MATH. SCAND. 13 (1963), 109–128

ÜBER SACHGEMÄSSE CAUCHYPROBLEME

HEINZ-OTTO KREISS

1. Einleitung.

Wir wollen in dieser Arbeit Systeme von partiellen Differentialgleichungen der Art:

$$\partial u/\partial t = P(t,\partial/\partial x)u = \sum_{j=0}^{m} P_j(t,\partial/\partial x)u \tag{1.1}$$

betrachten und untersuchen, wann das Cauchyproblem in einem Intervall $0 \leqq t \leqq T$, $T>0$ sachgemäss ist. Dabei bedeuten $x=(x_1,\ldots,x_s)'$ Punkte im reellen s-dimensionalen Raum R, $u=(u_1(x,t),\ldots u_n(x,t))'$ Funktionenvektoren im komplexen n-dimensionalen Raum S und

$$P_j(t,\partial/\partial x)u = \sum_{|\nu|=j} A_\nu(t)\, \partial^{|\nu|}u/\partial x_1^{\nu_1}\ldots\partial x_s^{\nu_s}, \tag{1.2}$$
$$\nu = (\nu_1,\ldots\nu_s), \qquad |\nu| = \sum \nu_i ,$$

homogene Differentialoperatoren der Ordnung j, deren Koeffizienten von t abhängige stetige quadratische Matrizen sind. (y' bedeutet der zu y transponierte Vektor.)

Ausserdem wenden wir im letzten Abschnitt dieser Arbeit die gewonnenen Resultate an, um Systeme 1. Ordnung zu untersuchen, deren Koeffizienten auch von x abhängen. Es gelingt uns dabei »a priori Ungleichungen« anzugeben, mit deren Hilfe man die Resultate von Leray [5] und Petrovskii [7] verallgemeinern kann.

Diese Arbeit stützt sich wesentlich auf eine frühere Arbeit des Verfassers [4], die wir als bekannt voraussetzen.

2. Definition der Sachgemässheit.

Die Sachgemässheit des Cauchyproblems für Systeme (1.1) wurde schon früher eingehend von Petrovskii [8] untersucht. Er definierte sie dabei im Sinne von Hadamard [3] im wesentlichen auf die folgende Weise: Es existiert eine Konstante C und eine natürliche Zahl p, so dass für alle t_1, t_2 mit $0 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq T$ für die Lösungen von (1.1) die Abschätzung

$$\sup_{x\in R} |u(x,t_2)| \leqq C \sum_{j=0}^{p} \sum_{|\nu|=j} \sup_{x\in R} |\partial^\nu u(x,t_1)/\partial x_1^{\nu_1}\ldots\partial x_s^{\nu_s}| \tag{2.1}$$

Eingegangen am 23. Juni 1962.

mit $|u|^2=\sum|u_i|^2$ gilt. Dabei sind als Anfangswerte für das System (1.1) zu einem beliebigen Zeitpunkt t_1 alle hinreichend oft differenzierbaren Funktionen zugelassen, die zusammen mit ihren Ableitungen beschränkt sind, und für die eine Lösung des Cauchyproblems existiert. Setzen wir

$$(2.2) \quad P(t,i\omega) = \sum_{j=0}^{m} P_j(t,i\omega), \qquad P_j(t,i\omega) = \sum_{|\nu|=j} A_\nu(t)(i\omega_1)^{\nu_1}\dots(i\omega_s)^{\nu_s},$$

so beweist Petrovskii das folgende Kriterium:

Das Cauchyproblem (1.1) mit konstanten Koeffizienten ist im Sinne von Hadamard dann und nur dann sachgemäss, falls es Konstanten C_i gibt, so dass für die Eigenwerte $\varkappa_j(\omega)$ von $P(i\omega)$ die Ungleichung

$$(2.3) \qquad \operatorname{Re}\varkappa_j(\omega) \leqq C_1 \log\big|1+|\omega|\big| + C_2$$

gilt. (L. Gårding [2] hat später bewiesen, dass man $C_1=0$ setzen kann.)

Dieses Kriterium gilt im allgemeinen nicht mehr, falls die Koeffizienten des Differentialoperators von t abhängen. Man kann nämlich Systeme (1.1) angeben, die im Sinne von Hadamard nicht sachgemäss sind, obwohl (2.3) für jedes $t\in(0,T)$ gilt. Ein solches System ist:

$$(2.4) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = U(t)\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}U^{-1}(t)\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad U(t) = \begin{pmatrix}\sin t & \cos t\\ -\cos t & \sin t\end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist (2.3) für jedes feste t erfüllt. Führen wir jetzt $v=U^{-1}u$ als neue Variable ein, so erhalten wir:

$$(2.5) \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\frac{\partial v}{\partial x} - U^{-1}\frac{\partial U}{\partial t}v = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\frac{\partial v}{\partial x} - \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}v.$$

Da U eine orthogonale Matrix ist, so ist das Cauchyproblem (2.4) genau dann sachgemäss, falls (2.5) es ist. (2.5) ist aber ein System mit konstanten Koeffizienten, und wir können daher das Kriterium (2.3) anwenden. Es ist

$$P(i\omega) = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}i\omega - \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

und es gilt für die Eigenwerte

$$\varkappa(\omega) = i\omega \pm [-(1+i\omega)]^{\frac{1}{2}}.$$

Die Ungleichung (2.3) ist also nicht erfüllt, und daher ist das Cauchyproblem (2.4) nicht sachgemäss. (Es sei darauf hingewiesen, dass entsprechende Überlegungen gelten, wenn man in $U(t)$ die Variable t durch x ersetzt.) Um also ein algebraisches Kriterium zu erhalten, welches bei geeigneten Stetigkeitsvoraussetzungen auch für t-variable Koeffizienten gilt, muss man die Definition der Sachgemässheit abändern.

Wir definieren jetzt, was wir in dieser Arbeit unter einem sachgemässen Cauchyproblem verstehen wollen. Es sei L_2 der Hilbertraum aller in R quadratisch integrierbaren n-dimensionalen Vektorfunktionen $u(x)$, $v(x), \ldots$, deren Norm und Skalarprodukt wie üblich durch

$$(2.6) \qquad (u,v) = \int_R u^* v\, dx = \int_R \sum_{i=1}^n \bar{u}_i v_i\, dx, \qquad (u,u) = \|u\|^2 ,$$

definiert sind. Weiter bezeichnen wir mit $\mathfrak{M} \subset L_2$ die Klasse aller Vektorfunktionen $f(x)$, deren Fouriertransformierte

$$(2.7) \qquad \varphi(\omega) = (2\pi)^{-s/2} \int_R e^{-i\omega x} f(x)\, dx, \qquad \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_s) \text{ reell}$$

existieren, stückweise stetig sind, und ausserhalb einer (von f abhängigen) kompakten Mengen $\subset R'$ verschwinden. Dabei bedeutet R' der reelle s-dimensionale Raum der Variablen $\omega = (\omega_1, \ldots \omega_s)$. Wir lassen jetzt für das Cauchyproblem (1.1) als Anfangswerte zu einem beliebigen Zeitpunkt $t_1 \in (0, T)$ alle Funktionen $f(x)$ zu, die in $\mathfrak{M}$ liegen. Fouriertransformiert man das System (1.1) und beachtet (2.7), so erhält man

$$(2.8) \qquad \psi(\omega,t) = (2\pi)^{-s/2} \int_R e^{-i\omega x} u(x,t)\, dx ,$$

$$d\psi(\omega,t)/dt = P(t,i\omega)\psi(\omega,t), \qquad \psi(\omega,t_1) = \varphi(\omega) .$$

Löst man diese Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen, so ergibt sich zu jeder Anfangswertverteilung $f(x) \in \mathfrak{M}$ eine Lösung

$$(2.9) \qquad u(x,t) = (2\pi)^{-s/2} \int_{R'} e^{i\omega x} \psi(\omega,t)\, d\omega, \qquad t \geqq t_1 ,$$

des Cauchyproblems (1.1), die für jedes feste t der Menge $\mathfrak{M}$ angehört, und die stetig nach t und unendlich oft nach x differenzierbar ist. Wir definieren jetzt:

Definition 1. *Das Cauchyproblem ist sachgemäss, falls es eine Konstante C gibt, so dass für alle t_1, t_2 mit $0 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq T$, für alle Lösungen* (2.9) *die Ungleichung*

$$(2.10) \qquad \|u(x,t_2)\| \leqq C \|u(x,t_1)\|$$

gilt.

Die entscheidende Forderung für die Sachgemässheit ist die Ungleichung (2.10). Da nämlich $\mathfrak{M}$ dicht in L_2 liegt, so kann man alle Funktionen von L_2 als Anfangswerte zulassen, wenn man auf die übliche Weise verallgemeinerte Lösungen einführt, für die dann auch (2.10) gilt.

3. Bedingungen für die Lösungen der Differentialgleichungen (2.8).

Wir wollen jetzt notwendige und hinreichende Bedingungen für die Lösungen der Differentialgleichungen (2.8) angeben, damit das Cauchyproblem sachgemäss ist. Wir beweisen den

SATZ 1. *Das Cauchyproblem* (1.1) *ist dann und nur dann sachgemäss, falls es eine Konstante* $D>0$ *gibt, so dass für alle* ω, *alle* t_1,t_2 *mit* $0 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq T$, *für die Lösungen von* (2.8) *die Ungleichung*

$$|\psi(\omega,t_2)| \leqq D|\psi(\omega,t_1)| \tag{3.1}$$

gilt.

BEWEIS. Gilt (3.1) so folgt aus Parsevals Gleichung offensichtlich, dass das Cauchyproblem sachgemäss ist. Dass die Bedingung (3.1) auch notwendig ist, beweisen wir so: Angenommen (3.1) gelte nicht. Dann gibt es Folgen ω_ν, $t_{1\nu}$, $t_{2\nu}$ und $\psi(\omega_\nu,t_{1\nu})$ mit $0 \leqq t_{1\nu} \leqq t_{2\nu} \leqq T$, so dass

$$|\psi(\omega_\nu,t_{2\nu})| \geqq \nu\,|\psi(\omega_\nu,t_{1\nu})|, \qquad \nu = 1,2,\ldots. \tag{3.2}$$

Da die Lösungen der Differentialgleichungen (2.8) stetig von ω und den Anfangswerten abhängen, gibt es ein $\delta_\nu>0$, so dass für alle ω mit $|\omega-\omega_\nu| \leqq \delta_\nu$ die folgende Ungleichung gilt:

$$|\psi(\omega,t_{2\nu})| \geqq \tfrac{1}{2}\nu\,|\psi(\omega,t_{1\nu})| \qquad \text{falls} \quad \psi(\omega,t_{1\nu}) = \psi(\omega_\nu,t_{1\nu})\,. \tag{3.3}$$

Setzen wir jetzt als Anfangswerte für eine Lösung $u_\nu(x,t)$ der Form (2.9) des Cauchyproblems zur Zeit $t=t_{1\nu}$

$$\psi(\omega,t_{1\nu}) = \begin{cases} \psi(\omega_\nu,t_{1\nu}) & \text{für} \quad |\omega-\omega_\nu| \leqq \delta_\nu\,, \\ 0 & \text{für} \quad |\omega-\omega_\nu| > \delta_\nu\,, \end{cases}$$

so folgt aus (3.3) und Parsevals Gleichung

$$\|u_\nu(x,t_{2\nu})\| \geqq \tfrac{1}{2}\nu\,\|u_\nu(x,t_{1\nu})\|\,.$$

(2.10) ist daher nicht erfüllt, und das Cauchyproblem ist daher nicht sachgemäss.

4. Systeme (1.1) mit konstanten Koeffizienten.

Wir betrachten jetzt Systeme (1.1) mit konstanten Koeffizienten und wollen ein notwendiges und hinreichendes algebraisches Kriterium für die Sachgemässheit des Cauchyproblems angeben. Zunächst kann man die Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichungssysteme (2.8) in der Form

(4.1) $$\psi(\omega,t) = e^{P(i\omega)(t-t_1)}\psi(\omega,t_1)$$

schreiben. Aus Satz 1 folgt daher sofort der

Satz 2. *Das Cauchyproblem* (1.1) *mit konstanten Koeffizienten ist dann und nur dann sachgemäss, falls es eine Konstante* $D>0$ *gibt, so dass für alle* ω

(4.2) $$|e^{P(i\omega)t}| \leqq D, \qquad 0 \leqq t \leqq T .$$

($|A|$ *bedeutet die euklidische Norm der Matrix* A, *d.h.* $|A| = \sup |Ax|/|x|$.)

Gilt die Ungleichung (4.2), so können wir sie noch in einer etwas anderen Form schreiben. Setzen wir $(\log D)/T = \alpha$, so folgt

$$|e^{P(i\omega)T}| \leqq e^{\alpha T} .$$

Also gilt für $0 \leqq t < \infty$

$$|e^{P(i\omega)t}| \leqq De^{\alpha t} ,$$

und für die Familie $\mathscr{F}$ von Matrizen $P(i\omega)-\alpha I$ gilt

(4.3) $$|e^{(P(i\omega)-\alpha I)t}| \leqq D, \qquad 0 \leqq t < \infty .$$

Daher können wir auf die Familie $\mathscr{F}$ den Hauptsatz von [6] anwenden, in dem notwendige und hinreichende Kriterien für die Familie $\mathscr{F}$ angegeben werden, damit (4.3) gilt. Wir erhalten den

Satz 3. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent*:

1) *Das Cauchyproblem* (1.1) *mit konstanten Koeffizienten ist sachgemäss.*

2) *Es gibt reelle Konstanten* C_{31}, C_{32} *und* α, *und zu jeder Matrix* $P(i\omega)$ *eine Matrix* $S = S(\omega)$, *für welche*

(4.4) $$\max(|S|,|S^{-1}|) \leqq C_{31}$$

ist, so dass

$$\begin{aligned} B &= S(P(i\omega)-\alpha I)S^{-1} \\ &\leqq SP(i\omega)S^{-1}-\alpha I = \begin{pmatrix} \varkappa_1-\alpha & b_{12} & \cdots\cdots & b_{1n} \\ 0 & \varkappa_2-\alpha & b_{23} \;\cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & \varkappa_n-\alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist, und die Ungleichungen

(4.5) $$\operatorname{Re}\varkappa_j-\alpha \leqq \operatorname{Re}\varkappa_k-\alpha \leqq 0, \qquad j \geqq k ,$$

und

(4.6) $$|b_{kj}| \leqq C_{32}(|\operatorname{Re}\varkappa_k-\alpha|)$$

gelten.

3) *Es existieren reelle Konstanten* C_4 *und* α *und zu jeder Matrix* $P(i\omega)$ *eine positiv definite hermitesche Matrix* $H(\omega)$, *für welche*

$$\max(|H|,|H^{-1}|) \leqq C_4, \quad d.h. \quad C_4^{-1}I \leqq H \leqq C_4 I \tag{4.7}$$

ist, so dass

$$H(\omega)(P(i\omega)-\alpha I)+(P^*(i\omega)-\alpha I)H(\omega) \leqq 0 \,. \tag{4.8}$$

(*A^* bedeutet die zu A adjungierte Matrix.*)

Es sei hier noch darauf hingewiesen, dass man nach Abschnitt 4 von [4] die Matrizen $H(\omega)$ mit Hilfe der Matrizen $S(\omega)$ konstruieren kann. Man kann nämlich H in der Form

$$H = S^*DS \tag{4.9}$$

annehmen, wobei D eine geeignete von ω unabhängige positiv definite Diagonalmatrix ist.

Wir wollen jetzt noch die dritte Aussage des letzten Satzes auf eine andere Art formulieren. Dazu definieren wir:

DEFINITION 2. *Der Differentialoperator* $P(\partial/\partial x)$ *ist bezüglich einer Norm* (u,Hu) *halbbeschränkt, falls*

1) H *ein linearer beschränkter und überall definierter positiv definiter symmetrischer Operator in* L_2 *ist, und*

2) *eine Konstante* α *existiert, so dass für alle* $u(x) \in \mathfrak{M}$ (*s.* (2.7))

$$\begin{aligned}(P(\partial/\partial x)u,Hu)+(u,HP(\partial/\partial x)u) &= 2\,\mathrm{Re}(P(\partial/\partial x)u,Hu)\\ &\leqq 2\alpha(u,Hu)\,.\end{aligned}$$

Man beachte, dass die Norm (u,Hu) mit der L_2-Norm äquivalent ist. Wir beweisen jetzt den

SATZ 3. *Das Cauchyproblem* (1.1) *mit konstanten Koeffizienten ist dann und nur dann sachgemäss, falls* $P(\partial/\partial x)$ *bezüglich einer Norm* (u,Hu) *halbbeschränkt ist.*

BEWEIS. Es sei das Cauchyproblem sachgemäss. Dann geht aus dem Beweis des Hauptsatzes von [4, (s. Abschnitt 3)] hervor, dass man die Matrizen $S(\omega)$ und damit nach (4.9) auch die Matrizen $H(\omega)$ des letzten Satzes als stückweise stetige Funktionen von ω annehmen kann. $S(\omega)$ kann man nämlich in der Form $S(\omega)=S_1(\omega)\,U(\omega)$ schreiben, wobei $U(\omega)$ irgend eine unitäre Matrix ist, die $P(i\omega)$ auf Triangelform (Schurs Normalform) transformiert, und die Koeffizienten von $S_1(\omega)$ gebrochen rationale Funktionen der Koeffizienten von $U(\omega)P(i\omega)U^*(\omega)$ sind. Daher können wir einen linearen beschränkten und positiv definiten symmetrischen Operator H in L_2 durch

$$(4.10)\qquad Hu = \int_{R'} e^{i\omega x} H(\omega)\psi(\omega)\, d\omega, \qquad u = (2\pi)^{-s/2} \int_{R'} e^{i\omega x} \psi(\omega)\, d\omega\,,$$

definieren, für den nach (4.7) und Parsevals Gleichung gilt:

$$C_4^{-1}\|u\|^2 \leqq (u,Hu) = \int_{R'} \psi^*(\omega)H(\omega)\psi(\omega)\, d\omega \leqq C_4\|u\|^2\,.$$

Aus der Ungleichung (4.8) folgt dann für alle $u(x) \in \mathfrak{M}$

$$\begin{aligned}(4.11)\qquad \big(P(\partial/\partial x)u,Hu\big) &+ \big(u,HP(\partial/\partial x)u\big)\\ &= \int_{R'} \psi^*\big(P^*(i\omega)H(\omega)+H(\omega)P(i\omega)\big)\psi\, d\omega\\ &\leqq 2\alpha \int_{R'} \psi^* H(\omega)\psi\, d\omega\\ &= 2\alpha(u,Hu)\,.\end{aligned}$$

Ist umgekehrt $P(\partial/\partial x)$ bezüglich einer Norm (u,Hu) halbbeschränkt, so gilt für alle Lösungen des Cauchyproblems der Art (2.9), die ja für jedes feste t der Menge $\mathfrak{M}$ angehören,

$$\begin{aligned}(4.12)\qquad \partial(u,Hu)/\partial t &= (\partial u/\partial t,Hu)+(u,H\partial u/\partial t)\\ &= \big(P(\partial/\partial x)u,Hu\big)+\big(u,HP(\partial/\partial x)u\big)\\ &\leqq 2\alpha(u,Hu)\,.\end{aligned}$$

Da die Norm (u,Hu) mit der L_2-Norm äquivalent ist, so folgt aus (4.12) die Ungleichung (2.10). Das Cauchyproblem ist also sachgemäss.

5. Systeme (1.1) mit t-variablen Koeffizienten.

Wir wollen jetzt zeigen, dass die zwei Kriterien des letzten Satzes im wesentlichen auch für t-variable Koeffizienten gelten. Wir beweisen den

SATZ 4. *Angenommen die zweite oder die dritte Aussage des Satzes* 3 *gilt für alle festen* $t \in (0,T)$ *mit von* t *unabhängigen Konstanten* C_{3i} *und* α, *bzw.* C_4 *und* α. *Dann ist das Cauchyproblem* (1.1) *sachgemäss, falls die Matrizen* $S(t,\omega)$ *bzw.* $H(t,\omega)$ *für jedes feste* ω *stetig nach* t *differenzierbar sind, und es eine von* t *und* ω *unabhängige Konstante* K *gibt, so dass* $|\partial S/\partial t| \leqq K$ *bzw.* $\partial H/\partial t \leqq KI$.

BEWEIS. Gilt die zweite Aussage des Satzes 3 mit von t unabhängigen Konstanten C_{3i},α und ist $S(t,\omega)$ stetig differenzierbar, so folgt aus Abschnitt 4 von [3], angewandt auf die Familie $\mathscr{F}$ von Matrizen $P(t,i\omega)-\alpha I$, ω reell, $t\in(0,T)$, dass es eine konstante positiv definite Diagonalmatrix D gibt, so dass die Matrizen

$$H=S^*DS$$

die im Satz vorausgesetzten Eigenschaften haben. Wir brauchen daher den Satz nur für den Fall zu beweisen, dass es solche Matrizen $H(t,\omega)$ gibt. Betrachten wir jetzt die gewöhnlichen Differentialgleichungen (2.8), so folgt aus (4.7) und (4.8)

$$\begin{aligned} d\psi^*H\psi/dt &= \psi^*(HP+P^*H)\psi+\psi^*(\partial H/\partial t)\psi \\ &\leqq (2\alpha+C_4K)\psi^*H\psi\,. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Also ist die Ungleichung (3.1) erfüllt, und das Cauchyproblem ist nach Satz 1 sachgemäss.

6. Beispiele für sachgemässe Cauchyprobleme.

Wir wollen jetzt einige Beispiele für sachgemässe Cauchyprobleme angeben.

1) Parabolische Systeme (s. Petrovskii [8]).

Ist $m\equiv 0 \bmod 2$, und gibt es eine Konstante $\delta>0$, so dass für alle ω, t für die Eigenwerte $\varkappa_j(\omega)$ von $P(t,i\omega)$ die Ungleichung

$$\operatorname{Re}\varkappa_j(\omega) \leqq -2\delta|\omega|^m+\delta^{-1} \tag{6.1}$$

gilt, so ist das Cauchyproblem (1.1) sachgemäss. Wir können nämlich Matrizen $H(t,\omega)$ auf folgende Weise konstruieren: Ist $t_0\in(0,T)$ irgend ein fester t-Wert, so ist das Cauchyproblem für das System

$$\partial u/\partial t = \hat{P}(t_0,\partial/\partial x)u = \delta\left(-\sum_{\nu=1}^{s}\partial^2/\partial x_\nu^{\,2}\right)^{m/2} u + P(t_0,\partial/\partial x)u \tag{6.2}$$

sachgemäss. Es gibt nämlich für $|\omega|\neq 0$ eine unitäre Transformation $U(\omega)$, so dass die Anordnungsbedingung (4.5) erfüllt ist, und

$$\begin{aligned} U(\omega)\hat{P}(t_0,i\omega)U^*(\omega) &= U(\omega)P(t_0,i\omega)U^*(\omega)+\delta|\omega|^mI \\ &= \begin{pmatrix} \varkappa_1+\delta|\omega|^m & b_{12}\,\cdots\cdots & & b_{1n} \\ 0 & \varkappa_2+\delta|\omega|^m & b_{23}\,\cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & \varkappa_n+\delta|\omega|^m \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Nach (6.1) gilt für hinreichend grosse $|\omega|$ die Ungleichung

$$\operatorname{Re}(\varkappa_j + \delta|\omega|^m) \leqq -\tfrac{1}{2}\delta|\omega|^m .$$

Da die $b_{ij}/(|\omega|^m+1)$ beschränkt sind, so sind auch die Ungleichungen (4.6) für einen geeigneten Wert α erfüllt. Also ist nach Satz 3 das Cauchyproblem für (6.2) sachgemäss, und es gibt Konstanten C_4, α und Matrizen $H(t_0,\omega)$, die die Ungleichungen (4.7) erfüllen, so dass

$$\begin{aligned}
(6.4) \qquad & H(t_0,\omega)\hat{P}(t_0,i\omega) + \hat{P}^*(t_0,i\omega)H(t_0,\omega) \\
&= H(t_0,\omega)P(t_0,i\omega) + P^*(t_0,i\omega)H(t_0,\omega) + 2\delta|\omega|^m H(t_0,\omega) \\
&\leqq 2\alpha H(t_0,\omega) .
\end{aligned}$$

Betrachten wir jetzt $P(t,i\omega)$ in einer geeigneten Umgebung von t_0, so folgt für $|\omega| \geqq 1$:

$$\begin{aligned}
& H(t_0,\omega)P(t,i\omega) + P^*(t,i\omega)H(t_0,\omega) \\
&\leqq H(t_0,\omega)P(t_0,i\omega) + P^*(t_0,i\omega)H(t_0,\omega) + \\
&\quad + 2|\omega|^m \big|H(t_0,\omega)\big(P(t_0,i\omega)-P(t,i\omega)\big)/|\omega|^m\big| I \\
&= H(t_0,\omega)P(t_0,i\omega) + P^*(t_0,i\omega)H(t_0,\omega) + \delta|\omega|^m H(t_0,\omega) + \\
&\quad + 2|\omega|^m\Big(\big|H(t_0,\omega)\big(P(t_0,i\omega)-P(t,i\omega)\big)/|\omega|^m\big| - \tfrac{1}{2}\delta H(t_0,\omega)\Big) .
\end{aligned}$$

Da die Koeffizienten von $P(t,i\omega)$ kontinuerlich bezüglich t sind, so folgt, dass es eine von ω unabhängige Umgebung von t_0 gibt, mit

$$\big|H(t_0,\omega)\big(P(t_0,i\omega)-P(t,i\omega)\big)/|\omega|^m\big| - \tfrac{1}{2}\delta H(t_0,\omega) \leqq 0 .$$

Für diese Umgebung gibt es daher nach (6.4) für alle $|\omega|$ eine Konstante α', so dass

$$(6.5) \qquad H(t_0,\omega)P(t,i\omega) + P^*(t,i\omega)H(t_0,\omega) \leqq 2\alpha' H(t_0,\omega) - \delta|\omega|^m H(t_0,\omega) .$$

Damit ist gezeigt, dass das Cauchyproblem lokal richtig gestellt ist. Auf die übliche Weise folgt dann, dass das Cauchyproblem auch global richtig gestellt ist, denn jedes endliche t-Intervall $(0,T)$ kann man nach dem Satz von Heine–Borel mit endlich vielen Umgebungen der obigen Art überdecken.

Es sei noch darauf hingewiesen, dass man die Abschätzung (6.5) auch auf den Fall verallgemeinern kann, in dem die Koeffizienten des Differentialoperators P auch von x abhängen. Daraus kann man dann »a priori Abschätzungen« herleiten, die zu Existenzsätzen führen. (Vgl. hierzu Gårding [1] und Mizohata [6].)

2) Homogene Systeme der Form $\partial u/\partial t = P_m(\partial/\partial x)u$ mit konstanten Koeffizienten, für die die Eigenverte von $P_m(i\omega)$ rein imaginär sind. Wir beweisen den

SATZ 5. *Gegeben sei ein System*

$$\partial u/\partial t = P_m(\partial/\partial x)u, \qquad P_m = \sum_{|\nu|=m} A_\nu \partial^m/\partial x_1^{\nu_1} \ldots \partial x_s^{\nu_s} \tag{6.6}$$

mit konstanten Koeffizienten. Dann gilt:

(i) *Ist $m \equiv 1 \bmod 2$, und ist das Cauchyproblem sachgemäss, so sind die Eigenwerte $\varkappa_j(\omega)$ von $P_m(i\omega)$ notwendig rein imaginär.*

(ii) *Sind die $\varkappa_j(\omega)$ rein imaginär, so ist das Cauchyproblem dann und nur dann sachgemäss. falls es eine Konstante C_{31} und zu jedem ω eine Matrix $S(\omega)$ mit*

$$\max(|S|, |S^{-1}|) \leqq C_{31} \tag{6.7}$$

gibt, so dass

$$S(\omega)P_m(i\omega)S^{-1}(\omega) = \begin{pmatrix} i\varkappa_1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & i\varkappa_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & i\varkappa_n \end{pmatrix}. \tag{6.8}$$

BEWEIS. Für Systeme der Art (6.6) gilt

$$P_m(i\omega) = |\omega|^m P(i\omega/|\omega|); \qquad \text{d.h.} \quad \varkappa_j(\omega) = |\omega|^m \varkappa_j(\omega/|\omega|). \tag{6.9}$$

Ist ausserdem $m \equiv 1 \bmod 2$, so gilt weiter

$$P_m(-i\omega) = -P_m(i\omega); \qquad \text{d.h.} \quad \varkappa_j(-\omega) = -\varkappa_j(\omega). \tag{6.10}$$

Für $m \equiv 1 \bmod 2$ ist daher die Ungleichung (4.5) genau dann erfüllt, falls $\operatorname{Re} \varkappa_j(\omega) = 0$. Damit ist die erste Behauptung des Satzes bewiesen. Die zweite ergibt sich so: Das Cauchyproblem ist für die Differentialgleichung (6.6) nach Satz 3 offensichtlich sachgemäss, falls (6.7) und (6.8) gelten. Ist umgekehrt das Cauchyproblem sachgemäss, so gibt es nach Satz 3 Matrizen $\hat{S}(\omega)$, die (4.4) erfüllen, so dass für alle ω

$$\begin{aligned} \hat{S}(\omega)P_m(i\omega)\hat{S}^{-1}(\omega) &= |\omega|^m \hat{S}(\omega)P_m(i\omega/|\omega|)\hat{S}^{-1}(\omega) \\ &= |\omega|^m \begin{pmatrix} \varkappa_1' & b'_{12} & \ldots & \ldots & b'_{1n} \\ 0 & \varkappa_2' & b'_{23} & \ldots & b'_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \varkappa_n' \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{6.11}$$

$$|\omega|^m |b'_{ij}| \leqq C_{32}|\alpha|.$$

Halten wir jetzt $\omega/|\omega|$ fest und betrachten die Folge $|\omega|=1,2,\ldots$, so erhalten wir aus (6.11): $\lim b'_{ij}=0$. Da die $\hat{S}(\omega)$ gleichmässig beschränkt sind, so können wir eine Teilfolge $|\omega|_\nu$ auswählen, so dass $\lim \hat{S}(\omega)=S(\omega)$ existiert. Für die so konstruierten Matrizen $S(\omega)$ gilt (6.7) und (6.8). Damit ist auch die zweite Behauptung des Satzes bewiesen.

Als Matrizen H können wir dann

$$H = H(\omega) = S^*(\omega)S(\omega) \tag{6.12}$$

wählen. Dann gilt nämlich

$$\begin{aligned} &H(\omega)P_m(i\omega)+P_m^*(i\omega)H(\omega) \\ &\quad = S^*(\omega)\big(S(\omega)P_mS^{-1}(\omega)+S^{*-1}(\omega)P_m^*(i\omega)S^*(\omega)\big)S(\omega) = 0\,. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Übrigens haben die Matrizen H notwendig die Gestalt (6.12). Es gilt nämlich der (vgl. auch O. Tausky [9])

Hilfssatz 1. *Dann und nur dann existiert zu einer quadratischen Matrix A der Ordnung n eine positiv definite hermitesche Matrix H, so dass $HA+A^*H=0$, falls die Eigenwerte von A rein imaginär sind, und A ein vollständiges System von Eigenvektoren hat. Für alle solche Matrizen H gilt dann $H=S^*S$ wobei S irgend eine Matrix ist, für die SAS^{-1} Diagonalgestalt hat, d.h. $S=T^{-1}$, wobei die Spaltenvektoren von T aus n linear unabhängigen Eigenvektoren von A bestehen.*

Beweis. Es sei H irgend eine positiv definite Matrix mit

$$HA+A^*H = 0\,. \tag{6.14}$$

Da es bekanntlich eine nichtsinguläre Matrix T_1 gibt, so dass $H=T_1^{*-1}T_1^{-1}$, so folgt aus (6.14)

$$T_1^{-1}AT_1 + T_1^*AT_1^{*-1} = 0\,. \tag{6.15}$$

Also ist $T_1^{-1}AT_1$ antisymmetrisch. Daher hat $T_1^{-1}AT_1$ rein imaginäre Eigenwerte und n linear unabhängige Eigenvektoren. Dasselbe gilt dann auch für A. Aus (6.15) folgt dann weiter, dass eine unitäre Matrix U existiert, so dass

$$UT_1^{-1}AT_1U^* = T^{-1}AT, \qquad T = T_1U^*,$$

Diagonalform hat. Also ist T die gesuchte Matrix die A auf Diagonalform transformiert, und es gilt

$$H = T_1^{*-1}T_1^{-1} = T^{*-1}T^{-1}\,.$$

Gibt es umgekehrt eine nichtsinguläre Matrix T, so dass $T^{-1}AT$ Diagonalform hat, so folgt entsprechend (6.13) die Gleichung (6.14) mit

$H = T^{*-1}T^{-1}$ falls die Eigenwerte von A rein imaginär sind. Damit ist aber der Satz bewiesen.

Führen wir jetzt entsprechend dem Satz 3 den durch (4.10) definierten Operator H ein, so erhalten wir den

SATZ 5. *Sind die Eigenwerte von $P_m(i\omega)$ rein imaginär, so ist das Cauchy-problem für die Differentialgleichung* (6.6) *dann und nur dann sachgemäss, falls eine Norm (u, Hu) existiert, so dass für alle $u(x) \in \mathfrak{M}$*

$$(P_m(\partial/\partial x)u, Hu) + (u, HP_m(\partial/\partial x)u) = 0 ,$$

oder anders ausgedrückt, falls der Operator $i\ P(\partial/\partial x)$, mit $\mathfrak{M}$ als Definitionsbereich, bezüglich der Norm (u, Hu) symmetrisch ist.

7. Darstellung des Operators *H* als Quotient von Differentialoperatoren.

Wir wollen jetzt Bedingungen angeben, damit man im letzten Satz den Operator H als Quotient von Differentialoperatoren darstellen kann. Diese Darstellung ist wichtig, falls man Differentialgleichungen betrachten will, deren Koeffizienten auch von x abhängen. Zunächst führen wir entsprechend Petrovskii [8, S. 56] eine Bezeichnung ein.

DEFINITION 2. *Gegeben sei eine Matrix $A(\beta) = (a_{ij}(\beta))$, $0 \leqq i, j \leqq n$, deren Elemente auf einer offenen Menge $\mathfrak{N}$ stetige Funktionen eines reellen Parameters $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_r)$ sind. Wir sagen, dass $A(\beta)$ auf $\mathfrak{N}$ von einfacher Struktur ist, falls $A(\beta)$ für alle $\beta \in \mathfrak{N}$ die folgenden Eigenschaften hat:*

1) *A hat n linear unabhängige Eigenvektoren.*

2) *Die Multiplizität der Wurzeln der charakteristischen Gleichung $f(\varkappa) = \det|A - I\varkappa| = 0$ ist von β unabhängig, d.h. $f(\varkappa)$ kann man in der Form*

$$f(\varkappa) = \prod_\nu (g_\nu(\varkappa))^\nu = \prod_\nu (\varkappa^{r_\nu} + q_{\nu 1}\varkappa^{r_\nu - 1} + \ldots + q_{\nu r_\nu})^\nu, \qquad \sum_\nu \nu r_\nu = n , \tag{7.1}$$

schreiben, wobei die Wurzeln $\varkappa_{\nu\mu}$ von $g_\nu(\varkappa)$ genau alle Wurzeln von $f(\varkappa) = 0$ der Multiplizität ν sind.

Setzt man ausserdem voraus, dass die a_{ij} r-mal stetig nach β differenzierbar sind, so folgt dasselbe auch für die $q_{\nu\mu}$. Nach Petrovskii [8, S. 57] sind nämlich die $\varkappa_{\nu\mu}$ r-mal stetig differenzierbar, da diese einfache Wurzeln von $d^\nu f(\varkappa)/d\varkappa^\nu = 0$ sind.

Wir beweisen jetzt den entscheidenden

HILFSSATZ 2. *Es sei $A(\beta) = (a_{ij}(\beta))$, $0 \leqq i, j \leqq n$, eine Matrix, deren Elemente auf einer offenen Menge $\mathfrak{N}$ stetige Funktionen eines reellen Parameters β sind. Es sei A auf $\mathfrak{N}$ von einfacher Struktur, und es gelte für alle $\beta \in \mathfrak{N}$ für die Eigenwerte $\varkappa$ von A*

$$\operatorname{Re}\varkappa = 0\,. \tag{7.2}$$

Dann gibt es zu jedem $\beta^{(0)} \in \mathfrak{R}$ ein $\varepsilon > 0$, und eine auf $\mathfrak{R}$ definierte positiv semidefinite hermitesche Matrix $H(\beta)$, so dass für alle β mit $|\beta-\beta^{(0)}|<\varepsilon$ die Matrix $H(\beta)$ positiv definit ist, und

$$HA + A^*H = 0\,.$$

Dabei sind die Elemente von H ganze rationale Funktionen in den a_{ij}, $\bar{a}_{ij}$ und $q_{\nu\mu}$.

Beweis. Wir betrachten irgend einen Punkt $\beta^{(0)} \in \mathfrak{R}$. Ist die Multiplizität eines Eigenwertes $\varkappa$ gleich n, so ist $A = \varkappa I$, und die Aussage des Satzes ist offensichtlich richtig. Wir können daher annehmen, dass die Multiplizität aller Eigenwerte kleiner als n ist. Wir betrachten jetzt alle Eigenwerte $\varkappa = \varkappa_{\nu\mu}$ einer Multiplizität $\nu < n$, und wollen die zugeordneten Eigenvektoren bestimmen. Die Komponenten x_i dieser Eigenvektoren sind durch die linearen Gleichungen

$$L_k = a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + (a_{kk} - \varkappa_{\nu\mu})x_k + \ldots + a_{kn}x_n = 0, \qquad k = 1,\ldots,n, \tag{7.3}$$

bestimmt. Nach Voraussetzung hat dieses Gleichungssystem den Rang $n-\nu$, d.h. zu jedem Eigenwert $\varkappa_{\nu\mu}$ gibt es genau ν linear unabhängige Eigenvektoren. Wir können daher Konstanten $\lambda_{l1},\ldots,\lambda_{ln}$; $l = 1,2,\ldots,n$, fest so wählen, dass für $\beta = \beta^{(0)}$ die Eigenvektoren, die irgend einem der Eigenwerte $\varkappa_{\nu\mu}$ zugeordnet sind, durch die Gleichungen

$$G_l = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{lk} L_k = b_{l1}x_1 + \ldots + b_{ln}x_n = 0, \qquad l = 1,2,\ldots,n-\nu, \tag{7.4}$$

bestimmt werden. Die Unterdeterminanten $\det|b_{kr}|$ der Ordnung $n-\nu$ sind nämlich ganze rationale Funktionen in den λ_{lk}, die sicher nicht alle identisch verschwinden. Daher verschwinden sie gleichzeitig nur für spezielle Werte der λ_{lk}. Die Eigenvektoren erhalten wir dann auf folgende Weise: Zur Unterdeterminante $h^{(1)} = \det|b_{kr}|$, $1 \leqq k$, $r \leqq n-\nu$ der Ordnung $n-\nu$, können wir mit Hilfe von Cramers Regel ν Eigenvektoren

$$\begin{aligned} h_1^{(1)} &= (h_{11},\ldots,h_{1n-\nu},h^{(1)},0,\ldots,0)', \\ h_2^{(1)} &= (h_{21},\ldots,h_{2n-\nu},0,h^{(1)},0,\ldots,0)', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

angeben. Dabei sind die h_{ij} Unterdeterminanten $\det|b_{kr}|$ der Ordnung $n-\nu$ die mit einem geeignetem Vorzeichen versehen sind. Diese Eigenvektoren sind genau dann linear unabhängig, falls $h^{(1)} \neq 0$. Entsprechend können wir zu jeder Unterdeterminante $h^{(i)} = \det|b_{kr}|$ der Ordnung $n-\nu$,

ν Eigenvektoren konstruieren, die genau dann linear unabhängig sind, falls $h^{(i)} \neq 0$. Da für jeden Eigenwert $\varkappa_{\nu\mu}$ nicht alle $h^{(i)}$ verschwinden, so können wir genau so wie oben Konstanten μ_{ij} fest vorgeben, so dass für $\beta = \beta^{(0)}$ die ν Eigenvektoren

$$f_j(\varkappa_{\nu\mu}) = \sum_i \mu_{ij} h_j^{(i)}, \qquad j = 1, 2, \ldots, \nu,$$

für alle $\varkappa_{\nu\mu}$ linear unabhängig sind. Wir können also für $\beta = \beta^0$ die irgend einem der $\varkappa_{\nu\mu}$ entsprechenden ν linear unabhängigen Eigenvektoren in der Form

$$f_j(\varkappa_{\nu\mu}) = (f_{j1}(\varkappa_{\nu\mu}), \ldots, f_{jn}(\varkappa_{\nu\mu}))', \qquad j = 1, 2, \ldots, \nu, \tag{7.5}$$

darstellen. Dabei sind die Komponenten $f_{jk}(\varkappa_{\nu\mu})$ ganze rationale Funktionen in den a_{ij} und $\varkappa_{\nu\mu}$. Ausserdem gilt diese Darstellung der Eigenvektoren für alle $\beta \in \mathfrak{R}$, für die die Vektoren (7.5) linear unabhängig sind.

Wir bilden jetzt mit Hilfe dieser Eigenvektoren die Matrix

$$T_\nu = \big(f_1(\varkappa_{\nu 1}) \ldots f_\nu(\varkappa_{\nu 1})\, f_1(\varkappa_{\nu 2}) \ldots f_\nu(\varkappa_{\nu 2}) \ldots\big). \tag{7.6}$$

Dabei durchlaufen die $\varkappa_{\nu\mu}$ alle Eigenwerte der Multiplizität ν, d.h. alle Wurzeln des Faktors $g_\nu(\varkappa)$ von (7.1). Für

$$T_\nu T_\nu^* = \left(\sum_\mu \sum_l f_{lr}(\varkappa_{\nu\mu}) \overline{f_{ls}(\varkappa_{\nu\mu})}\right) = (c_{rs}), \qquad 0 \leqq r,\ s \leqq n\ ,$$

folgt dann, dass die c_{rs} ganze rationale Funktionen in den a_{ij}, $\bar{a}_{ij}$ und $\varkappa_{\nu\mu}$ sind, die ausserdem bezüglich der $\varkappa_{\nu\mu}$ symmetrische Funktionen sind. (Man beachte, dass $\varkappa_{\nu\mu} = -\bar{\varkappa}_{\nu\mu}$ nach (7.2).) Daher folgt nach dem Fundamentalsatz für symmetrische Funktionen, dass die c_{rs} als ganze rationale Funktionen in den a_{ij}, $\bar{a}_{ij}$ und den Koeffizienten $q_{\nu\mu}$ des Faktors $g_\nu(\varkappa)$ von (7.2) geschrieben werden können. Wir bilden jetzt mit Hilfe aller Eigenvektoren von A, die für $\beta = \beta^{(0)}$ nichtsinguläre Matrix

$$T = (T_1 \ldots T_\sigma)\,. \tag{7.7}$$

Dabei ist σ die höchste vorkommende Multiplizität der Eigenwerte. Dann gilt für $\beta = \beta^{(0)}$ sowie für alle $\beta \in \mathfrak{R}$, für die T nicht singulär ist

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \varkappa_1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & \varkappa_2 & 0 \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots\ldots & 0 & \varkappa_n \end{pmatrix}, \tag{7.8}$$

und die Elemente von

$$TT^* = \sum_{i=1}^{\sigma} T_i T_i^* \tag{7.9}$$

sind ganze rationale Funktionen in den a_{ij}, $\bar{a}_{ij}$ und $q_{\nu\mu}$. Dasselbe gilt dann auch für die Koeffizienten der für alle $\beta \in \mathfrak{N}$ positiv semidefiniten und mindestens in einer Umgebung von $\beta = \beta^{(0)}$ positiv definiten hermiteschen Matrix

$$H = \det|TT^*|(TT^*)^{-1} = (\det|T|)^2 T^{*-1} T^{-1} . \tag{7.10}$$

Man beachte nämlich, dass H für $\beta = \beta^{(0)}$ nicht singulär ist, und dass die Elemente von H stetige Funktionen von β sind. Für alle $\beta \in \mathfrak{N}$, für die H nicht singulär ist, erhalten wir dann mit Hilfe von (7.2) und (7.8)

$$HA + A^*H = (\det|T|)^2 T^{*-1}(T^{-1}AT + T^*A^*T^{*-1})T^1 = 0 . \tag{7.11}$$

Damit ist aber der Satz bewiesen.

Wir beweisen jetzt noch einen wichtigen Spezialfall:

Hilfssatz 2′. *Ausser den Voraussetzungen des Hilfssatzes 2 nehmen wir an, dass man β in $\beta_{\mathrm{I}} = (\beta_1, \ldots, \beta_r)$ und $\beta_{\mathrm{II}} = (\beta_{l+1}, \ldots, \beta_r)$ aufspalten kann, so dass man $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(\beta)$ als direktes Produkt $\mathfrak{N}_{\mathrm{I}}(\beta_{\mathrm{I}}) \times \mathfrak{N}_{\mathrm{II}}(\beta_{\mathrm{II}})$ schreiben kann. Ausserdem seien die Koeffizienten der Matrix A und die $q_{\nu\mu}$ für jeden festen Wert β_{I} analytische Funktionen von β_{II}. Dann gilt: Es gibt zu jedem $\beta_{\mathrm{I}}^{(0)} \in \mathfrak{N}_{\mathrm{I}}(\beta_{\mathrm{I}})$ ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle β_{I} mit $|\beta_{\mathrm{I}} - \beta_{\mathrm{I}}^{(0)}| < \varepsilon$ und alle $\beta_{\mathrm{II}} \in \mathfrak{K} \subset \mathfrak{N}_{\mathrm{II}}(\beta_{\mathrm{II}})$ eine positiv definite Matrix H der obigen Art existiert. Dabei ist $\mathfrak{K}$ eine beliebige kompakte Teilmenge von $\mathfrak{N}_{\mathrm{II}}(\beta_{\mathrm{II}})$.*

Beweis. Es sei $\beta_{\mathrm{I}}^{(0)} \in \mathfrak{N}_{\mathrm{I}}(\beta_{\mathrm{I}})$ fest vorgegeben. Nach Hilfssatz 2 gibt es zu jedem Punkt $\beta^{(i)} = (\beta_{\mathrm{I}}^{(0)}, \beta_{\mathrm{II}}^{(i)}) \in \mathfrak{N}(\beta)$ ein $\varepsilon_i > 0$, so dass für alle β mit $|\beta_{\mathrm{I}} - \beta_{\mathrm{I}}^{(0)}| < \varepsilon_i$ und $|\beta_{\mathrm{II}} - \beta_{\mathrm{II}}^{(i)}| < \varepsilon_i$ eine solche Matrix H_i existiert. Für die Matrix H_i gilt (7.11) nicht nur für $|\beta_{\mathrm{I}} - \beta_{\mathrm{I}}^{(0)}| < \varepsilon_i$, $|\beta_{\mathrm{II}} - \beta_{\mathrm{II}}^{(i)}| < \varepsilon_i$, sondern für alle $\beta \in \mathfrak{N}$ mit $|\beta_{\mathrm{I}} - \beta_{\mathrm{I}}^{(0)}| < \varepsilon_i$. Denn für jeden festen Wert β_{I} sind die Elemente von $H_iA + A^*H_i$ analytische Funktionen von β_{II}, die in einer Umgebung von $\beta_{\mathrm{II}}^{(i)}$ verschwinden. Also verschwinden sie identisch. Ist dann $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{N}_{\mathrm{II}}(\beta_{\mathrm{II}})$ eine kompakte Menge, so kann man sie mit endlich vielen solchen Umgebungen $|\beta_{\mathrm{II}} - \beta_{\mathrm{II}}^{(i)}| < \varepsilon_i$ überdecken, und die gesuchte Matrix erhalten wir in der Form $H = \sum H_i$.

Jetzt können wir den folgenden Satz beweisen:

Satz 6. *Gegeben sei ein System von Differentialgleichungen*

$$\partial u/\partial t = P_m(\partial/\partial x)u \tag{7.12}$$

mit konstanten Koeffizienten. Für die Eigenwerte von $P_m(i\omega)$ gelte

$\operatorname{Re} \varkappa(\omega) = 0$. *Ist $P_m(i\omega)$ auf der Menge $|\omega| = 1$ von einfacher Struktur, so existiert ein Differentialoperator $Q(\partial/\partial x)$ einer Ordnung $2N$, so dass*

$$(7.13)\quad \delta_1 \left(\sum_{\nu=1}^{s} \|\partial^N u/\partial x_\nu{}^N\|^2 + \|u\|^2 \right) \leqq \left(u, Q(\partial/\partial x)u\right) \leqq \delta_2 \left(\sum_{\nu=1}^{s} \|\partial^N u, \partial x_\nu{}^N\|^2 + \|u\|^2 \right)$$

und

$$(7.14)\quad \left(P(\partial/\partial x)u, Q(\partial/\partial x)u\right) + \left(u, Q(\partial/\partial x)P(\partial/\partial x)u\right) \leqq \delta_3\left(u, Q(\partial/\partial x)u\right)$$

für alle $u \in \mathfrak{M}$. Dabei sind die δ_i von u unabhängige Konstanten mit $0 < \delta_1 \leqq \delta_2$.

Beweis. $P(i\omega)$ ist auf jeder Menge $\alpha_1 \leqq |\omega| \leqq \alpha_2$, $0 < \alpha_1 < 1 < \alpha_2$, von einfacher Struktur. Dies folgt unmittelbar aus der Gleichung

$$(7.15)\qquad P_m(i\omega) = |\omega|^m P_m(i\omega/|\omega|)\ .$$

Daher sind die $q_{\nu\mu}$ ganze rationale Funktionen von ω. Denn die Faktoren $g_\nu(\varkappa)$ sind der gemeinsame Teiler von $f(\varkappa)$ und $d^\nu f(\varkappa)/d\varkappa^\nu$. Daher gilt die Darstellung (7.1) im Polynomring $P(\omega_1, \ldots, \omega_s, \varkappa)$ über dem Körper der komplexen Zahlen. Wenden wir daher auf eine solche Menge den Hilfssatz 2′ mit $\beta_{\mathrm{II}} = \omega$ an, so existiert eine für $|\omega| = 1$ positiv definite hermitesche Matrix $H_1(\omega)$, deren Elemente ganze rationale Funktionen in den ω sind, so dass

$$P_m{}^*(i\omega)H_1(\omega) + H_1(\omega)P_m(i\omega) = 0\ .$$

Da $P_m(-i\omega) = (-1)^m P_m(i\omega)$ ist, so gilt auch

$$P_m{}^*(i\omega)H_1(-\omega) + H_1(-\omega)P_m(i\omega) = 0\ .$$

Bilden wir daher die Matrix $H_2(\omega) = H_1(-\omega) + H_1(\omega)$, so gibt es Konstanten σ_1, σ_2 mit $0 < \sigma_1 \leqq \sigma_2$, so dass für $|\omega| = 1$:

$$(7.16)\qquad \sigma_1 I \leqq H_2(\omega) \leqq \sigma_2 I\ ,$$

$$(7.17)\qquad P_m{}^*(i\omega)H_2(\omega) + H_2(\omega)P_m(i\omega) = 0\ .$$

Ausserdem sind die Elemente von $H_2(\omega)$ gerade ganze rationale Funktionen in den Komponenten von ω, und wir bezeichnen mit $\operatorname{ord} H_2$ die höchste vorkommende Ordnung dieser Funktionen. Wir definieren jetzt H_2 für beliebige ω durch

$$(7.18)\quad H_2(\omega) = |\omega|^{2N} H_2(\omega/|\omega|), \qquad N = \max\left([\tfrac{1}{2}(m+1)], \tfrac{1}{2}\operatorname{ord} H_2\right)\ .$$

($[x]$ bedeutet die grösste ganze Zahl $\leqq x$.) Dann folgt aus (7.15), dass (7.17) für alle ω gilt, und aus (7.16), dass

$$(7.19)\qquad \sigma_1|\omega|^{2N} I \leqq H_2(\omega) \leqq \sigma_2 |\omega|^{2N} I\ .$$

Ausserdem sind die Elemente von $H_2(\omega)$ Polynome in den Komponenten von ω. Setzen wir jetzt

(7.20) $$H(\omega) = H_2(\omega)+\sigma_2 I\ ,$$

so folgt aus (7.19) und (7.20) und $2N>m$:

(7.21) $$\sigma_1(|\omega|^{2N}+1)I \leqq H(\omega) \leqq \sigma_2(|\omega|^{2N}+1)I\ ,$$

(7.22) $$\begin{aligned} P_m{}^*(i\omega)H(\omega)+H(\omega)P_m(i\omega) &= \sigma_2\big(P_m(i\omega)+P_m{}^*(i\omega)\big) \\ &\leqq \text{konst.}\cdot(|\omega|^m+1) \leqq \text{konst.}\cdot H(\omega)\,. \end{aligned}$$

Wir verstehen jetzt unter $Q(\partial/\partial x)$ den Differentialoperator der Ordnung $2N$, für den $Q(i\omega)=H(\omega)$. Beachtet man, dass für alle $u\in\mathfrak{M}$

$$\sum_{\nu=1}^{s}\|\partial^N u/\partial x_\nu{}^N\|^2+\|u\|^2 = \int_{R_s'}\Big(\sum_{\nu=1}^{s}|\omega_\nu|^{2N}+1\Big)\,|\psi(\omega)|^2\,d\omega\ ,$$

($\psi(\omega)$ ist die Fouriertransformierte von u), so folgt aus (7.21), dass für $Q(\partial/\partial x)$ eine Ungleichung (7.13) gilt. Ausserdem folgt (7.14) genau so wie (4.11). Daraus folgt aber die Behauptung.

Setzen wir jetzt

$$R(\partial/\partial x) = \Big(-\sum_{\nu=1}^{s}\partial^2/\partial x_\nu{}^2\Big)^N\ ,$$

so ist für alle $u\in\mathfrak{M}$

$$R(\partial/\partial x)u = (2\pi)^{-s/2}\int_{R'}|\omega|^{2N}e^{i\omega x}\,\psi(\omega)\,d\omega\ .$$

Beachtet man, dass nach (7.20)

$$\big(Q(\partial/\partial x)-I\big)u = (2\pi)^{-s/2}\int_{R'}H_2(\omega)\,e^{i\omega x}\psi(\omega)\,d\omega\ ,$$

so können wir nach (7.16) und (7.18) einen beschränkten positiv definiten symmetrischen Operator

$$H = R^{-1}(\partial/\partial x)\big(Q(\partial/\partial x)-I\big) \quad \text{für alle } u\in L_2$$

durch

$$\begin{aligned} Hu &= \int_{R'}H_2(\omega)\ |\omega|^{-2N}e^{i\omega x}\psi(\omega)\,d\omega \\ &= \int_{R'}H_2(\omega/|\omega|)\ e^{i\omega x}\psi(\omega)\,d\omega \end{aligned}$$

definieren, für den nach (7.17) für alle $u\in\mathfrak{M}$

$$\big(P_m(\partial/\partial x)u,Hu\big)+\big(u,HP_m(\partial/\partial x)u\big) = 0\ .$$

Man kann also in diesem Fall den Operator H des Satzes 3 als Quotient von Differentialoperatoren darstellen.

8. Verallgemeinerung auf Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung, deren Koeffizienten von x und t abhängen.

Wir wollen in diesem Abschnitt den folgenden Satz beweisen:

SATZ 7. *Gegeben sei ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung*

$$\partial u/\partial t = \sum_{\nu=1}^{s} A_\nu(x,t)\,\partial u/\partial x_\nu = P_1(x,t,\partial/\partial x)u\ ,$$

dessen Koeffizienten unendlich oft (hinreichend oft) nach allen Variablen differenzierbar sind. Wir nehmen an, dass für alle reellen ω *und alle* x,t *die Matrizen* $P(x,t,i\omega)=\sum_\nu A_\nu(x,t)\,i\omega_\nu$ *rein imaginäre Eigenwerte haben und von einfacher Struktur sind. Dann gibt es zu jedem Punkt* x_0,t_0 *eine Umgebung* U *und einen formal selbstadjungierten Differentialoperator* $Q(x,t,\partial/\partial x)$ *gerader Ordnung* $2N>0$, *dessen Koeffizienten unendlich oft (hinreichend oft) differenzierbar sind, so dass für alle* $u(x,t)\in C_0^{\infty}(U)$ *die Ungleichungen* (7.13)–(7.14) *gelten, wenn man* $Q(\partial/\partial x)$ *durch* $Q(x,t,\partial/\partial x)$ *ersetzt.* ($C_0^{\infty}(U)$ *ist die Klasse aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen, die ausserhalb einer kompakten Menge* $\subset U$ *verschwinden.*)

BEWEIS. Nach Hilfssatz 2′ und entsprechend dem Beweis von Satz 6 gibt es zu jedem Punkt (x_0,t_0) eine Umgebung U, in der zu $P(x,t,i\omega)$ eine hermitesche Matrix $H(x,t,i\omega)$ existiert, deren Elemente ganze rationale Funktionen der ω_ν mit unendlich oft nach x und t differenzierbaren Koeffizienten sind (vgl. die Bemerkung im Anschluss an Definition 2), so dass für alle $(x,t)\in U$ die (7.21) und (7.22) entsprechenden Ungleichungen gelten. Wir können daher einen formal selbstadjungierten Differentialoperator $Q(x,t,\partial/\partial x)$ konstruieren, für den

$$Q(x,t,i\omega) = H(x,t,\omega)\ . \tag{8.1}$$

Dann gilt nach (7.21) für jeden Punkt $(x_1,t_1)\in U$ für den Differentialoperator $Q(x_1,t_1,\partial/\partial x)$ die Ungleichung (7.13), wenn man $Q(\partial/\partial x)$ durch $Q(x_1,t_1,\partial/\partial x)$ ersetzt. Entsprechend Gårding [1] gilt sie dann mit geeigneten $\delta_1>0$, $\delta_2>0$ auch für den Differentialoperator $Q(x,t,\partial/\partial x)$, d.h.

$$\begin{aligned}\delta_1\left(\sum_{\nu=1}^{s}\|\partial^N u/\partial x^N\|^2+\|u\|^2\right) &\leqq (u,Q(x,t,\partial/\partial x)u)\\ &\leqq \delta_2\left(\sum_{\nu=1}^{s}\|\partial^N u/\partial x^N\|^2+\|u\|^2\right)\ ,\end{aligned}\tag{8.2}$$

wenn $u\in C_0\infty(U)$ und U hinreichend klein ist.

Betrachten wir jetzt

$$(8.3)\qquad \begin{aligned} &L(x,t,\partial/\partial x) \\ &\quad = P_1^*(x,t,\partial/\partial x)Q(x,t,\partial/\partial x) + Q(x,t,\partial/\partial x)P_1(x,t,\partial/\partial x)u\ , \end{aligned}$$

wobei $P_1^*(x,t,\partial/\partial x)$ der zu $P_1(x,t,\partial/\partial x)$ formal adjungierte Operator ist, so folgt aus (8.1) und der (7.22) entsprechenden Gleichung

$$\begin{aligned} L(x,t,i\omega) &= P_1^*(x,t,i\omega)Q(x,t,i\omega)+Q(x,t,i\omega)P_1(x,t,i\omega) \\ &= \sigma_2\big(P_1^*(x,t,i\omega)+P_1(x,t,i\omega)\big)\ . \end{aligned}$$

Daher ist der Differentialoperator $L(x,t,\partial/\partial x)$ höchstens von der Ordnung $2N$. Ist a ein konstanter Vektor, so gilt nämlich

$$(8.4)\qquad L(x,t,\partial/\partial x)ae^{i\omega x} = \big(L(x,t,i\omega)+G(x,t,i\omega)\big)a\,e^{i\omega x}\ ,$$

wobei die Elemente von $G(x,t,i\omega)$ Polynome in den ω_ν sind, deren Ordnung kleiner oder gleich $2N$ ist. Daher folgt für alle $u \in C_0^\infty(U)$ mit Hilfe von partieller Integration

$$\big(u,L(x,t,\partial/\partial x)u\big) = \big(L_1(x,t,\partial/\partial x)u,L_2(x,t,\partial/\partial x)u\big)\ ,$$

wobei die L_i Differentialoperatoren der Ordnung kleiner oder gleich N sind. Daher kann man nach (8.2) den Ausdruck $\big(u,L(x,t,\partial/\partial x)u\big)$ mit Hilfe von $\big(u,Q(x,t,\partial/\partial x)u\big)$ abschätzen, und wir erhalten

$$(8.5)\qquad \begin{aligned} &\big(P_1(x,t,\partial/\partial x)u,\ Q(x,t,\partial/\partial x)u\big) + \big(u,Q(x,t,\partial/\partial x)P_1(x,t,\partial/\partial x)u\big) \\ &\quad = \big(u,L(x,t,\partial/\partial x)u\big) \leqq \text{konst.}\cdot\big(u,Q(x,t,\partial/\partial x)u\big)\ . \end{aligned}$$

Damit ist aber der Satz bewiesen.

Aus diesem Satz folgt entsprechend (4.12) eine »a priori« Abschätzung der lokalen Lösungen und daraus mit Hilfe von Standardmethoden (vgl. z. B. Leray [5]) die Existenz von globalen Lösungen, z. B. für alle hinreichend oft differenzierbaren Anfangswerten.

Man kann also mit Hilfe des letzten Satzes die Ergebnisse von I. Petrovskii [7] verallgemeinern. Petrovskii fordert nämlich, dass die Eigenwerte von $P(x,t,\partial/\partial x)$ für alle x,t,ω von einander verschieden sind. Dann sind diese Matrizen sicher von einfacher Struktur.

LITERATUR

1. L. Gårding, *Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations*, Math. Scand. 1 (1953), 55–72.
2. L. Gårding, *Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients*, Acta Math. 85 (1951), 1–62.

3. J. Hadamard, *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*, Yale, 1921.
4. H. O. Kreiss, *Über Matrizen die beschränkte Halbgruppen erzeugen*, Math. Scand. 7 (1959), 71–80.
5. J. Leray, *Hyperbolic differential equations*, Princeton, 1953.
6. S. Mizohata, *Le problème de Cauchy pour les équations paraboliques*, J. Math. Soc. Japan 8 (1956), 269–299.
7. I. G. Petrovskii, *Über das Cauchysche Problem für Systeme von partiellen Differentialgleichungen*, Mat. Sbornik N. S. 44 (1937), 814–868.
8. I. G. Petrovskii, *Über das Cauchyproblem für ein System linearer partieller Differentialgleichungen im Gebiete der nichtanalytischen Funktionen*, Bull. Univ. Etat. Moscou, Ser. Int. Sect. A Fasc. 7 (1938), 1–74.
9. O. Tausky, *Solution of a proposed problem*, Amer. Math. Monthly 67 (1960), 192.

KUNGL. TEKNISKA HÖGSKOLAN, STOCKHOLM, SCHWEDEN