour tout $U \in \mathscr{V}_x(X)$ il existe un $V \in \mathscr{V}_x(X)$, $V \subset U$, tel que $\mathrm{im} j_U{}^V$ est de type fini, nous écrivons $p^m(x) < \omega$. Pour ces notions voir Borel [3]. La dimension cohomologique, notée ici *dim* sera celui de H. Cohen [4], voir aussi Borel [3].

THÉORÈME 1. *Soit X un espace localement compact, de dimension finie et tel que pour tout point* $x \in X$ *on a* $p^m(x) < \omega$ *pour tout* $m \geqq 0$. *Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes*:

a) $\dim X \leqq n$.
b) *pour tout point* $x \in X$, *tout* $m > n$ *et tout* $q \geqq 0$, *on a* $H_q^m(x) = 0$.

REMARQUE. Si X est métrique separable, alors $\dim X$ est égale à la dimension au sens de Lebesgue (voir [8]), donc le Théorème donne, dans ce cas, une caractérisation de la dimension classique.

DÉMONSTRATION. D'après la Remarque du § 2 et d'après § 1, Prop. 6 nous pouvons supposer que $(H_c{}^m(U), j_U{}^V)_{U \in \mathscr{V}_x}$ est de type fini.

Evidemment a) entraîne b). Inversement, b) signifie que la condition a) de § 2, Prop. 1 est satisfaite par $(H_c{}^m(U), j_U{}^V)$, donc il existe pour tout $x \in X$ et pour tout $U \in \mathscr{V}_x(X)$ un $V \in \mathscr{V}_x(X)$, $V \subset U$, tel que $\mathrm{im} j_U{}^V = 0$, c'est à dire que $p^m(x, Z) = 0$. Donc le Théorème 2.3 du chap. 1 de [3] exige $\dim X \leqq n$.

REMARQUE. Si X est un espace localement compact clc, il est connu que $p^m(x, Z) < \omega$ pour tout $x \in X$ et pour tout $m \geqq 0$ (Borel [2]).

Nous pouvons interpréter la notion de nombre de Betti autour d'un point (voir chap. 1, § 2 de [3]), dans le language des groupes de cohomologie locaux. En effet nous avons le

THÉORÈME 2. *Soit X un espace localement compact, et soit x un point de X, tel que* $p^k(x, Z) < \omega$. *Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes*:

a) $p^k(x, Z) = m$ *existe et est fini*.
b) $H_1{}^k(x) = 0$ *et* $H_0{}^k(x)$ *est libre de dimension m*.

COROLLAIRE. *Soit X un espace localement compact* clc, *alors X est une variété cohomologique sur Z si et seulement si*:

1) $\dim X$ *est fini*,

2) *pour tout* $x \in X$, $H_1{}^m(x) = 0$ *pour tout* $m \geqq 0$,

3) *il existe un* $n \geqq 0$ *tel que pour tout* $x \in X$, $H_0{}^m(x) = 0$ *pour* $m \neq n$ *et* $H_0{}^n(x) = Z$.

DÉMONSTRATION. Considérons le système projectif $(H_c{}^k(U), j_U{}^V)_{U \in \mathscr{V}_x(X)}$. La condition a) entraîne, compte tenu de la Remarque de § 2, que $(H_c{}^k(U), j)$ est équivalent à un système projectif $(F_\alpha, \eta_\alpha{}^{\alpha'})_{\alpha \in \Gamma}$ où F_α est libre de dimension m pour tout $\alpha \in \Gamma$, et où $\eta_\alpha{}^{\alpha'}$ pour $\alpha' > \alpha$ est un isomorphisme. Donc par § 1, Prop. 6 $H_1{}^k(x) = 0$ et $H_0{}^k(x) = Z^m$.

Inversement supposons b), alors le Corollaire de § 2, Prop 1 donne ce qu'on veut.

Soient X et Y deux espaces localement compacts, $x \in X$ et $y \in Y$ deux points, alors l'ensemble des $U \times V$, $U \in \mathscr{V}_x(X)$ $V \in \mathscr{V}_y(Y)$ est cofinal dans $\mathscr{V}_{(x,y)}(X \times Y)$. Par le Théorème de Künneth pour la cohomologie à support compact, la suite

$$(1)\quad 0 \to \sum_{k+l=n} H_c{}^k(U) \otimes H_c{}^l(V) \to H_c{}^n(U \times V) \to \sum_{k+l=n+1} \operatorname{Tor}\big(H_c{}^k(U), H_c{}^l(V)\big) \to 0$$

est exacte. Donc si $p^*(x, Z) < \omega$ et si $p^*(y, Z) < \omega$ nous pouvons en principe calculer $\lim\uparrow^q{}_{W \in \mathscr{V}_{(x,y)}}(H_c{}^n(W), j_w{}^{w'})$, utilisant les relations de Roos § 1, Prop. 8 et Prop. 9, au moins dans le cas où les groupes de cohomologie locaux aux points x et y sont de types finis.

Nous allons considérer un cas spécial; supposons que $H_1{}^k(y) = 0$ et que $H_0{}^k(y)$ est de type fini. Il existe des voisinages $U, V \in \mathscr{V}_y(Y)$ tel que $V \subset U$ et tel que $\operatorname{im} j_U{}^V \cong H_0{}^k(y)$. D'après la Remarque du § 2 on voit que

$$\lim\uparrow^q{}_{(U,V) \in \mathscr{V}_x \times \mathscr{V}_y}\big(H_c{}^k(U) \otimes H_c{}^l(V)\big) = \lim\uparrow^q{}_{U \in \mathscr{V}_x}\big(H_c{}^k(U) \otimes H_0{}^l(y)\big),$$
$$\lim\uparrow^q{}_{(U,V) \in \mathscr{V}_x \times \mathscr{V}_y} \operatorname{Tor}\big(H_c{}^k(U), H_c{}^l(V)\big) = \lim\uparrow^q{}_{U \in \mathscr{V}_x} \operatorname{Tor}\big(H_c{}^k(U), H_0{}^l(y)\big)$$

pour tout $q \geqq 0$. Donc par § 1, Prop. 8 et Prop. 9

$$\begin{array}{c}
0 \\
\downarrow \\
\lim\uparrow^1{}_{U \in \mathscr{V}_x}\Big(\operatorname{Tor}\big(H_c{}^k(U), H_0{}^l(y)\big),\ \operatorname{Tor}(j_U{}^{U'}, id)\Big) \\
\downarrow \\
(2)\quad 0 \to \lim\uparrow_{U \in \mathscr{V}_x}(H_c{}^k(U), j) \otimes H_0{}^l(y) \to H \to \operatorname{Tor}\big(\lim\uparrow^1{}_{U \in \mathscr{V}_x}(H_c{}^k(U), j), H_0{}^l(y)\big) \to 0 \\
\downarrow \\
\lim\uparrow_{(U,V)}\big(H_c{}^k(U) \otimes H_c{}^l(V), j_U{}^{U'} \otimes j_V{}^{V'}\big) \\
\downarrow \\
0
\end{array}$$

(3) $$\lim\uparrow^1_{(U,V)}\big(H_c^k(U)\otimes H_c^l(V), j_U{}^{U'}\otimes j_V{}^{V'}\big) = H_1{}^k(x)\otimes H_0{}^l(y)$$

aussi par § 1, Prop. 3 nous avons que

$$\lim\uparrow^1_{U\in\mathscr{V}_x}\big(\mathrm{Tor}\big(H_c^k(U), H_0{}^l(y)\big), \mathrm{Tor}(j_U{}^{U'}, \mathrm{id})\big) = 0\,,$$

d'où

THÉORÈME 3. *Soient X et Y deux espaces localement compacts, $x\in X$, $y\in Y$ deux points et supposons que $p^k(x,Z)<\omega$ et $p^l(y,Z)<\omega$ pour tout $k,l\geqq 0$, et que $H_1{}^l(y)=0$ et $H_0(y)$ est de type fini pour tout $l\geqq 0$. Alors nous avons le diagramme suivant dont les deux suites sont exactes*:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & 0 & & & & & \\
 & & \uparrow & & & & & \\
 & & \sum\limits_{k+l=n}\mathrm{Tor}\big(H_1{}^k(x), H_0{}^l(y)\big) & & & & & \\
 & & \uparrow & & & & & \\
0 & \to & K & \to & H_0{}^n(x,y) & \to & \sum\limits_{k+l=n+1}\mathrm{Tor}\big(H_0{}^k(x), H_0{}^l(y)\big) & \to \sum\limits_{k+l=n} H_1{}^k(x)\otimes H_0{}^l(y) \\
 & & \uparrow & & & & & \downarrow \\
 & & \sum\limits_{k+l=n} H_0{}^k(x)\otimes H_0{}^l(y) & & & & & H_1{}^n(x,y)\to 0\,. \\
 & & \uparrow & & & & & \\
 & & 0 & & & & &
\end{array}$$

COROLLAIRE. *Soient X et Y des espaces localement compacts* clc., *et supposons que $H_1{}^*(y)=0$ pour tout $y\in Y$, et $H_0{}^*(y)$ est de type fini. Alors* $\dim X\times Y<\dim X+\dim Y$ *si et seulement si, pour $m=\dim X$, $n=\dim Y$*

$$\mathrm{Tor}^q\big(H_s{}^m(x), H_t{}^n(y)\big) = 0$$

pour tout $q\geqq 0$ et pour tous $s,t\geqq 0$.

DÉMONSTRATION. Considérons la suite exacte (1) et appliquons

$$\lim\uparrow_{(U,V)\in\mathscr{V}(x,y)}$$

à tout terme, tenant compte des diagrammes (2) et (3). Il est facile de voir que cela donne exactement la conclusion du Théorème. Puisque

$$\sum_{k+l=\dim X+\dim Y+1}\mathrm{Tor}\big(H_0{}^k(x), H_0{}^l(y)\big) = 0\,,$$

nous avons la suite exacte

$$0\to H_0{}^m(x)\otimes H_0{}^n(y)\to H_0{}^{m+n}(x,y)\to \mathrm{Tor}\big(H_1{}^m(x), H_0{}^n(y)\big)\to 0$$

et $H_1{}^{m+n}(x,y)=H_1{}^m(x)\otimes H_0{}^n(y)$ pour $m=\dim X$, $n=\dim Y$, donc le Corollaire.

Soit X un espace localement compact plongé dans E^m. Définissons pour un point $x\in X$ *le groupe d'homologie local de E^m-X autour de x.*

Soit $U \in \mathscr{V}_x(E^m)$, considérons le groupe d'homologie singulier $H_r(U-X)$. Soit $V \in \mathscr{V}_x(E)$ $V \subset U$, alors l'injection $V-X \subset U-X$ induit en homologie $i_U{}^V\colon\ H_r(V-X) \to H_r(U-X)$. Les groupes $H_r(U-X)$ et les homomorphismes $i_U{}^V$ forment un système projectif $(H_r(U-X), i_U{}^V)_{U \in \mathscr{V}_x(E^m)}$ et nous posons

$$H_r{}^q(x,E) \;=\; \lim\uparrow^q{}_{U \in \mathscr{V}_x}\big(H_r(U-X), i_U{}^V\big)\,,$$

lequel sera le groupe d'homologie local de E^m-X autour de x. Il est clair que, à priori ces groupes dépendent du plongement $X \to E^m$.

Or, on démontre facilement que si $U \in \mathscr{V}_x(E^m)$ est une boule ouverte, alors par la dualité d'Alexander-Pontrjagin

$$H_r(U-X) \;\cong\; H_c{}^{m-r-1}(U \cap X)\,,$$

donc en particulier

$$H_r{}^q(x,E) \;\cong\; H_q{}^{m-r-1}(x)$$

(isomorphisme naturel). Dans [1, § 5] Alexandroff a montré que X est s-accessible au point x si et seulement si le système projectif $\big(H_s(U-X), i_U{}^V\big)$ est stable. Puisque $\mathscr{V}_x(E^m)$ contient une suite cofinale, ceci implique que

$$H_s{}^1(x,E) \;=\; \lim\uparrow^1\big(H_s(U-X), i_U{}^V\big) \;=\; 0\,.$$

Inversement, supposons que $p^{m-s-1}(x,Z) < \omega$, alors $H_s{}^1(x,E) = H_1{}^{m-s-1}(x)$ $= 0$ implique que les deux systèmes projectifs $\big(H_s(U-X), i_U{}^V\big)$ et $\big(H_c{}^{m-s-1}(U \cap X), j_U{}^V\big)$ sont stables; d'où

PROPOSITION 2. *Soit X un espace localement compact plongé dans E^m et soit $x \in X$ un point tel que $p^{m-s-1}(x,Z) < \omega$. Alors X est s-accessible au point x si et seulement si $H_1{}^{m-s-1}(x) = 0$.*

4.

Nous allons introduire de nouveaux groupes locaux, analogues aux groupes d'homologie de X autour de x introduits par Alexandroff [1].

Soit $x \in X$ un point, $\mathscr{V}_x(X)$ l'ensemble des voisinages ouverts de x dans X. Pour $U, V \in \mathscr{V}_x(X)$, $V \subset U$ considérons les groupes de cohomologie $H^p(\overline{U}-V)$. Si $V' \subset V$ nous avons un homomorphisme $h_V{}^{V'}\colon H^p(\overline{U}-V') \to$ $H^p(\overline{U}-V)$ induit par l'inclusion $\overline{U}-V \subset \overline{U}-V'$, donc les groupes $H^p(\overline{U}-V)$ et les homomorphismes $h_V{}^{V'}$ forment un système projectif $\big(H^p(\overline{U}-V), h_V{}^{V'}\big)$. Pour $U \supset U' \supset V$ il est clair que l'on a un homomorphisme $k_{U'}{}^U\colon H^p(\overline{U}-V) \to H^p(\overline{U}'-V)$, qui par passage à la limite définit un homomorphisme

$$\bar{k}_{U'}{}^U\colon\ \lim\uparrow^q\big(H^p(\overline{U}-V), h\big) \to \lim\uparrow^q\big(H^p(\overline{U}'-V), h\big)\,.$$

Les groupes $\lim\uparrow^q(H^p(U-V),h)$ et les homomorphismes $\bar{k}_{U'}{}^U$ forment un système inductif $\left(\lim\uparrow^q(H^p(\bar{U}-V),h),\bar{k}_{U'}{}^U\right)$.

Définition. Nous notons $H_q{}^p(x,X)$ et nous appelons *groupe de cohomologie local de X autour de x*, le groupe

$$\lim\downarrow_{U\in\mathscr{V}_x}\left(\lim\uparrow^q{}_{V\in\mathscr{V}_x}(H^p(\bar{U}-V),h),k_{U'}{}^U\right).$$

La condition D. L'espace X satisfait à la condition D au point x si $\lim\uparrow^q{}_{U\in\mathscr{V}_x(X)}=0$ pour tout $q\geqq 2$.

Proposition 3. *Soit $x\in X$. Si X satisfait à la condition* D *au point x. Alors il existe un groupe abélien K tel que les deux suites dans le diagramme suivant sont exactes:*

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & & & \\ & & \uparrow & & & & \\ 0 & \to & K & \to & H_0{}^{m-1}(x,X) & \to & H_0{}^m(x) \to 0 \\ & & \uparrow & & & & \\ & & H_1{}^{m-1}(x) & & & & \\ & & \uparrow & & & & \\ & & H_1{}^{m-2}(x,X) & & & & \\ & & \uparrow & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$$

Démonstration. Pour $U,V\in\mathscr{V}_x(X)$, $V\subset U$ considérons la suite exacte de cohomologie

$$\ldots\to H_c{}^{m-1}(V)\to H^{m-1}(\bar{U})\to H^{m-1}(\bar{U}-V)\xrightarrow{\delta} H_c{}^m(V)\to H^m(\bar{U})\to\ldots$$

Soient $(F_{\alpha,\beta},h_\beta^{\alpha',\alpha},h_{\beta,\beta'}^\alpha)_{\alpha,\beta\in\Gamma}$ un système de groupes abéliens $F_{\alpha\beta}$, et $h_\beta^{\alpha'\alpha}$: $F_{\alpha'\beta}\to F_{\alpha\beta}$ et $h_{\beta\beta'}^\alpha$: $F_{\alpha\beta}\to F_{\alpha\beta'}$ pour $\alpha'>\alpha>\beta'>\beta$ des homomorphismes de groupes, tels que $h_\beta^{\alpha''\alpha}=h_\beta^{\alpha'\alpha}\circ h_\beta^{\alpha''\alpha'}$ pour $\alpha''>\alpha'>\alpha$ et $h_{\beta\beta''}^\alpha=h_{\beta'\beta''}^\alpha\circ h_{\beta\beta'}^\alpha$ pour $\alpha>\beta''>\beta'>\beta$, alors nous disons que $(F_{\alpha\beta},h_\beta^{\alpha'\alpha},h_{\beta\beta'}^\alpha)$ est un système *projectif-inductif*. Il est clair comment définir homomorphismes de systèmes projectif-inductifs, et on voit facilement que la catégorie $\mathscr{C}$ de ces systèmes et homomorphismes est une catégorie abélienne. Nous pouvons considérer la suite exacte ci-dessus comme une suite exacte de systèmes projectif-inductifs. Considérons le foncteur $\lim\downarrow\lim\uparrow$ défini dans $\mathscr{C}$ à valeur dans la catégorie des groupes abéliens et ses homomorphismes. On voit facilement que $\lim\downarrow_\beta\lim\uparrow_\alpha$ est exact à gauche, et que les foncteurs satelittes existent. En effet ils sont $\lim\downarrow_\beta\lim\uparrow^q{}_\alpha$. Or,

$$\lim\downarrow_U\lim\uparrow^q{}_V\left(H_c{}^m(V),j_V{}^{V'},\mathrm{id}\right) = H_q{}^m(x)$$

et

$$\lim\downarrow_U\lim\uparrow^q{}_V\left(H^m(\bar{U}-V),h_V{}^{V'},k_{U'}{}^U\right) = H_q{}^m(x,X).$$

Par la continuitée de la cohomologie

$$\lim\downarrow_U \lim\uparrow^q{}_V\big(H^m(\overline{U}), \mathrm{id}, k_{U'}{}^U\big) = 0$$

pour tout $q \geqq 0$, donc la Proposition resulte du

LEMME. *Soit dans une catégorie abélienne une suite exacte*

$$\ldots \to A_k \xrightarrow{l_k} A_{k+1} \xrightarrow{l_{k+1}} A_{k+2} \xrightarrow{l_{k+2}} \ldots$$

et soit F un foncteur à valeur dans la catégorie des groupes et homomorphismes. Supposons que F est exacte à gauche et que les foncteurs satellites existent, que $F^q = 0$ pour tout $q \geqq 2$, et que $F^q A_{3l} = 0$ pour tout $q \geqq 0$ et pour $l = k, k-1$. Alors il existe un groupe abélien K tel que les deux suites dans le diagramme suivant sont exactes:

$$\begin{array}{l} 0 \\ \uparrow \\ 0 \to K \to FA_{3k+1} \to FA_{3k+2} \to 0 \\ \uparrow \\ F^1A_{3k-1} \\ \uparrow \\ F^1A_{3k-2} \\ \uparrow \\ 0 \end{array}$$

DÉMONSTRATION. Regarder les suites exactes

$$\begin{aligned} &0 \to \ker l_{3k} \to A_{3k} \to \ker l_{3k+1} \to 0\,, \\ &0 \to \ker l_{3k+1} \to A_{3k+1} \to \ker l_{3k+2} \to 0\,, \\ &0 \to \ker l_{3k+2} \to A_{3k+2} \to \ker l_{3k+3} \to 0\,. \end{aligned}$$

Appliquons F à chacune d'elles, il est alors facile de voir que les hypothèses faites donnent exactement ce que l'on veut.

Nous remarquons que nous utilisons seulement la propriété suivante des foncteurs satellites: Soit

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

une suite exacte dans la catégorie $\mathscr{C}$; alors la suite

$$\ldots \to F^qA' \to F^qA \to F^qA'' \to F^{q+1}A' \to F^{q+1}A \to \ldots$$

est aussi exacte.

Appendice.

Il faut bien montrer que sous l'hypothèse $p^k(x,Z)<\omega$ les groupes $H_1{}^k(x)$ ne sont pas toujours triviaux.

Nous allons construire un espace compact contenant un point x pour lequel $p^2(x,Z)<\omega$, $H_0{}^2(x)=0$ et $H_1{}^2(x)\neq 0$.

Soit M_p un ruban de Moebius modulo p. Soit a_0 la frontière de M et soit b_0 un cycle tel que pb_0 est homologue à a_0. Plongeons M_p, par ϱ_0, dans un espace euclidien E^m de dimension suffisamment grande. Supposons que

1) $\varrho_0(M_p)$ est contenu dans une boule ouverte B_0 de diamètre 1,
2) $\varrho_0(b_0)$ est contenu dans une boule ouverte $B_1 \subset B_0$ de diamètre $\frac{1}{2}$.

Construissons successivement des plongements $\varrho_0,\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3,\ldots,\varrho_n$ tels que

1′) $\varrho_n(M_p)\subset B_n$,
2′) $\varrho_n(M)\cap\varrho_k(M)=\emptyset$ pour $k\neq n-1,n$ et $\varrho_n(M)\cap\varrho_{n-1}(M)=\varrho_n(a_0)=\varrho_{n-1}(b_0)$,
3′) $\varrho_n(b_0)$ est contenu dans une boule ouverte $B_{n+1}\subset B_n$ de diamètre $(\frac{1}{2})^{n+1}$.

Posons $\Gamma_p{}^n=\bigcup_{k=0}^n\varrho_k(M)\cup\bar{B}_{n+1}$, alors l'espace cherché est

$$\Gamma_p = \bigcap_{n\geqq 0}\Gamma_p{}^n = \bigcup_{k=0}^{\infty}\varrho_k(M_p)\cup\bigcap_{k=0}^{\infty}\bar{B}_k\,.$$

Or $\bigcap_{k=0}^{\infty}=\bar{B}_k=x$ est un point, et nous voyons facilement que $H_c{}^2(B_n\cap\Gamma_p)=Z$, $H_0{}^2(x)=0$, $H_1{}^2(x)=K$ où K est $\lim\uparrow^1(F_\alpha,\eta)_{\alpha\in\Pi+}$ pour $F_\alpha=Z$ et $\eta_\alpha{}^{\alpha'}$: $F_{\alpha'}\to F_\alpha$ est définie par $\eta_\alpha{}^{\alpha'}(1)=p^{\alpha'-\alpha}$. On peut de la même manière fabriquer un espace Γ et un point x dedans tel que $H_1{}^2(x)$ est plat.

Soit $\Gamma_p\subset E^m$, par Prop. 2 de § 3 Γ_p n'est pas $(m-3)$-accessible au point x. Donc $p^*(x,Z)<\omega$ ne garantie pas l'accessibilité.

BIBLIOGRAPHIE

1. P. S. Alexandroff, *On local properties of closed sets*, Annals of Math. 36 (1935), 1–35.
2. A. Borel, *The Poincaré duality in generalized manifolds*, Michigan Math. J. 4 (1957), 227–237.
3. A. Borel, *Seminar on transformation groups*, Annals of Math. Studies 46, Princeton, 1960.
4. H. Cohen, *A cohomological definition of dimension for locally compact Hausdorff spaces*, Duke Math. J. 21 (1954), 209–224.
5. P. E. Conner and E. E. Floyd, *A characterization of generalized manifolds*, Michigan Math. J. 6 (1959), 33–43.

6. R. Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux* (Act. sci. ind. 1252), Paris, 1958.
7. L. Henkin, *A problem on inverse mapping systems*, Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950), 224–225.
8. W. Hurewicz and H. Wallman, *Dimension theory*, Princeton, 1941.
9. J. E. Roos, *Sur les foncteurs dérivées de* lim$\uparrow$. *Applications*, C. R. Acad. Sci. Paris 252 (1961), 3702–3704.
10. Z. Z. Yeh, Thesis. Princeton University, 1959.

UNIVERSITÉ D'OSLO, NORVÈGE