MATH. SCAND. 12 (1963), 199–208

CRITÈRES PARAMÉTRIQUES D'IRRATIONALITÉ

ALEXANDRE FRODA

On présente, dans ce qui suit, des critères permettant — du moins en principe — de reconnaître, en certains cas, l'irrationalité d'un nombre réel α, défini comme limite d'une suite monotone de nombres rationnels. (Parmi ces critères, on retrouve aussi une trés intéressante condition A_0 mise en évidence, dès 1910, par Viggo Brun [1] pour le cas des suites croissantes. En l'étendant, dans ce qui suit, on y a traité aussi le cas des suites décroissantes et l'on y a introduit l'emploi des paramètres.)

Ces critères représentent des conditions suffisantes, faisant intervenir systématiquement une suite de paramètres q_r, $r=1,2,\ldots$. La possibilité d'adapter le choix des paramètres, au cas à étudier, constitue — malgré les difficultés de cette tâche — un avantage heuristique inhérent à la méthode.

On présente aussi, dans ce travail, des cas où, par un choix convenable des paramètres, le critère est rendu à la fois nécessaire et suffisant à l'irrationalité de α.

1. Généralités.

1.1. Préliminaires. Soit α un nombre réel (positif), défini comme limite d'une suite monotone de nombres rationnels, suite qui peut donc être croissante (cas **a**) ou décroissante (cas **a***) Selon qu'on est dans un cas ou l'autre, on écrit — respectivement, en parallèle —

$$(1) \qquad \mathbf{a}:\quad \alpha = \lim_{r\sim\infty} \alpha_r, \qquad \mathbf{a}^*:\quad \alpha = \lim_{r\sim\infty} \alpha_r^* ,$$

où chaque α_r, α_r^* s'exprime comme un rapport de nombres naturels, indéfiniment croissants, à savoir

$$(2) \qquad \mathbf{a}:\quad \alpha_r = y_r/x_r, \qquad \mathbf{a}^*:\quad \alpha_r^* = y_r^*/x_r, \qquad r = 0,1,\ldots ,$$

où

$$\alpha_r < \alpha_{r+1} < \alpha, \qquad \text{resp.} \qquad \alpha_r^* > \alpha_{r+1}^* > \alpha ,$$

et tels qu'on ait aussi

$$(3) \qquad y_r < y_{r+1}, \quad y_r^* < y_{r+1}^*, \quad x_r < x_{r+1}, \qquad r = 0,1,\ldots .$$

Reçu le 20. mars, 1963.

(Dans le cas **a**, les conditions (1), (2), (3), sont satisfaites, lorsque α est défini, comme la somme d'une série convergente, à termes rationnels, positifs.) Si le nombre α, ainsi défini, est irrationnel, on peut lui reconnaître quelquefois ce caractère, par l'application de critères qui introduisent des paramètres q_r, $r=0,1,\ldots$, nombres positifs, convenablement choisis et soumis aux conditions générales (4), (6) suivantes (à vérifier chaque fois, qu'on introduit la suite des q_r):

Par définition, les paramètres q_r doivent satisfaire à une condition exprimée, suivant les cas, par

(4) $$\mathbf{a}:\quad p_{r+1} < x_{r+1}/x_r, \qquad \mathbf{a}^*:\quad p_{r+1} < y_{r+1}{}^*/y_r{}^*\,,$$

où l'on a posé

(5) $$p_{r+1} = q_{r+1}/q_r, \qquad r = 1,2,\ldots\,.$$

On impose aussi à la suite de paramètres q_r, la condition

(6) $$\lim_{r\sim\infty}(x_r/q_r) = \infty\,.$$

On peut remarquer, qu'on a enfin en vertu de (5), l'égalité

(7) $$q_r = p_1p_2\ldots p_r, \qquad r = 1,2,\ldots\,.$$

1.2. Division entière. On fera systématiquement appel, dans ce travail à la division entière, définie comme suit:

Soient a,b des nombres positifs, donnés. (Cette définition n'exige pas la rationalité de a,b.) On appelle *quotient par défaut*, respectivement *par excès*, de la division de a par b, le nombre naturel (on zéro) q', respectivement q'', satisfaisant aux conditions

(8) $$0 \leqq a-bq' < b, \quad \text{resp.} \quad 0 < bq''-a \leqq b\,.$$

L'existence et l'unicité des quotients résulte de ces conditions et l'on a

$$q'' = q'+1\,.$$

1.3. Formules utiles. On considère parallèlement les cas ci-dessus et l'on obtient, par application de la division entière:

a: On pose, dans le cas des suites (α_r) croissantes

(9) $$x_r = q_r\bar{x}_r - x_r{}', \qquad y_r = q_r\bar{y}_r + y_r{}', \qquad r = 1,2,\ldots\,,$$

où $\bar{x}_r,\bar{y}_r$ sont les quotients par excès, respectivement par défaut de la division entière de x_r, respectivement de y_r, par q_r. On aura, en vertu de (8)

(10) $$0 < x_r' \leqq q_r, \qquad 0 \leqq y_r' < q_r .$$

On pose

(11) $$\xi_r = x_r'/q_r, \qquad \eta_r = y_r'/q_r ,$$

ce qui implique, en vertu de (10)

(12) $$0 < \xi_r \leqq 1, \qquad 0 \leqq \eta_r < 1 .$$

De (9), (11) on tire

(13) $$x_r/q_r = \bar{x}_r - \xi_r, \qquad y_r/q_r = \bar{y}_r + \eta_r ,$$

et donc, en vertu des inégalités (12), on aura

(14) $$\bar{x}_r = 1 + E(x_r/q_r), \qquad \bar{y}_r = E(y_r/q_r) .$$

(On désigne par E l'opérateur (de Legendre) qui pour tout μ réel définit le plus grand entier m ne dépassant pas μ, $E\mu = m$ et par F l'opérateur, qui définit la différence $F\mu = \mu - E\mu$.

On sait que les notations usuelles en sont $E\mu = [\mu]$, $F\mu = (\mu)$.) Il en résulte, compte tenu de (13), les égalités

(15) $$\xi_r = 1 - F(x_r/q_r), \qquad \eta_r = F(y_r/q_r) .$$

On pose enfin

(16) $$\zeta_r = \alpha\xi_r + \eta_r, \qquad r = 1,2,\ldots .$$

a*: On pose, dans le cas des suites $(\alpha_r{}^*)$ décroissantes

(9*) $$x_r = q_r\overline{x_r{}^*} + x_r'^*, \quad y_r{}^* = q_r\overline{y_r{}^*} - y_r'^*, \qquad r = 1,2,\ldots ,$$

où $\overline{x_r{}^*}, \overline{y_r{}^*}$ sont les quotients par défaut, respectivement par excès, de la division entière de x_r, respectivement de $y_r{}^*$ par q_r.

On aura, en poursuivant l'analogie, les égalités

(14*) $$\overline{x_r{}^*} = E(x_r/q_r), \qquad \overline{y_r{}^*} = 1 + E(y_r{}^*/q_r) ,$$

dont on déduit

(15*) $$\xi_r{}^* = F(x_r/q_r) , \qquad \eta_r{}^* = 1 - F(y_r{}^*/q_r) ,$$

nombres soumis aux inégalités

(12*) $$0 \leqq \xi_r{}^* < 1, \qquad 0 < \eta_r{}^* \leqq 1 .$$

(L'analogie évidente des cas parallèles a et a* sera utilisée, dans ce qui suit, afin d'abréger l'exposé. Le numérotage des formules analogues sera simplifié par l'emploi auxiliare de l'astérisque *, pour marquer le passage de a, à a*.) On pose enfin

(16*) $$\zeta_r{}^* = \alpha\xi_r{}^* + \eta_r{}^*, \qquad r = 1,2,\ldots .$$

2. Critères d'irrationalité C_1 et C_1^*.

2.1. Critère C_1 applicable aux suites croissantes (cas a). *Le nombre $\alpha > 0$, limite de la suite croissante de nombres rationnels α_r, $r = 1, 2, \ldots$, est irrationnel, lorsque les deux conditions suivantes (dépendant du choix préalable des paramètres q_r) sont à la fois satisfaites:*

A_1. *Pour tout indice $r > r_0$, où r_0 est assez grand, on a l'inégalité stricte*

$$\frac{y_{r+1} - p_{r+1} y_r}{x_{r+1} - p_{r+1} x_r} > \frac{y_{r+2} - p_{r+2} y_{r+1}}{x_{r+2} - p_{r+2} x_{r+1}} . \tag{17}$$

B_1. *Il existe une suite infinie S_1 d'indices $r = r_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$), croissant avec ν, telle qu'on ait à la fois, pour les ξ_r, η_r, définis en* (15)

$$\begin{aligned} &\xi_{r_1} \geqq \xi_{r_2} \geqq \ldots \geqq \xi_{r_\nu} \geqq \ldots , \\ &\eta_{r_1} \geqq \eta_{r_2} \geqq \ldots \geqq \eta_{r_\nu} \geqq \ldots . \end{aligned} \tag{18}$$

(Il suffit de satisfaire à (33), au lieu de (17) et (18). Ces dernières conditions n'exigent pas le connaissance préalable de la valeur de α.)

Démonstration. La suite des α_r est strictement croissante et tend vers α, tandis que

$$\alpha_r < \alpha_{r+1} , \tag{19}$$

ce qui s'écrit aussi, en vertu de (2)

$$\frac{y_0}{x_0} < \frac{y_1}{x_1} < \ldots < \frac{y_r}{x_r} < \frac{y_{r+1}}{x_{r+1}} < \ldots . \tag{20}$$

En A_1 apparaît une suite d'inégalités entre des rapports de nombres positifs, car de (1), (2), (4), (20) on déduit

$$x_{r+1} - p_{r+1} x_r > 0, \qquad y_{r+1} - p_{r+1} y_r > 0, \qquad r = 0, 1, \ldots . \tag{21}$$

De (1), (2), (20) il résulte d'une part, pour un $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, qu'il existe une valeur r_ε de l'indice, telle que pour tout $r' > r_\varepsilon$, on ait

$$\alpha - \varepsilon < \frac{y_{r'}}{x_{r'}} < \alpha , \tag{22}$$

et d'autre part on tire aussi l'inégalité, valable pour tout r (car on peut renuméroter, au besoin)

$$\alpha x_r - y_r > 0, \qquad r = 0, 1, \ldots . \tag{23}$$

Soit $r' > r + 1$. En utilisant (22), ainsi que la suite d'inégalités strictes (16) des rapports de termes positifs (21), valable pour tout $r > r_0$ et exprimant A_1, on a

$$(24)\quad \frac{y_{r+1}-p_{r+1}y_r}{x_{r+1}-p_{r+1}x_r} > \frac{y_{r+2}-p_{r+2}y_{r+1}}{x_{r+2}-p_{r+2}x_{r+1}} \geqq \frac{y_{r'+1}-p_{r'+1}y_{r'}}{x_{r'+1}-p_{r'+1}x_{r'}} > \frac{y_{r'}}{x_{r'}} > \alpha-\varepsilon\ ,$$

car l'avant dernière inégalité résulte de (20).

On fait ensuite tendre ε vers zéro en (22). L'indice r' tend alors à l'infini. On aura donc, pour tout r fixe, mais arbitraire ($r>r_0$), l'inégalité stricte

$$(25)\qquad \frac{y_{r+1}-p_{r+1}y_r}{x_{r+1}-p_{r+1}x_r} > \alpha\ .$$

On a, en invoquant (23) et les inégalités (21),

$$(26)\qquad \alpha x_r - y_r > (\alpha x_{r+1}-y_{r+1})1/p_{r+1}, \qquad r = 0,1,\dots\ ,$$

et puisqu'on a l'égalité (7), on tire successivement de (26) la suite infinie d'inégalités strictes entre des termes positifs (23),

$$(27)\quad \alpha x_0-y_0 > (\alpha x_1-y_1)1/q_1 > (\alpha x_2-y_2)1/q_2 > \\ > \dots > (\alpha x_r-y_r)1/q_r > \dots > 0\ .$$

Or, en conséquence de (13), (15), on a, pour les nombres naturels (ou zéro)

$$(28)\qquad \alpha\bar{x}_r-\bar{y}_r = (\alpha x_r-y_r)1/q_r + \zeta_r\ ,$$

tandis que par suite de (12), (15), (16) on a

$$(29)\qquad 0 < \zeta_r < \alpha+1, \qquad r = 1,2,\dots\ .$$

On tire, en s'appuyant sur (23), (28), l'inégalité

$$(30)\qquad \alpha\bar{x}_r-\bar{y}_r-\zeta_r > 0, \qquad r = 1,2,\dots\ .$$

On peut donc, en invoquant (28), remplacer (27) par la suite infinie d'inégalités strictes, entre des termes positifs (30)

$$(31)\quad \alpha x_0-y_0 > \alpha\bar{x}_1-\bar{y}_1-\zeta_1 > \alpha\bar{x}_2-\bar{y}_2-\zeta_2 > \\ > \dots > \alpha\bar{x}_r-\bar{y}_r-\zeta_r > \dots > 0\ .$$

En vertu de (30) et puisque les ζ_r sont positifs (29), on a

$$(32)\qquad \alpha\bar{x}_r-\bar{y}_r > 0, \qquad r = 1,2,\dots\ .$$

En invoquant la condition B_1 (18) et la définition des ζ_r (16), où $\alpha>0$, $\xi_r>0$, $\eta_r\geqq 0$ (12), on tire des suites infinies (18) les inégalités

$$(33)\qquad \zeta_{r_1} \geqq \zeta_{r_2} \geqq \dots \geqq \zeta_{r_\nu} \geqq \dots > 0\ ,$$

où les indices $r_\nu \in S_1$. On peut l'ajouter, membre à membre, aux inégalités strictes, extraites de la suite (31), dont on retient seulement les termes aux indices $r_\nu \in S_1$. On obtient, compte tenu de (32),

$$(34) \qquad \alpha\bar{x}_{r_1} - \bar{y}_{r_1} > \alpha\bar{x}_{r_2} - \bar{y}_{r_2} > \ldots > \alpha\bar{x}_{r_\nu} - \bar{y}_{r_\nu} > \ldots > 0,$$

suite infinie d'inégalités successives strictes entre des termes positifs. Cela implique, les $\bar{x}_{r_\nu}$, $\bar{y}_{r_\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, étant des nombres naturels, l'irrationnalité de α, le contraire étant absurde.

En effet, si α était rationnel, on aurait $\alpha = u/v$ (u, v nombres naturels) et en multipliant en (34) chaque membre par v l'on obtiendrait une suite infinie décroissante de nombres naturels, ce qui est impossible. (On a recours, en fait, à un critère général, classique, d'irrationalité [3, p. 53, 2 (B)].) Donc α est irrationnel.

2.2. Critère C_1^* applicable aux suites décroissantes (cas a*) *Le nombre* $\alpha > 0$, *limite de la suite décroissante de nombres rationnels* α_r^*, $r = 1, 2, \ldots$, *est irrationnel, lorsque les deux conditions suivantes sont à la fois satisfaites*:

A_1^*. *Pour tout indice* $r > r_0$, *où* r_0 *est assez grand, on a l'inégalite stricte*

$$(17^*) \qquad \frac{y_{r+1}^* - p_{r+1} y_r^*}{x_{r+1} - p_{r+1} x_r} < \frac{y_{r+2}^* - p_{r+2} y_{r+1}^*}{x_{r+2} - p_{r+2} x_{r+1}}.$$

B_1^*. *Il existe une suite infinie* S_1^* *d'indices* $r = r_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$, *croissant avec* ν, *telle qu'on ait à la fois, pour les* ξ_r^*, η_r^*, *définis en* (15*)

$$(18^*) \qquad \begin{aligned} &\xi_{r_1}^* \geqq \xi_{r_2}^* \geqq \ldots \geqq \xi_{r_\nu}^* \geqq \ldots, \\ &\eta_{r_1}^* \geqq \eta_{r_2}^* \geqq \ldots \geqq \eta_{r_\nu}^* \geqq \ldots . \end{aligned}$$

(Il suffit de satisfaire à (33*), au lieu de (17*), (18*).)

DÉMONSTRATION. On raisonne par analogie du cas précédent, compte-tenu des renversements de signe dûs au passage de a à a*. On en marquera le départ en (9) et (9*), (19) et (19*), (24) et (24*) et en poursuivant les conséquences, on obtient au lieu de (34), la suite

$$(34^*) \qquad \overline{y_{r_1}^*} - \alpha\overline{x_{r_1}^*} > \overline{y_{r_2}^*} - \alpha\overline{x_{r_2}^*} > \ldots \geqq \overline{y_{r_\nu}^*} - \alpha\overline{x_{r_\nu}^*} > \ldots > 0,$$

ce qui implique directement l'irrationalité de α.

2.3. Remarque sur les critères C_1, C_1^*. Pour un choix déterminé des paramètres q_r, $r = 1, 2, \ldots$, et à moins qu'on n'ait $q_r = 1$ pour tout $r > r_0$, on peut retenir la remarque suivante:

Si l'une des conditions A_1, B_1 *du critère* C_1, *respectivement* A_1^*, B_1^* *du critère* C_1^*, *est satisfaite, cela n'assure pas l'irrationalité de* α (limite de la suite croissante des α_r rationnels, respectivement décroissante des α_r^* rationnels).

On peut mettre cela en évidence par les exemples suivants où α est rationnel ($\alpha = 1$) et pourtant l'une des conditions indiquées est satisfaite, ce qu'il sera aisé au lecteur de vérifier:

$$1^\circ \quad \alpha_r, \alpha_r^* = 1 \mp (\tfrac{2}{5})^r, \quad x_r = 5^r, \quad q_r = 3^r .$$

La condition A_1, resp. A_1^*, est satisfaite.

$$2^\circ \quad \alpha_r, \alpha_r^* = 1 \mp \frac{r-1}{rE\sqrt{r}}, \quad x_r = r!, \quad q_r = (r-1)!, \quad r_\nu = \nu^2 .$$

La condition B_1, resp. B_1^*, est satisfaite.

(L'autre condition du critère respectif n'est pas satisfaite, car α est rationnel, mais la vérification directe de cette négation pourrait rencontrer des difficultés. Le signe supérieur, resp. inférieur, correspond au cas a, resp. a^*.)

2.4. Inégalités exprimant les conditions A_1 et A_1^*. On pose, en considérant parallèlement les cas de la suite rationnelle croissante des α_r, respectivement décroissante des α_r^*,

$$\mathsf{a}: \quad v_r = \frac{y_{r+1} - p_{r+1} y_r}{x_{r+1} - p_{r+1} x_r}, \qquad \mathsf{a}^*: \quad v_r^* = \frac{y_{r+1}^* - p_{r+1} y_r^*}{x_{r+1} - p_{r+1} x_r}, \qquad r = 0, 1, \ldots .$$

Les conditions A_1, resp. A_1^* s'expriment par des inégalités, valables pour tout $r > r_0$, où r_0 est assez grand:

$$\mathsf{A}_1 \Leftrightarrow \Delta v_r < 0, \quad \text{resp.} \quad \mathsf{A}_1^* \Leftrightarrow \Delta v_r^* > 0 .$$

(Si μ_r, $r = 0, 1, \ldots$, est le terme général d'une suite de nombres réels, on désigne par Δ l'opérateur, tel que

$$\Delta \mu_r = \mu_{r+1} - \mu_r .)$$

Les dénominateurs, qui apparaissent dans l'expression des Δv_r, Δv_r^*, ci-dessus, sont positifs et donc on peut remplacer les inégalités précédentes compte-tenu des signes de $\Delta \alpha_{r+1} > 0$, $\Delta \alpha_r > 0$, respectivement de $\Delta \alpha_{r+1}^* < 0$, $\Delta \alpha_r^* < 0$, dans le cas des suites croissantes des α_r, resp. décroissantes des α_r^*, par les inégalités

$$(35) \qquad \mathsf{a}: \quad \frac{x_{r+2}}{x_{r+1}} \left(\frac{x_{r+1}}{x_r} - p_{r+1} \right) < p_{r+1} \left(\frac{x_{r+2}}{x_{r+1}} - p_{r+2} \right) \frac{\Delta \alpha_r}{\Delta \alpha_{r+1}} ,$$

respectivement

$$(35^*) \qquad \mathsf{a}^*: \quad \frac{x_{r+2}}{x_{r+1}} \left(\frac{x_{r+1}}{x_r} - p_{r+1} \right) < p_{r+1} \left(\frac{x_{r+2}}{x_{r+1}} - p_{r+2} \right) \frac{\Delta \alpha_r^*}{\Delta \alpha_{r+1}^*} .$$

2.5. Sur l'application effective des critères C_1, C_1^*. Le but des exemples qui suivent, n'est pas de contribuer à la solution de cas difficiles, mais de souligner des circonstances, qu'on peut rencontrer dans l'application des critères précédents.

1°. Irrationalité de $e^{1/a}$, où a est un nombre naturel.

1′. Soient

$$\alpha_r = 1+\frac{1}{1!\,a}+\frac{1}{2!\,a^2}+\ldots+\frac{1}{r!\,a^r}, \qquad r = 1,2,\ldots,$$

donc la suite (α_r) croissante (cas a),

$$\alpha = e^{1/a} = \lim_{r\to\infty} \alpha_r .$$

On pose, pour $r=1,2,\ldots$, en vue d'appliquer le critère C_1,

$$x_r = r!\,a^r, \quad y_r = r!\,a^r\alpha_r, \quad q_r = r, \qquad r = 1,2,\ldots .$$

Les conditions A_1, B_1 sont vérifiées, car (35) a lieu pour tout $r>r_0=1$, tandis que $\xi_r=1$, $\eta_r=1/r$ et α est irrationel.

2′. Soient (cas a*) une suite (α_r^*) décroissante

$$\alpha = \lim_{r\to\infty} \alpha_r^* = e^{1/a}, \quad \alpha_r^* = \alpha_r+\frac{1}{r!\,a_r}, \quad q_r = r, \qquad r = 1,2,\ldots .$$

On vérifie A_1^* par (35*), mais pour le choix précédent des paramètres q_r, la condition B_1^* n'est pas remplie, malgré l'irrationalité de α.

2°. Irrationalité de e^b, où $b>1$ est un nombre naturel: (Voir en [2], § 4, 7 la démonstration due à Hermite. Les cas traité implique simplement l'irrationalité de e^λ, λ rationnel.)

1″. Soient (cas a)

$$\alpha = \lim_{r\to\infty} \alpha_r = e^b, \quad \alpha_r = \sum_{s=0}^{r} \frac{b^s}{s!}, \quad x_r = r!, \quad q_r = (r-1)!\,.$$

On vérifie A_1 par (35), mais B_1 offre des difficultés, car $\xi_r=1$, $\eta_r=F(r\alpha_r)$. On peut montrer toutefois (ce point sera développé ailleurs), qu'on peut choisir la suite S d'indices $r=r_\nu$, telle que l'irrationalité de e^b implique B_1, qui est donc nécessaire, pour le choix ci-des-sus des paramètres q_r.

2″. Soient (cas a*)

$$\alpha = \lim_{r\to\infty} \alpha_r^* = e^b, \quad \alpha_r^* = \frac{2b^r}{r!}+\sum_{s=0}^{r-1} \frac{b^s}{s!}, \quad x_r = r!, \quad q_r = (r-1)!\,.$$

La conclusion est la même qu'en 1″.

3. Critères d'irrationalité C_0, $\mathsf{C}_0{}^*$.

3.1. Critères. On peut définir, en partant des critères C_1, $\mathsf{C}_1{}^*$ des critères assez simples, qu'on obtient en attribuant aux paramètres q_r la valeur 1, pour tout $r=1,2,\ldots$ On satisfait ainsi aux conditions générales (5), (6) et par application de (15), (15*) on voit que B_1, $\mathsf{B}_1{}^*$ sont vérifiées. Les critères généraux C_1, $\mathsf{C}_1{}^*$ impliquent alors, en particulier, les critères C_0, $\mathsf{C}_0{}^*$.

C_0, $\mathsf{C}_0{}^*$: *Le nombre $\alpha > 0$, limite de la suite croissante (α_r), resp. décroissante $(\alpha_r{}^*)$, des nombres rationnels $\alpha_r, \alpha_r{}^*$, $r=1,2,\ldots$, est irrationnel, à la condition d'avoir*

A_0, $\mathsf{A}_0{}^*$: *Pour tout indice $r > r_0$*

$$\frac{y_{r+1}-y_r}{x_{r+1}-x_r} \gtrless \frac{y_{r+2}-y_{r+1}}{x_{r+2}-x_{r+1}}, \qquad r > r_0 . \tag{36}$$

La condition A_0 a été donnée par V. Brun (opt. cit), qui démontra directement qu'elle implique l'irrationalité de α et l'appliqua à de nombreux exemples.

3.2. Remarque concernant la nécessité des conditions A_0, $\mathsf{A}_0{}^*$. Les conditions A_0 ou $\mathsf{A}_0{}^*$ sont suffisantes toutes seules, pour que la limite α d'une suite monotone de nombres rationnels α_r, resp. $\alpha_r{}^*$, soit irrationnelle, mais réciproquement on peut les considérer aussi comme nécessaires, au sens suivant:

Si α est un nombre irrationnel, il existe des suites monotones de nombres rationnels α_r resp. $\alpha_r{}^*$, qui tendent vers α, en satisfaisant aux conditions A_0 ou $\mathsf{A}_0{}^*$.

On le démontre en développant α en fraction continue régulière, infinie [2, p. 25], notée

$$\alpha = b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{\ddots}} = (b_1, b_2, \ldots, b_r, \ldots) ,$$

où chaque b_r, $r=1,2,\ldots$, est un nombre naturel et l'on pose

$$\frac{P_r}{Q_r} = (b_1, b_2, \ldots, b_r), \qquad r = 1,2,\ldots .$$

On a alors

$$\alpha < \frac{P_{2r}}{Q_{2r}} = \frac{P_{2r+1}-P_{2r-1}}{Q_{2r+1}-Q_{2r+1}}, \quad \text{resp.} \quad \alpha > \frac{P_{2r+1}}{Q_{2r+1}} = \frac{P_{2r+2}-P_{2r}}{Q_{2r+2}-Q_{2r}} . \tag{37}$$

En revenant aux notations initiales de ce travail, on pose

$$y_r = P_{2r+1}, \quad x_r = Q_{2r+1}, \quad \text{resp.} \quad y_r^* = P_{2r}, \quad x_r = Q_{2r},$$

et puisque les réduites d'ordre impair, resp. d'ordre pair de α vont en croissant, respectivement en décroissant et qu'on a

$$\alpha_r = P_{2r+1}/Q_{2r+1}, \quad \alpha_r^* = P_{2r}/Q_{2r},$$

les relations (37) expriment les conditions A_0, A_0^* respectivement.

BIBLIOGRAPHIE

1. V. Brun, *Ein Satz über Irrationalität,* Arkiv for Mathematik og Naturvidenskab (Kristiania) 31 (1910), Hefte 3, 6 pp.
2. G. H. Hardy and E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers,* Third edition, Oxford, 1954.
3. F. Koksma, *Diophantische Approximationen* (Ergebnisse der Mathematik IV_4), Berlin, 1936.

INSTITUT MATHÉMATIQUE, ACADÉMIE DES SCIENCES,
R. P. ROUMANIE, BUCAREST