MATH. SCAND. 13 (1963), 70–74

IDENTITÉS ENTRE ESPACES DE TRACES

P. GRISVARD

Introduction.

On considère deux espaces de Banach A_0 et A_1, contenus dans un même espace vectoriel topologique localement convexe séparé $\mathscr{A}$, l'injection de A_i dans $\mathscr{A}$ étant continue, $i=0,1$. Plusieurs constructions d'espaces de traces entre A_0 et A_1 ont été introduites dans [2], puis généralisées dans [3]. Nous montrons ici que ces constructions conduisent aux mêmes espaces; ce résultat n'est pas nouveau à part pour certains cas exceptionnels (cf. [3]), seule la méthode, qui fait un usage éssentiel de l'inégalité de Hardy, semble nouvelle.

1. Préliminaires.

Pour la commodité du lecteur nous rappelons la définition des espaces de traces entre A_0 et A_1.

Dans la suite pour $p \in [1, +\infty]$, α réel quelconque et A espace de Banach (réel ou complexe) $L_\alpha{}^p(A)$ désignera l'espace des fonctions $t \to u(t)$, définies dans $(0, +\infty)$, à valeurs dans A, qui sont mesurables et telles que $t^\alpha u(t)$ soit de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrable dans $(0, +\infty)$ pour la mesure de Lebesgue si $p < +\infty$, respectivement essentiellement bornée si $p = +\infty$. La norme dans $L_\alpha{}^p(A)$ est

$$\|u\|_{L_\alpha{}^p(A)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} \|t^\alpha u(t)\|_A{}^p \, dt\right)^{1/p} & \text{si } p < +\infty \\ \operatorname*{vrai\,max}_{t>0} \|t^\alpha u(t)\|_A & \text{si } p = +\infty \,. \end{cases}$$

Pour m entier >0, $p_i \in [1, +\infty]$, α_i réels, $i=0,1$, $W^m(p_0,\alpha_0,A_0;\, p_1,\alpha_1,A_1)$ est le sous-espace de $L_{\alpha_0}^{p_0}(A_0)$ formé des fonctions u telles que $u^{(m)} \in L_{\alpha_1}^{p_1}(A_1)$ (il faut comprendre la dérivation au sens des distributions dans $]0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathscr{A}$.); c'est un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{W^m} = \|u\|_{W^m(p_0,\alpha_0,A_0;\,p_1,\alpha_1,A_1)} = \max\left(\|u\|_{L_{\alpha_0}{}^{p_0}(A_0)}, \|u^m\|_{L_{\alpha_1}{}^{p_1}(A_1)}\right) .$$

Pour j entier avec $0 \leqq j \leqq m-1$, tel que

$$\alpha_0 + 1/p_0 + j > 0, \qquad \alpha_1 + 1/p_1 + j < m$$

Reçu le 17. septembre 1963.

l'application $u \to u^{(j)}(0)$ est définie et continue de $W^m(p_0,\alpha_0,A_0;\, p_1,\alpha_1,A_1)$ dans $\mathscr{A}$; on désigne par $T_j{}^m(p_0,\alpha_0,A_0;\, p_1,\alpha_1,A_1)$ son image, c'est un espace de Banach pour la norme

$$\|a\|_{T_j{}^m} = \|a\|_{T_j{}^m(p_0,\alpha_0,A_0;\,p_1,\alpha_1,A_1)} = \inf_{\substack{u\in W^m\\ u^{(j)}(0)=a}} \|u\|_{W^m}.$$

Les espaces $T_j{}^m(p_0,\alpha_0,A_0;\, p_1,\alpha_1,A_1)$ sont appelés *espaces de traces.*

Nous utiliserons l'inégalité de Hardy [1, p. 330] sous la forme suivante: *Pour* $p \in [1, +\infty]$, $\alpha + 1/p < l + 1$ *l'application*

$$u(t) \to \frac{1}{t^{k+1}} \int_0^t s^l u(s)\, ds$$

est linéaire continue de $L_\alpha{}^p(A)$ *dans* $L^p_{\alpha+k-l}(A)$.

Enfin remarquons que, comme on le vérifie aisément (cf. [2], [3]), il existe $\mu = \mu(p_0,\alpha_0;\, p_1,\alpha_1;\, m)$, $\mu \leqq 0$, dépendant seulement de p_i, α_i et m, tel que les fonctions $u \in W^m(p_0,\alpha_0,A_0;\, p_1,\alpha_1,A_1)$ et leurs dérivées d'ordre $\leqq m-1$, considérées comme fonctions à valeurs dans $A_0 + A_1$ croissent au plus comme t^μ au voisinage de l'origine.

2. Identités entre les $T_j{}^m(p_0,\alpha_0,A_0;p_1,\alpha_1,A_1)$.

THÉORÈME. *Pour* $1 \leqq p_i \leqq +\infty$, $i=0,1$, *et* $1/p_0+\alpha_0+j>0$, $1/p_1+\alpha_1+j<m$, *on a*

$$T_j{}^m(p_0,\alpha_0,A_0;\, p_1,\alpha_1,A_1) = T_0{}^1(p_0,\alpha_0+j,A_0;\, p_1,\alpha_1+j-m+1,A_1)$$

avec équivalence des normes.

Ce théorème résulte évidemment des identités suivantes:

$$(2.1)\qquad T^m_{m-1}(p_0,\alpha_0,A_0;\, p_1,\alpha_1,A_1) = T^{m-1}_{m-2}(p_0,\alpha_0+1,A_0;\, p_1,\alpha_1,A_1)$$

pour $1/p_0+\alpha_0+m-1>0$, $1/p_1+\alpha_1<1$, $m-2\geqq 0$.

$$(2.2)\qquad T_j{}^m(p_0,\alpha_0,A_0;\, p_1,\alpha_1,A_1) = T_j{}^{m-1}(p_0,\alpha_0,A_0;\, p_1,\alpha_1-1,A_1)$$

pour $1/p_0+\alpha_0+j>0$, $1/p_1+\alpha_1+j<m$, $m-1>j$. (Nous sous-entendons l'équivalence des normes.)

DÉMONSTRATION DE (2.1): a) L'inclusion (algébrique et topologique)

$$T^m_{m-1}(p_0,\alpha_0,A_0;\, p_1,\alpha_1,A_1) \subset T^{m-1}_{m-2}(p_0,\alpha_0+1,A_0;\, p_1,\alpha_1,A_1)$$

résulte de ce que l'application

$$u(t) \to (l+m)v'(t) = w(t)$$

avec

$$v(t) = \frac{1}{t^{l+1}} \int_0^t s^l u(s)\, ds$$

où l est choisi $> -\mu = -\mu(p_0, \alpha_0; p_1, \alpha_1; m)$ et $> \alpha_0 + 1/p_0 - 1$ (donc $> \alpha_1 + 1/p_1 - m - 1$) est linéaire continue de

$$W^m(p_0, \alpha_0, A_0; p_1, \alpha_1, A_1) \quad \text{dans} \quad W^{m-1}(p_0, \alpha_0 + 1, A_0; p_1, \alpha_1, A_1)$$

et telle que

$$w^{(m-2)}(0) = u^{(m-1)}(0)$$

pour toute $u \in W^m(p_0, \alpha_0, A_0; p_1, \alpha_1, A_1)$. Pour vérifier ceci on remarque que

$$v'(t) = \frac{1}{t} u(t) - \frac{l+1}{t^{l+2}} \int_0^t s^l u(s)\, ds \in L^{p_0}_{\alpha_0+1}(A_0)$$

avec

$$\|v'\|_{L_{\alpha_0+1}{}^{p_0}(A_0)} \leqq C^{\text{te}} \|u\|_{L_{\alpha_0}{}^{p_0}(A_0)}$$

grâce à l'inégalité de Hardy, car $\alpha_0 + 1/p_0 < l+1$; comme $l > -\mu$ on peut écrire pour $j = 0, 1, \ldots, m$

$$v^{(j)}(t) = \frac{1}{t^{l+j+1}} \int_0^t s^{l+j} u^{(j)}(s)\, ds$$

et par conséquent nous avons

$$v^{(m-1)}(0) = \frac{1}{l+m} u^{(m-1)}(0) \quad \text{et} \quad v^{(m)}(t) \in L^{p_1}_{\alpha_1}(A_1)$$

avec

$$\|v^{(m)}\|_{L_{\alpha_1}{}^{p_1}(A_1)} \leqq c^{\text{te}} \|u^{(m)}\|_{L_{\alpha_1}{}^{p_1}(A_1)}$$

car $\alpha_1 + 1/p_1 < l + m + 1$.

b) L'inclusion réciproque

$$T^{m-1}_{m-2}(p_0, \alpha_0 + 1, A_0; p_1, \alpha_1, A_1) \subset T^m_{m-1}(p_0, \alpha_0, A_0; p_1, \alpha_1, A_1)$$

résulte de ce que l'application

$$u(t) \to \frac{l+m-1}{m-1} v(t) = w(t)$$

avec

$$v(t) = \frac{1}{t^l} \int_0^t s^l u(s)\, ds$$

où l est $> -\mu = -\mu(p_0, \alpha_0+1; p_1, \alpha_1; m-1)$ et $> \alpha_0 + 1/p_0$ (donc $> \alpha_1 + 1/p_1 - m$) est linéaire continue de

$$W^{m-1}(p_0, \alpha_0+1, A_0; p_1, \alpha_1, A_1) \quad \text{dans} \quad W^m(p_0, \alpha_0, A_0; p_1, \alpha_1, A_1)$$

et $w^{(m-1)}(0) = u^{(m-2)}(0)$. En effet $v(t) \in L^{p_0}_{\alpha_0}(A_0)$ et

$$\|v\|_{L_{\alpha_0}{}^{p_0}(A_0)} \leqq c^{\text{te}} \|u\|_{L_{\alpha_0+1}{}^{p_0}(A_0)};$$

ensuite on écrit que

$$v'(t) = u(t) - \frac{l}{t^{l+1}} \int_0^t s^l u(s)\, ds$$

et en conséquence pour $j = 1, 2, \ldots, m$

$$v^{(j)}(t) = u^{(j-1)}(t) - \frac{l}{t^{l+j}} \int_0^t s^{l+j-1} u^{(j-1)}(s)\, ds\,,$$

et nous avons

$$v^{(m-1)}(0) = \frac{m-1}{l+m-1}\, u^{(m-2)}(0)\,,$$

et $v^{(m)} \in L^{p_1}_{\alpha_1}(A_1)$ car $\alpha_1 + 1/p_1 < l + m$, et

$$\|v^{(m)}\|_{L_{\alpha_1}{}^{p_1}(A_1)} \leqq c^{\text{te}} \|u\|_{L_{\alpha_1}{}^{p_1}(A_1)}\,.$$

Démonstration de (2.2). Les techniques employées ici, étant analogues à celles que nous avons utilisées dans la démonstration précédente, nous indiquons seulement le schéma de la démonstration de (2.2).

a) Pour l assez grand, l'application

$$u(t) \to \frac{l-m+j+1}{j+1-m}\, v(t) = w(t)$$

avec

$$v(t) = u(t) - \frac{l}{t^{l-m+1}} \int_0^t s^{l-m} u(s)\, ds$$

est linéaire continue de

$$W^m(p_0, \alpha_0, A_0; p_1, \alpha_1, A_1) \quad \text{dans} \quad W^{m-1}(p_0, \alpha_0, A_0; p_1, \alpha_1 - 1, A_1)$$

et $w^{(j)}(0) = u^{(j)}(0)$; ceci montre l'inclusion (algébrique et topologique)

$$T_j{}^m(p_0, \alpha_0, A_0; p_1, \alpha_1, A_1) \subset T_j{}^{m-1}(p_0, \alpha_0, A_0; p_1, \alpha_1 - 1, A_1)\,.$$

Le seul point délicat à vérifier est le fait que $v^{(m-1)}(t) \in L^{p_1}_{\alpha_1 - 1}(A_1)$; pour cela on écrit que

$$v^{(m-1)}(t) = u^{(m-1)}(t) - \frac{l}{t^l}\int_0^t s^{l-1}u^{(m-1)}(s)\,ds = \frac{1}{t^l}\int_0^t s^l u^{(m)}(s)\,ds$$

par intégration par parties.

b) Pour montrer l'inclusion réciproque, on vérifie que pour l assez grand l'application

$$u(t) \to (l+j+1)v(t) = w(t)$$

avec

$$v(t) = \frac{1}{t^{l+1}}\int_0^t s^l u(s)\,ds$$

est linéaire continue de $W^{m-1}(p_0,\alpha_0,A_0;\, p_1,\alpha_1-1,A_1)$ dans $W^m(p_0,\alpha_0,A_0;\, p_1,\alpha_1,A_1)$ et $w^{(j)}(0)=u^{(j)}(0)$. Pour vérifier que $w^{(m)}(t) \in L^{p_1}_{\alpha_1}(A_1)$ on écrit que

$$v^{(m-1)}(t) = \frac{1}{t^{l+m}}\int_0^t s^{l+m-1}u^{(m-1)}(s)\,ds$$

d'où

$$v^{(m)}(t) = \frac{1}{t}u^{(m-1)}(t) - \frac{l+m}{t^{l+m+1}}\int_0^t s^{l+m-1}u^{(m-1)}(s)\,ds\,.$$

Le théorème est complètement démontré.

BIBLIOGRAPHIE

1. G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge, 1959.
2. J. L. Lions, *Sur les espaces d'interpolation; dualité*, Math. Scand. 9 (1961), 147–177.
3. J. L. Lions et J. Peetre, *Sur une classe d'espaces d'interpolation* (1963) ; à paraitre dans Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., Paris.

INSTITUT MATHÉMATIQUE, UNIVERSITÉ DE NANCY, FRANCE