MATH. SCAND. 14 (1964), 45–64

ÜBER SCHWACH-KOMPAKTE OPERATOREN IM BANACHRAUM

CLIFFORD C. BROWN

1. Die Eigenschaft von Dunford und Pettis.

Im Folgenden ist unter der schwachen Topologie eines Banachraumes B stets die gröbste Topologie zu verstehen, bezüglich der sämtliche normstetige Linearformen auf B stetig sind. Entsprechend ist die Schwachkonvergenz einer Folge $\{x_1, x_2, \ldots\}$ von Elementen $x_i \in B$ und die Schwachkompaktheit einer Untermenge $E \subset B$ zu verstehen. Eine Untermenge $F \subset B$ wird bedingt schwach-kompakt genannt, wenn ihre schwach abgeschlossene Hülle schwach-kompakt ist.

Eine normstetige lineare Transformation $T : B \to B'$ von B in einem Banachraum B' heißt stark- bzw. schwach-kompakt, wenn für eine beliebige normbeschränkte Menge $E \subset B$ das Bild $T(E) \subset B'$ von E bedingt stark- bzw. schwach-kompakt in B' ist. Untersuchungen von Dunford–Pettis [3], Grothendieck [5] und Bartle–Dunford–Schwartz [1] über die Theorie von schwach-kompakten Transformationen haben ergeben, daß gewisse Banachräume eine besondere Eigenschaft besitzen, die sich mittels schwach-kompakter Transformationen ausdrücken läßt. Diese Eigenschaft definieren wir jetzt.

Definition [5]. Sei B ein Banachraum. Man nennt B »D-P-strikt« (Dunford–Pettis strikt), wenn für jeden Banachraum B', jede schwach-kompakte lineare Transformation $T : B \to B'$ von B in B' und jede schwach-konvergente Folge $\{x_i\}$ von Elementen aus B die Folge $\{Tx_i\}$ von Elementen aus B' normkonvergent ist.

Eine der leichtesten und für die Anwendungen interessantesten Folgerungen aus der D-P-Striktheit eines Banachraums B ist, daß für je zwei schwach-kompakte lineare Transformationen $S : B \to B$ und $T : B \to B$ von B in sich die Transformation $ST : B \to B$ stark-kompakt ist.

Es gibt zahlreiche Banachräume, die nicht D-P-strikt sind. Z. B. kann kein unendlich-dimensionaler Hilbertraum D-P-strikt sein. Es ist in der Tat leicht zu sehen, daß kein unendlich-dimensionaler reflexiver Banach-

Received June 28, 1963.

raum D-P-strikt sein kann, denn, ist B reflexiv, so ist die abgeschlossene Einheitskugel in B schwach-kompakt. Es folgt, daß die Identität auf B eine schwach-kompakte lineare Transformation ist. Ist also B außerdem D-P-strikt, dann muß die Identität auch stark-kompakt und folglich die Einheitskugel normkompakt sein, was damit gleichbedeutend ist, daß B höchstens endlich-dimensional sein kann. Zu den zahlreichen Räumen, die D-P-strikt sind, gehören, wie Grothendieck [5] gezeigt hat, die folgenden:

1) $C(\Omega)$, der Banachraum von stetigen Funktionen auf einem kompakten topologischen Raum Ω mit der Norm

$$\|f\| = \sup_{\omega\in\Omega}|f(\omega)|, \qquad f \in C(\Omega)\,.$$

2) c_0, der Banachraum von beschränkten Folgen $c(\cdot)$ von komplexen Zahlen mit $\lim_i c(i) = 0$ mit der Norm

$$\|c(\cdot)\| = \sup_i |c(i)|, \qquad c(\cdot) \in c_0\,.$$

3) L_μ^1. der Banachraum von μ-integrablen Funktionen über einem Maßraum (Ω, B, μ).

Weitere Beispiele von D-P-strikten Banachräumen sind in [4] angegeben.

Mittels zweier Sätze von Kakutani [8] [9], die besagen, daß a) jeder (L)-Raum (Definition in § 3) mit einem Raum L_μ^1 für passendes (Ω, B, μ) linear und topologisch isomorph ist und daß b) jeder (M)-Raum (Definition in § 9) mit Einheitselement mit einem Raum $C(\Omega)$ für passendes kompaktes Ω linear und topologisch isomorph ist, kann man Beispiel 3) auf beliebige (L)-Räume und Beispiel 1) auf beliebige (M)-Räume mit Einheitselement ausdehnen. Es gilt sogar:

Satz A. *Jeder (L)-Raum und jeder (M)-Raum ist D-P-strikt.*

Dieser Satz ist sehr brauchbar. Aus Satz A folgt z. B.: Sei B entweder ein (L)-Raum oder ein (M)-Raum. Ist $T : B \to B$ eine schwach-kompakte lineare Transformation von B in sich, dann ist $T^2 : B \to B$ normkompakt (Bartle–Dunford–Schwartz [1]). Außerdem schließt Satz A praktisch sämtliche Räume ein, von denen allgemein bekannt ist, daß sie D-P-strikt sind.

Alle bisher bekannten Beweise für über 1), 2), 3) hinausgehende Spezialfälle von Satz A stützen sich auf Darstellungssätze wie a) und b)[1].

[1] Zusatz während der Korrektur: Die unveröffentlicht gebliebene Arbeit [2a] und die noch unveröffentlichte Note [2b] von Brace wurden mir erst jetzt bekannt. In [2b] wird ebenfalls Satz A bewiesen, jedoch auch unter voller Ausnutzung von [8] [9]. § 2 der vorliegenden Arbeit läuft mit [2b] weitgehend parallel, doch sind die betr. Beweise in [2b] anscheinend komplizierter.

Dies gilt auch für die obenstehende Aussage von Bartle, Dunford und Schwartz. Solch ein Verfahren hat einen künstlichen Charakter, der der Einfachheit der Fragestellung nicht ganz angemessen zu sein scheint. Im Folgenden werden wir Satz A ohne Darstellungssätze und nur mit Hilfe innerer Eigenschaften von (M)- und insbesondere von (L)-Räumen beweisen, vor denen einige natürlich auch in [8] [9] eine Rolle spielen. Die zentrale Rolle spielt dabei ein abstrakter Egoroff-Satz (§ 8).

2. Allgemeine Überlegungen. Die Eigenschaft G.

Es ist schon in [5] gezeigt worden, daß für Banachräume die folgende Eigenschaft zur D-P-Striktheit äquivalent ist.

Definition. Ein Banachraum hat die Eigenschaft G, wenn für jede schwach gegen Null konvergente Folge $\{x_i\}$ aus B und jede schwach gegen Null konvergente Folge $\{x_i^*\}$ aus dem Dualraum B^* die Folge $x_i^*(x_i)$ gegen Null konvergiert.

Um einen bequemen Beweis für die Äquivalenz der Eigenschaft G und der D-P-Striktheit zu erhalten, beweisen wir ein Lemma. Hierzu sind noch einige Vorbemerkungen erforderlich.

Sei c_0 der Folgenraum im obenstehenden Beispiel 2) in § 1. Wir bezeichnen mit ε_i^* die i-te Projektion, d. h.

$$\varepsilon_i^*[c(\cdot)] = c(i), \qquad c(\cdot) \in c_0 .$$

Es ist bekannt [10], daß der Dualraum c_0^* von c_0 der Raum aller Funktionale $b[c(\cdot)]$ ist, die durch Folgen $b(\cdot)$ mit $\sum_i |b(i)| < \infty$ vermöge

$$b[c(\cdot)] = \sum_{i=1}^{\infty} b(i)c(i)$$

gegeben sind. Als Dualraum zu c_0 hat c_0^* die Norm

$$\|b\| = \sum_{i=1}^{\infty} |b(i)|, \qquad b \in c_0^* .$$

Es ist klar, daß die ε_i^*, $i = 1, 2, 3, \ldots$, eine Basis für c_0^* bilden.

Mittels der eineindeutigen Abbildung $b \leftrightarrow b(\cdot)$ kann man auch den Bidualraum c_0^{**} explizit als die Gesamtheit aller linearen Funktionale $a[b]$ angeben, die durch Folgen $a(\cdot)$ mit $\sup_i |a(i)| < \infty$ vermöge

$$a[b] = \sum_{i=1}^{\infty} a(i)b(i), \qquad b \in c_0^* ,$$

gegeben sind. Als Bidualraum-Norm hat man

$$\|a\| = \sup_i |a(i)|, \qquad a \in c_0^{**} .$$

Hieraus entnimmt man leicht, daß $a[\varepsilon_i^*]=a(i)$ und, da die Abbildung $a \leftrightarrow a(\cdot)$ eineindeutig ist und die ε_i^*, $i=1,2,3,\ldots$, eine Basis für c_0^* bilden, daß allein die ε_i^* die natürliche Einbettung $\varphi : c_0 \to c_0^{**}$ durch

$$\varphi[c(\cdot)](\varepsilon_i^*) = \varepsilon_i^*[c(\cdot)], \qquad c(\cdot) \in c_0\,,$$

bestimmen und zwar so, daß $a \in c_0^{**}$ genau dann das Bild eines in c_0 enthaltenen Punktes unter φ ist, wenn $\lim_i a[\varepsilon_i^*]=0$.

Lemma 1. *Sei B ein Banachraum und $\{x_i^*\}$ eine schwach gegen Null konvergente Folge von Elementen aus dem Dualraum B^*. Dann ist durch*

$$Tx = (x_1^*(x), x_2^*(x), x_3^*(x), \ldots)$$

ein schwach-kompakter Linearoperator $T : B \to c_0$ definiert.

Beweis. a) Es ist klar, daß $T(x)$ definiert und in c_0 ist.

b) Jede schwach-beschränkte Menge eines Banachraums ist auch normbeschränkt. Da $\{x_i^*\}$ schwachbeschränkt ist, hat man also

$$\|Tx\| = \sup_i |x_i^*(x)| \leqq \sup_i \|x_i^*\|\,\|x\|\,.$$

T ist also ein beschränkter Linearoperator.

c) Sei T^* bzw. T^{**} erster bzw. zweiter zu T adjungierter Operator. Nach Definition ist

$$(T^*\xi^*)(x) = \xi^*(Tx), \qquad (T^{**}x^{**})(\xi^*) = x^{**}(T^*\xi^*)$$

für beliebiges $x \in B$, $x^* \in B^*$, $x^{**} \in B^{**}$ und $\xi^* \in c_0^*$. Nun ist

$$(T^*\varepsilon_i^*)(x) = \xi_i^*(Tx) = x_i^*(x), \qquad x \in B, \quad i = 1,2,3,\ldots\,.$$

Es folgt $T^*\varepsilon_i^* = x_i^*$, $i=1,2,3,\ldots$. Ferner ist

$$(T^{**}x^{**})(\varepsilon_i^*) = x^{**}(T^*\varepsilon_i^*) = x^{**}(x_i^*)$$

für beliebiges $x^{**} \in B^{**}$. Da x_i^* schwach gegen Null konvergiert, haben wir

$$\lim_i (T^{**}x^{**})(\varepsilon_i^*) = 0, \qquad x^{**} \in B^{**}\,.$$

Es folgt, daß $T^{**}x^{**}$ für beliebiges $x^{**} \in B^{**}$ im Bild von B in B^{**} unter der natürlichen Einbettung φ liegt. Dies ist aber gleichbedeutend damit, daß T ein schwach-kompakter Linearoperator ist ([4, S. 482]).

Satz (2.1). *Ein Banachraum B ist genau dann D-P-strikt, wenn er die Eigenschaft G besitzt.*

Beweis. a) Sei B D-P-strikt, $\{x_i\} \subset B$, $\{x_i^*\} \subset B^*$, $x_i \to 0$ (schwach), $x_i^* \to 0$ (schwach). Aus Lemma 1 folgt, daß der durch

$$Tx = \big(x_1^*(x), x_2^*(x), x_3^*(x), \ldots\big)$$

definierte Linearoperator schwach-kompakt ist. Wegen der *D-P*-Striktheit konvergiert also Tx_i in der c_0–Norm und zwar gegen Null, weil Tx_i schwach gegen Null konvergiert. Also ist

$$\|Tx_i\| = \sup_j |x_j^*(x_i)| \to 0 .$$

Es folgt

$$0 \leqq |x_i^*(x_i)| \leqq \sup_j |x_j^*(x_i)| \to 0 .$$

b) (Umkehrung: Beweis nach Grothendieck [5]). Besitzt B die Eigenschaft G und gibt es eine schwach-konvergente Folge $\{x_i\} \subset B$ mit $x_i \to x$ (schwach), einen Banachraum B' und einen schwach-kompakten Linearoperator $T : B \to B'$ mit $\|Tx_i - Tx\| \geqq \varepsilon$ für passendes $\varepsilon > 0$, dann gibt es nach Hahn–Banach eine Folge $\{\xi_i^*\} \subset B'^*$ mit

$$\|\xi_i^*\| \leqq 1 \quad \text{und} \quad |\xi_i^*(Tx_i) - \xi_i^*(Tx)| \geqq \tfrac{1}{2}\varepsilon, \qquad i = 1,2,3,\ldots .$$

Man hat

$$\begin{aligned} |(T^*\xi_i^*)(x_i - x)| &= |\xi_i^*(T(x_i - x))| \\ &= |\xi_i^*(Tx_i) - \xi_i^*(Tx)| \geqq \tfrac{1}{2}\varepsilon, \qquad i = 1,2,3,\ldots . \end{aligned}$$

T ist aber schwach-kompakt, also ist auch $T^* : B'^* \to B^*$ ([4, S. 485]). Da $\|\xi_i^*\| \leqq 1$, $i = 1,2,3,\ldots$, gibt es eine Teilfolge $T^*\xi_{i_j}^*$, $j = 1,2,3,\ldots$, die schwach gegen ein Element $x^* \in B^*$ konvergiert, das heißt wir können annehmen, daß $T^*\xi_i^*$ schwach gegen $x^* \in B^*$ konvergiert. Da also die beiden Folgen $\{x_i - x\}$ und $\{T^*\xi_i^* - x^*\}$ schwach gegen Null konvergieren, ergibt die Eigenschaft G

$$(T^*\xi_i^*)(x_i - x) - x^*(x_i - x) = (T^*\xi_i^* - x^*)(x_i - x) \to 0 .$$

Da jedoch $|(T^*\xi_i^*)(x_i - x)| \geqq \frac{1}{2}\varepsilon$ und $x^*(x_i - x) \to 0$, haben wir einen Widerspruch. Satz (2.1) ist also vollkommen bewiesen.

Zum Schluß dieses Abschnitts beweisen wir noch einen elementaren Satz.

Satz (2.2). *Sei B ein Banachraum. Besitzt der Dualraum B^* die Eigenschaft G, dann besitzt auch B diese Eigenschaft.*

Beweis. Sei $\varphi : B \to B^{**}$ die natürliche Einbettung und $\{x_i^*\} \subset B^*$, $\{x_i\} \subset B$,

$$x_i^* \to 0 \text{ (schwach)}, \qquad x_i \to 0 \text{ (schwach)} .$$

Sei $x^{***} \in B^{***}$. Wir definieren

$$\varphi^*(x) = x^{***}\varphi(x), \qquad x \in B .$$

φ^* ist ein Element aus B^*. Daher haben wir $\varphi^*(x_i) \to 0$. Es folgt, daß die Folge $\{\varphi(x_i)\} \subset B^{**}$ schwach gegen Null konvergiert, weil $x^{***} \in B^{***}$ beliebig gewählt wurde. Da B^* die Eigenschaft G besitzt, hat man also

$$x_i^*(x_i) = \varphi(x_i)[x_i^*] \to 0 .$$

COROLLAR. *Ist der Dualraum B^* D-P-strikt, so ist B selbst D-P-strikt.*

3. Eigenschaften der abstrakten (L)-Räume.

Im Folgenden sind diejenigen Eigenschaften der abstrakten (L)-Räume aufgeführt, die wir brauchen, um unser Ziel — Satz A § 1 — zu erreichen. Die nachstehenden Sätze sind weitgehend triviale Folgerungen aus analogen Sätzen über Vektorverbände (Birkhoff [2]) und meist bekannten Sätzen aus der Maß- und Integraltheorie sehr ähnlich. Wir werden daher hier nur einige von ihnen beweisen.

Ein Vektorverband V ist ein reeller Vektorraum, der gleichzeitig ein Verband ist und zwar mit den folgenden Verknüpfungen zwischen der Verbandsstruktur und der linearen Struktur [6]:

a) Aus $x \leqq y$ folgt $x+z \leqq y+z$, $x,y,z \in V$.
b) Aus $x \leqq y$, $\lambda \geqq 0$, λ skalar, folgt $\lambda x \leqq \lambda y$, $x,y \in V$.

Wir bezeichnen mit $x \wedge y$ bzw. $x \vee y$ das Infimum bzw. Supremum je zweier Elemente x und y. Sei I eine beliebige Indexmenge, $\{x_\iota\}_{\iota \in I}$ eine Untermenge von V. Wir schreiben, falls vorhanden,

$$\sup_{\iota \in I} x_\iota = \bigvee_{\iota \in I} x_\iota, \qquad \inf_{\iota \in I} x_\iota = \bigwedge_{\iota \in I} x_\iota .$$

Der positive Teil $x \vee 0$ und der negative Teil $(-x) \vee 0$ von $x \in V$ werden durch x^+ und x^- bezeichnet. Wir benutzen die übliche Schreibweise $|x| = x^+ + x^-$.

Ein abstrakter (L)-Raum L ist ein Vektorverband, der gleichzeitig ein Banachraum ist, mit einer Norm $\|\cdot\|$ bezüglich der $x \vee y$ simultan in x und y normstetig ist und welche die Eigenschaft besitzt: aus $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ folgt $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$.

Sei $E \subset L$ und E_v die Menge aller Elemente aus L der Gestalt

$$\bigvee_{\iota \in I} x_\iota, \qquad I \text{ endlich}, \ x \in E .$$

SATZ (3.1) (Birkhoff [2], vgl. auch Jacobs [7]). *Sei $E \subset L$ und $x \in L$ mit $x \geqq y$ für jedes $y \in E$. Dann existiert $x_0 \in L$ mit*

$$x_0 = \bigvee_{y \in E} y$$

und es gibt eine aufsteigende Folge $z_1 \leqq z_2 \leqq z_2 \leqq z_3 \leqq \ldots$, $z_1 \in E_v$, mit $z_i \to z_0$ in der Norm.

Jeder (L)-Raum ist also ein bedingt vollständiger Vektorverband.

COROLLAR. *Sei* $x_1 \leqq x_2 \leqq x_3 \leqq \ldots$ *mit* $x_i \in L$ *und* $x \geqq x_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$. *Dann ist* $x_i \to x_0 = \bigvee_i x_i$ *in der Norm.*

Sei J eine stetige Linearform auf L. Es gibt stets nichtnegative stetige Linearformen J^+ und J^+ auf L mit $J = J^+ - J^-$ (Birkhoff [2]). Wir können auf L eine natürliche Linearform J_0 durch $J_0(x) = \|x^+\| - \|x^-\|$, $x \in L$, definieren. Es ist klar, daß J_0 stetig ist. Daß es linear ist, wird in Birkhoff [2, S. 256] elementar bewiesen.

Es gibt in L — wie Kakutani [8] zeigt — eine Norm $\|x\|^* = \|x^+\| + \|x^-\|$, die mit der Norm $\|\cdot\|$ äquivalent ist. Sie hat die weitere Eigenschaft, daß $\|x+y\|^* = \|x-y\|^*$ für beliebige $x, y \in L$ mit $x \wedge y = 0$. Es wird im Folgenden klar, daß unsere Ergebnisse höchstens von der normerzeugten (= starken) Topologie in L abhängen. Wir können deshalb annehmen, daß die Norm $\|\cdot\|$ schon die Eigenschaften von $\|\cdot\|^*$ hat und damit, daß $\|x\| = \|x\|^*$. Aus $|x| = x^+ + x^-$ und $x = x^+ - x^-$ mit $x^+ \wedge x^- = 0$ (cf. [2]) ergibt sich für diese Norm $\|x\| = \| |x| \|$.

4. Projektionen im (L)-Raum.

DEFINITION (Kakutani [8]). Sei $x, y \in L$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$. Wir definieren

$$P_x(y) = \lim_{n \to \infty} nx \wedge y \quad \text{(Norm)}.$$

Ferner definieren wir für beliebiges $y \in L$

$$P_x(y) = P_x(y^+) - P_x(y^-).$$

Die »Projektion« $P_x(y)$ hat die folgenden Eigenschaften ([8]):

(a) $P_x(x) = x$, $P_0(x) = 0$;
(b) $P_{x \wedge y}(z) = P_x(z) \wedge P_y(z)$, $P_{x \vee y}(z) = P_x(z) \vee P_y(z)$, $z \geqq 0$;
(c) $P_{x \wedge y}(z) = P_x(P_y(z))$;
(d) $P_{\lambda x}(z) = P_x(z)$, $\lambda > 0$, skalar;
(e) $P_x(y \vee z) = P_x(y) \vee P_x(z)$, $P_x(y \wedge z) = P_x(y) \wedge P_x(z)$;
(f) $P_x(\alpha y + \beta z) = \alpha P_x(y) + \beta P_x(z)$, α, β skalar;
(g) $P_x(y)$ ist in y normstetig;
(h) ist $0 \leqq x_n \leqq x$, $x_n \to x$ (Norm), so gilt $P_{x_n}(y) \to P_x(y)$ (Norm).

Die Eigenschaften (a) bis (h) sind übrigens kennzeichnend, das heißt, hat eine Abbildung $P_x'(y) : L \times L \to L$ die Eigenschaften (a) bis (h) für $x \geqq 0$, dann ist $P_x'(y) = P_x(y)$ für $x \geqq 0$. Zwei weitere Eigenschaften sind:

(i) $P_{x \wedge y}(z) = P_{P_x(y)}(z)$;
(j) $P_{x \wedge y}(z) + P_{x \vee y}(z) = P_x(z) + P_y(z)$.

5. Elementare Elemente.

Definition (Kakutani [8]). Sei $g_0 \in L$, $g_0 \geqq 0$, $g_0 \neq 0$. Die Menge $K(g_0)$ von g_0-charakteristischen Elementen in L ist die Menge aller $e \in L$ mit $e \wedge (g_0 - e) = 0$. Sei Ω das abgeschlossene Einheitsintervall, B der Borelsche Körper von Baireschen Mengen und μ das Lebesguesche Maß. Wir betrachten den (L)-Raum $L_\mu{}^1$. Sei g eine Lebesgue-integrable Funktion, die fastüberall größer als Null ist. Wir betrachten $g_0 \in L_\mu{}^1$, die g enthaltende Äquivalenzklasse aus $L_\mu{}^1$. Die g_0-charakteristischen Elemente aus $L_\mu{}^1$ sind diejenigen Äquivalenzklassen, welche die Funktionen $e(\omega)$ der Bauart

$$e(\omega) = \begin{cases} g(\omega) & \text{für } \omega \in E\,, \\ 0 & \text{für } \omega \notin E\,, \end{cases} \qquad E \in B\,,$$

enthalten. Es wird in [8] gezeigt, daß $K(g_0)$ eine normabgeschlossene Boolesche Algebra unter $\vee$, $\wedge$ und der Komplementbildung $e \to g_0 - e$ ist. Aus Satz (3.1) sieht man, daß $K(g_0)$ eine vollständiger Verband ist, das heißt, ist $K' \subset K(g_0)$, dann existieren

$$\bigvee\nolimits_{e' \in K'} e' \in K(g_0), \qquad \bigwedge\nolimits_{e' \in K'} e' \in K(g_0)\,.$$

$K(g_0)$ ist also eine Boolesche σ-Algebra. Eine Beziehung zwischen der Komplementbildung und der Differenzbildung in $K(g_0)$ ist: Sei e, $e' \in K(g_0)$, $e' \leqq e$. Dann ist

$$e - e' = e \wedge (g_0 - e')\,.$$

Denn, da $(g_0 - e') \geqq (g_0 - e)$, hat man

$$e \vee (g_0 - e') = e \vee (g_0 - e') \vee (g_0 - e) = (g_0 - e') \vee g_0 = g_0\,.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} e \wedge (g_0 - e') &= e + g_0 - e' - e \vee (g_0 - e') \\ &= e + g_0 - e' - g_0 = e - e'\,. \end{aligned}$$

Definition. Sei $e_1, e_2 \in K(g_0)$. Wir definieren $e_1 \vartriangle e_2 \in K(g_0)$ durch

$$e_1 \vartriangle e_2 = \big(e_1 \wedge (g_0 - e_2)\big) \vee \big(e_2 \wedge (g_0 - e_1)\big)\,.$$

Aus dieser Definition folgt: $e_1 \vartriangle e_2 = e_1 \vee e_2 - e_1 \wedge e_2 = |e_1 - e_2|$; denn, da $e_1 \vee e_2 \geqq e_1 \wedge e_2$, hat man

$$\begin{aligned} e_1 \vartriangle e_2 &= (e_1 \vee e_2) \wedge \big((g_0 - e_2) \vee e_2\big) \wedge \big((g_0 - e_1) \vee e_1\big) \wedge \big((g_0 - e_2) \vee (g_0 - e_1)\big) \\ &= (e_1 \vee e_2) \wedge \big((g_0 - e_2) \vee (g_0 - e_1)\big) \\ &= (e_1 \vee e_2) \wedge \big(g_0 - (e_2 \wedge e_1)\big) \\ &= e_1 \vee e_2 - e_1 \wedge e_2\,. \end{aligned}$$

Man beweist weiterhin genau wie in der Mengenalgebra, daß $(K(g_0), \vartriangle)$ eine Abelsche Gruppe mit $0 \in K(g_0)$ als Einheit ist.

Mittels $K(g_0)$ können wir zwei weitere Eigenschaften von Projektionen (§ 4) ausdrücken:

(k) $P_x(g_0) \in K(g_0)$;

(l) $P_{e_1}(e_2) = P_{e_2}(e_1) = e_1 \wedge e_2, \qquad e_1, e_2 \in K(g_0)$.

Wir definieren jetzt einen Begriff, der ein sehr wichtiges Analogon in der Integrationstheorie hat.

Definition. $y \in L$ ist ein g_0-elementares Element, wenn es eine natürliche Zahl n, reelle $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ und $e_1, e_2, \ldots, e_n$ aus $K(g_0)$ gibt mit

$$y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \qquad e_k \wedge e_j = 0, \; k \neq j, \quad \bigvee_i e_i = g_0 \,.$$

Es gilt stets

$$y^+ = \textstyle\sum_{\lambda_i \geq 0} \lambda_i e_i, \qquad y^- = \sum_{\lambda_i \leq 0} \lambda_i e_i$$

und

$$\|y\| = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \, \|e_i\| \,.$$

Mittels Satz (3.1) und einiger Eigenschaften von Projektionen, beweist man leicht den

Satz (5.1). (Kakutani [8], Nikodym [11]). *Die g_0-elementaren Elemente liegen normdicht im Bildraum von $P_{g_0}(\cdot) : L \to L$.*

6. σ-additive Funktionen.

Definition. Eine reelle Funktion ν auf $K(g_0)$ heißt σ-additiv, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

a) $\nu(e) > -\infty, \qquad e \in K(g_0)$.

b) $\nu(0) = 0$.

c) $\nu(e \vee e') = \nu(e) + \nu(e')$ für beliebige e, $e' \in K(g_0)$ mit $e \wedge e' = 0$.

d) Sei $e_i \in K(g_0)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, $e_k \wedge e_j = 0$, $k \neq j$, und

$$e = \bigvee_{i}^{\infty} e_i \,.$$

Dann konvergiert $\sum_i \nu(e_i)$ absolut (möglicherweise gegen $+\infty$) und

$$\nu(e) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(e_i) \,.$$

Beispiele von σ-additiven Funktionen auf $K(g_0)$ sind:

1) die (L)-Norm, eine endliche σ-additive Funktion;

2) die Einschränkung $J \mid K(g_0)$ einer nicht-negativen Linearform J aus dem Dualraum L^* von L;
3) die Einschränkung $J \mid K(g_0)$ einer beliebigen Linearform J aus dem Dualraum L^* von L.

3) folgt aus 2) mittels der Zerlegung $J = J^+ - J^-$ (§ 3). Ein weiteres Beispiel einer σ-additiven Funktion auf $K(g_0)$ ergibt sich aus der Eigenschaft (h) § 4.

Satz (6.1). *Sei $y \in L$, $J \in L^*$. Dann ist $J(P_e(y))$ eine endliche σ-additive Funktion von e auf $K(g_0)$.*

Beweis. Sei zunächst $y \in L$, $y \geqq 0$, und $J \in L^*$, J nichtnegativ.

a) $J(P_e(y)) > -\infty$.
b) $J(P_0(y)) = J(0) = 0$.
c) Sei $e_1 \wedge e_2 = 0$. Wegen der Eigenschaften (j) und (a) aus § 4 ist

$$\begin{aligned} P_{e_1 \wedge e_2}(y) &= P_{e_1}(y) + P_{e_2}(y) - P_{e_1 \vee e_2}(y) \\ &= P_{e_1}(y) + P_{e_2}(y)\,. \end{aligned}$$

Also ist

$$J(P_{e_1 \vee e_2}(y)) = J(P_{e_1}(y)) + J(P_{e_2}(y))\,.$$

d) Sei $e_i \in K(g_0)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, und $e_j \wedge e_k = 0$, $j \neq k$, $e = \bigvee_i e_i$. Wegen des Corollars zu Satz (3.1) gilt $y_n \to e$ (Norm), wobei

$$y_n = e_1 \vee e_2 \vee \ldots \vee e_n\,.$$

Ferner ist $0 \leqq y_n \leqq e$. Aus Eigenschaft (h) (§ 4) folgt $P_{y_n}(y) \to P_e(y)$ (Norm). Da $P_{e_i}(y) \geqq 0$, ist $J(P_{e_i}(y)) \geqq 0$. Es folgt, daß

$$J(P_{y_n}(y)) = \sum_{k=1}^{n} J(P_{e_i}(y))$$

absolut gegen $J(P_e(y))$ konvergiert. Mittels der Zerlegungen $y = y^+ - y^-$ und $J = J^+ - J^-$ folgt der Satz für beliebige $y \in L$ und $J \in L^*$.

Definition. Sei ν eine σ-additive Funktion auf $K(g_0)$. Ein Element $e_+ \in K(g_0)$ ist positiv oder ein Positivelement bzgl. ν, wenn $\nu(e') \geqq 0$ für jedes e' mit $e' \leqq e_+$. Entsprechend definiert man Negativelemente e_- bzgl. ν.

Aus dieser Definition ist leicht zu ersehen, daß die Positivelemente bzgl. ν einen Unterverband von $K(g_0)$ bilden. Entsprechendes gilt auch für Negativelemente.

Satz (6.2) (Hahnsche Zerlegung). *Sei ν eine σ-additive Funktion auf*

$K(g_0)$. *Es gibt ein Positivelement* e_+ *und ein Negativelement* e_- *mit* $e_+ \wedge e_- = 0$ *und* $e_+ \vee e_- = g_0$.

Wir setzen $\nu^+(e) = \nu(e_+ \wedge e)$, $\nu^-(e) = -\nu(e_- \wedge e)$. Die Funktionen ν^+ und ν^- sind wieder σ-additiv mit $\nu(e) = \nu^+(e) - \nu^-(e)$. Wir setzen außerdem $|\nu|(e) = \nu^+(e) + \nu^-(e)$. Aus $|\nu|(0) = \nu(0) = 0$ folgt — genau wie in der Maßtheorie —, daß $|\nu|$ und ν normstetig (totalstetig) im Nullpunkt sind. Die Funktion ν ist auch gleichmäßig stetig in der Norm auf $K(g_0)$, denn

$$e \vartriangle e' = e \vee e' - e \wedge e' \leqq e \vee e' ,$$

also ist

$$|\nu|(e \vartriangle e') \leqq |\nu|(e \vee e') \leqq |\nu|(e) + |\nu|(e') .$$

Hieraus folgt

$$|\nu|(|e - e'|) = |\nu|(e \vartriangle e') \geqq \big||\nu|(e) - |\nu|(e')\big| ,$$

und die gleichmäßige Stetigkeit folgt aus der Stetigkeit von $|\nu|$ im Nullpunkt und der Identität $\|e - e'\| = \| |e - e'| \|$.

$K(g_0)$ ist ein vollständiger metrischer Raum, da er in L abgeschlossen ist. In $K(g_0)$ gilt also das Kategorie-Theorem. Daraus folgt ein Satz, der in Wirklichkeit nichts anderes ist als der Satz von Vitali–Hahn–Saks im abstrakten (L)-Raum.

Satz (6.3). *Seien* ν_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, *endliche* σ*-additive Funktionen auf* $K(g_0)$ *und* $\lim_i \nu_i(e)$ *für jedes* $e \in K(g_0)$ *vorhanden. Dann sind die* $\nu_i(e)$ *im Nullpunkt gleichmäßig-stetig, das heißt für beliebiges* $\varepsilon > 0$ *gibt es* $\delta > 0$, *so daß* $|\nu_i(e)| < \varepsilon$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, *für jedes* $e \in K(g_0)$ *mit* $\|e\| < \delta$.

Beweis. Mittels der Stetigkeit von ν_i und der Eigenschaften von »$\vartriangle$« beweist man Satz (6.3) genau wie im mengenalgebraischen Fall (Dunford–Schwartz, Satz von Vitali–Hahn–Saks).

Ein Hinweis auf die topologische Deutung dieses im Satz (6.3) erscheinenden Begriffes von der gleichmäßigen Stetigkeit wird vielleicht von Interesse sein, auch wenn wir ihn in den folgenden Abschnitten nicht brauchen. Die endlichen σ-additiven Funktionen auf $K(g_0)$ bilden einen normierten Linearraum mit Norm $\|\nu\| = |\nu|(g_0)$. Es läßt sich beweisen, daß dieser Raum sogar ein Banachraum ist, den wir mit Σ bezeichnen. Eine beliebige Untermenge $E \subset \Sigma$ ist genau dann in Σ bedingt schwachkompakt, wenn sie normbeschränkt und gleichmäßig-stetig im Nullpunkt ist (Bartle–Dunford–Schwartz [1]).

7. Verallgemeinerte Atome.

Definition (Wallman [12]). Eine Untermenge $\mathfrak{A} \subset K(g_0)$ heißt g_0-Atom, wenn folgendes gilt:

a) Aus $e_1, e_2 \in \mathfrak{A}$ folgt $e_1 \wedge e_2 \in \mathfrak{A}$.
b) Aus $e \in \mathfrak{A}$ folgt $e \neq 0$.

DEFINITION. Eine Untermenge $\overline{\mathfrak{A}} \subset K(g_0)$ heißt g_0-Ultraatom, wenn sie ein g_0-Atom ist und keine echte Verfeinerung besitzt, das heißt, ist $\mathfrak{A}'$ ein g_0-Atom mit $\mathfrak{A}' \supset \overline{\mathfrak{A}}$, so folgt $\mathfrak{A}' = \overline{\mathfrak{A}}$.

Aus dem Zornschen Lemma folgt: Zu jedem g_0-Atom $\mathfrak{A}$ gibt es mindestens ein $\mathfrak{A}$ umfassendes g_0-Ultraatom. Sei $\overline{\mathfrak{A}}$ ein g_0-Ultraatom, $e \in K(g_0)$. Ist $e \wedge e' \neq 0$ für jedes $e' \in \overline{\mathfrak{A}}$, so ist $e \in \overline{\mathfrak{A}}$.

Sei $\mathfrak{A}$ ein g_0-Atom, f eine Funktion auf $K(g_0) - \{0\}$. Da $\mathfrak{A}$ ein Moore–Smith-System ist, kann man entsprechend einen Limesbegriff

$$\lim_{e \in \mathfrak{A}} f(e)$$

definieren. Wir beweisen jetzt den

SATZ (7.1). *Sei L^* der Dualraum zu L, $J \in L^*$ und $\overline{\mathfrak{A}}$ ein g_0-Ultraatom. Dann existiert*

$$\lim_{e \in \overline{\mathfrak{A}}} \frac{J(e)}{\|e\|} = : \overline{\mathfrak{A}}(J) ,$$

und $\overline{\mathfrak{A}}(\cdot)$ ist eine stetige Linearform auf L^*.

BEWEIS. $J \mid K(g_0)$ ist eine endliche σ-additive Funktion auf $K(g_0)$, ebenso die Norm $\|e\|$. Seien r, n natürliche Zahlen. Dann ist auch

$$\nu(r,n,e) = J(e) - 2^{-n} r \|J\| \|e\|$$

endlich und σ-additiv auf $K(g_0)$. Für festes (r,n) erhält man mittels der Hahnschen Zerlegung $e_+(r,n) \in K(g_0)$, $e_-(r,n) \in K(g_0)$ mit

$$e_+(r,n) \wedge e_-(r,n) = 0 \quad \text{und} \quad e_+(r,n) \vee e_-(r,n) = g_0$$

derart, daß $e_+(r,n)$ bzw. $e_-(r,n)$ positives bzw. negatives Element bzgl. $\nu(r,n,e)$ ist. Es ist klar, daß die $e_-(r,n)$ so gewählt werden können, daß

$$0 = e_-(-2^{n+1},n) \leqq e_-(-2^{n+1}+1,n) \leqq \ldots \leqq e_-(2^{n+1},n) = g_0 ,$$

und daß $e_-(2r,n+1) = e_-(r,n)$, das heißt, das System

$$\{e_-(r,n+1) : |r| \leqq 2^{n+2}\}$$

ist eine echte Verfeinerung des Systems $\{e_-(r,n) : |r| \leqq 2^{n+1}\}$. Wir definieren

$$\bar{e}(r,n) = e_-(r+1,n) - e_-(r,n), \qquad -2^{n+1} \leqq r \leqq 2^{n+1} - 1 .$$

Da $\bar{e}(r,n) \in K(g_0)$ (§ 5) mit $\bar{e}(r,n) \leqq e_-(r+1,n)$, ist $\bar{e}(r,n)$ ein Negativelement für $\nu(r+1,n,e)$. Weiterhin ist $\bar{e}(r,n) \wedge \bar{e}(r',n) = 0$ für $r \neq r'$ und

$$\bigvee_s \bar{e}(s,n) = g_0 .$$

Aus der Konstruktion sieht man, daß für $n > n'$ entweder $\bar{e}(r,n) \leqq \bar{e}(r',n')$ oder $\bar{e}(r,n) \wedge \bar{e}(r',n') = 0$ für beliebige mögliche r, r' ist. Es folgt, daß $\bar{e}(r,n) \in \overline{\mathfrak{A}}$ gleichzeitig mit $\bar{e}(r',n') \in \overline{\mathfrak{A}}$ nur möglich ist, falls $\bar{e}(r,n) \leqq \bar{e}(r',n')$.

Wir zeigen nun: Unter den Elementen $\bar{e}(r,n)$, $-2^{n+1} \leqq r \leqq 2^{n+1}-1$, gibt es genau eins, das zu $\overline{\mathfrak{A}}$ gehört. Da die $\bar{e}(r,n)$ disjunkt sind, kann in der Tat höchstens eins zu $\overline{\mathfrak{A}}$ gehören. Nehmen wir an, daß keins zu $\overline{\mathfrak{A}}$ gehört. Da $\overline{\mathfrak{A}}$ ein g_0-Ultraatom ist, gibt es zu jeder natürlichen Zahl r für welche $-2^{n+1} \leqq r \leqq 2^{n+1}-1$ ein Element $e(r) \in \overline{\mathfrak{A}}$ mit $\bar{e}(r,n) \wedge e(r) = 0$. Also ist

$$\begin{aligned} 0 \leqq \bigwedge_r e(r) = g_0 \wedge \bigwedge_r e(r) &= \bigvee_s \bar{e}(s,r) \wedge \bigwedge_r e(r) \\ &= \bigvee_s \{\bar{e}(s,n) \wedge \bigvee_r e(r)\} \leqq \bigvee_s \bar{e}(s,n) \wedge e(s) = 0 . \end{aligned}$$

Es folgt, daß $\bigwedge_r e(r) = 0$. Dies widerspricht der Definition eines g_0-Atoms.

Wir definieren $r(n)$ durch $\bar{e}(r(n),n) \in \overline{\mathfrak{A}}$, und betrachten die abgeschlossenen Intervalle

$$I_n := \left[2^{-n} r(n),\, 2^{-n}\big(r(n)+1\big)\right], \qquad \bar{I}_n := \left[2^{-n}\big(r(n)-1\big),\, 2^{-n}\big(r(n)+2\big)\right].$$

Sei $e \in K(g_0)$, $e \leqq \bar{e}\big(r(n),n\big)$. Dann ist $e \leqq e_-\big(r(n)+1,n\big)$ und $e \wedge e_-\big(r(n),n\big) = 0$, das heißt $e \leqq e_+\big(r(n),n\big)$. Also ist

$$\nu\big(r(n)+1,n,e\big) \leqq 0, \qquad \nu\big(r(n),n,e\big) \geqq 0 ,$$

oder äquivalent

$$2^{-n} r(n)\, \|J\|\, \|e\| \leqq J(e) \leqq 2^{-n}\big(r(n)+1\big)\, \|J\|\, \|e\| .$$

Sei $e = \bar{e}\big(r(n+1),\, n+1\big) \leqq \bar{e}\big(r(n),n\big)$. Wir haben gleichzeitig mit der obenstehenden Ungleichung

$$2^{-(n+1)} r(n+1)\, \|J\|\, \|e\| \leqq J(e) \leqq 2^{-(n+1)}\big(r(n+1)+1\big)\, \|J\|\, \|e\| .$$

Da $e \in \mathfrak{A}$, ist $e > 0$, also ist

$$\frac{J(e)}{\|J\|\, \|e\|} \in \left[2^{-n} r(n),\, 2^{-n}\big(r(n)+1\big)\right] = I_n$$

und

$$\frac{J(e)}{\|J\|\, \|e\|} \in \left[2^{-(n+1)} r(n+1),\, 2^{-(n+1)}\big(r(n+1)+1\big)\right] = I_{n+1} .$$

Das zeigt, daß I_n und I_{n+1} das gemeinsame Element $J(e)/\|J\|\,\|e\|$ haben.

Daraus folgt

$$\bar{I}_{n+1} \subset \bar{I}_n .$$

Sei nun die reelle Zahl α durch

$$\{\alpha\} = \bigcap_n \bar{I}_n$$

definiert. Es ist klar, daß α eindeutig bestimmt ist, weil $\bar{I}_{n+1} \subset \bar{I}_n$, $\bar{I}_n$ kompakt ist und $\bar{I}_n$ den Durchmesser $3/2^n$ hat. Weiterhin gilt

$$J(e)/\|J\|\,\|e\| \in I_n \subset \bar{I}_n \quad \text{für} \quad e \leqq \bar{e}(r(n),n)$$

und es folgt

$$\left| \frac{J(e)}{\|J\|\,\|e\|} - \alpha \right| \leqq 3/2^n, \qquad e \leqq \bar{e}(r(n),n), \qquad e \in \mathfrak{A} .$$

Der Limes existiert also und $\overline{\mathfrak{A}}(J) = \alpha\|J\|$. Es ist ohne weiteres klar, daß für beliebiges n:

$$-1-2^{-n} \leqq 2^{-n}\big(r(n)-1\big) \leqq \alpha \leqq 2^{-(n+1)}\big(r(n+1)+2\big) \leqq 1+2^{-n} .$$

Hieraus folgt, daß $|\alpha| \leqq 1$. Damit ist der Satz bewiesen.

8. Ein abstrakter Egoroffscher Satz.

Wir beweisen jetzt ein Analogon des bekannten Egoroffschen Satzes, der besagt, daß es für jede fastüberall konvergente Folge $\{f_i\}$ von meßbaren Funktionen über einem Maßraum (Ω, B, μ) mit endlichem Maß μ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $E \subset \Omega$ mit $\mu(\Omega - E) < \varepsilon$ gibt, so daß $\{f_i\}$ überall auf E gleichmäßig konvergiert. Um diesen abstrakten Satz zu beweisen, müssen wir zunächst ein weiteres Lemma beweisen.

Lemma 2. *Seien $J_1, J_2, \ldots$ Elemente aus dem Dualraum L^* von L, wobei $\{J_i\}$ schwach gegen Null konvergiert (in der L^{**} Topologie). Sei ferner $\varepsilon > 0$ und e_i Positivelement zur σ-additiven Funktion von e_i:*

$$\nu(i,\varepsilon,e) := J_i(e) - \varepsilon\|e\|, \qquad i = 1,2,3,\ldots .$$

Dann ist

$$\bigwedge_{n=1}^{\infty} \bigvee_{i=n}^{\infty} e_i = 0 .$$

Beweis. Nehmen wir das Gegenteil an. Sei

$$0 \neq \bigwedge_{n=1}^{\infty} \bigvee_{i=n}^{\infty} e_i = \bar{e} \in K(g_0) .$$

Dann ist für beliebiges n

$$\bar{e} \leqq \bigvee_{i=n}^{\infty} e_i .$$

Also

$$\bar{e} = \bar{e} \wedge \bar{e} \leqq \bigvee_{i=n}^{\infty} e_i \wedge \bar{e} \leqq \bar{e}$$

und

$$0 \neq \bar{e} = \bigvee_{i=n}^{\infty} e_i \wedge \bar{e}\,.$$

Es folgt, daß es ein i_1 gibt mit $e_{i_1} \wedge \bar{e} > 0$ und trivial

$$e_{i_1} \wedge \bar{e} \leqq \bar{e} \leqq \bigvee_{i=n_1}^{\infty} e_i \wedge \bar{e}, \qquad n_1 \geqq i_1\,.$$

Jetzt beweist man leicht durch Induktion, daß es eine unendliche Folge $e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}, \ldots$ mit $i_1 < i_2 < i_3 \ldots$ gibt, die die Eigenschaft hat, daß

$$e_{i_1} \wedge \bar{e} \wedge e_{i_2} \wedge \bar{e} \wedge \ldots \wedge e_{i_n} \wedge \bar{e} \neq 0, \qquad n \text{ beliebig}\,.$$

Hieraus folgt, daß

$$e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge e_{i_3} \wedge \ldots \wedge e_{i_n} \neq 0, \qquad n \text{ beliebig}\,.$$

Die Familie aller endlichen Infima von Elementen aus $\{e_{i_k}\}_{k=1,2,3,\ldots}$ ist also ein g_0-Atom. Wir betrachten ein umfassendes g_0-Ultraatom $\overline{\mathfrak{A}}$ und damit das entsprechende Element $\overline{\mathfrak{A}}(\cdot)$ aus L^{**}. Sei

$$\overline{\mathfrak{A}}(J_{i_k}) = \alpha_k\,.$$

Wir beweisen jetzt, daß $\alpha_k \geqq \frac{1}{2}\varepsilon$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, und kommen damit zu einem Widerspruch gegen die Schwachkonvergenz von J_i gegen Null. Aus der Definition von $\overline{\mathfrak{A}}(\cdot)$ weiß man, daß es für gegebenes k ein Element e aus $\overline{\mathfrak{A}}$ mit

$$|J_{i_k}(e') - \alpha_k \|e'\|| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \|e'\|, \qquad e' \in \overline{\mathfrak{A}}, \qquad e' \leqq e\,,$$

gibt. Da $e_{i_k} \wedge e \in \overline{\mathfrak{A}}$ und $e_{i_k} \wedge e \leqq e$, hat man

$$|J_{i_k}(e_{i_k} \wedge e) - \alpha_k \|e_{i_k} \wedge e\|| \leqq \tfrac{1}{2}\varepsilon \|e_{i_k} \wedge e\|\,.$$

Da e_{i_k} außerdem ein Positivelement für $\nu(i_k, \varepsilon, e)$ ist, gilt

$$J_{i_k}(e_{i_k} \wedge e) \geqq \varepsilon \|e_{i_k} \wedge e\|\,.$$

Es folgt, daß für beliebiges k

$$\begin{aligned} \alpha_k \|e_{i_k} \wedge e\| &= \alpha_k \|e_{i_k} \wedge e\| - J_{i_k}(e_{i_k} \wedge e) + J_{i_k}(e_{i_k} \wedge e) \\ &\geqq -\tfrac{1}{2}\varepsilon \|e_{i_k} \wedge e\| + \varepsilon \|e_{i_k} \wedge e\| = \tfrac{1}{2}\varepsilon \|e_{i_k} \wedge e\|\,. \end{aligned}$$

Da $\|e_{i_k} \wedge e\| > 0$, so folgt, daß $\alpha_k \geqq \frac{1}{2}\varepsilon$ für beliebiges k.

Satz (8.1) (Abstrakter Egoroffscher Satz). *Sei $J_1, J_2, \ldots$ eine schwach gegen Null konvergente Folge aus L^*. Dann existiert für beliebiges $\delta > 0$ ein Element $e_\delta \in K(g_0)$ mit $\|e_\delta\| \leqq \delta$, so daß es für beliebiges $\varepsilon > 0$ ein $i_0(\varepsilon)$ gibt mit*

$$J_i(e) \leqq \varepsilon\|e\|, \qquad e \in K(g_0), \quad e \leqq g_0 - e_\delta, \quad i \geqq i_0(\varepsilon)\,.$$

Beweis. Sei $e_+(i,\nu)$, $e_-(i,\nu)$ eine Hahnsche Zerlegung für

$$J_i(e) - \nu^{-1}\|e\|, \qquad \nu = 1,2,3,\ldots\,.$$

Aus Lemma 2 folgt

$$\bigwedge_{n=1}^{\infty} \bigvee_{i=n}^{\infty} e_+(i,\nu) = 0\,.$$

Daraus folgt weiterhin

$$\lim_n \left\| \bigvee_{i=n}^{\infty} e_+(i,\nu) \right\| = 0\,.$$

Für jedes ν wählen wir n_ν so, daß

$$\left\| \bigvee_{i=n_\nu}^{\infty} e_+(i,\nu) \right\| \leqq 2^{-\nu}\delta\,.$$

Wir bestimmen e_δ durch

$$e_\delta = \bigvee_{\nu=1}^{\infty} \bigvee_{i=n_\nu}^{\infty} e_+(i,\nu)\,.$$

Nun ist

$$\|e_\delta\| = \left\| \bigvee_{\nu=1}^{\infty} \bigvee_{i=n_\nu}^{\infty} e_+(i,\nu) \right\| \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\| \bigvee_{i=n_\nu}^{\infty} e_+(i,\nu) \right\| \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-\nu}\delta = \delta\,.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Wir wählen eine natürliche Zahl ν_0 mit $\nu_0 \geqq 1/\varepsilon$. Für $e \leqq g_0 - e_\delta$ mit $e \in K(g_0)$ ergibt sich

$$e \leqq g_0 - \bigvee_{\nu=1}^{\infty} \bigvee_{i=n_\nu}^{\infty} e_+(i,\nu) = \bigwedge_{\nu=1}^{\infty} \bigwedge_{i=n_\nu}^{\infty} (g_0 - e_+(i,\nu)) = \bigwedge_{\nu=1}^{\infty} \bigwedge_{i=n_\nu}^{\infty} e_-(\varepsilon,\nu)\,.$$

Es folgt jetzt

$$e \leqq \bigwedge_{i=n_\nu}^{\infty} e_-(i,\nu), \qquad \nu = 1,2,3,\ldots\,.$$

Wählt man nun $i_0(\varepsilon) = n_{\nu_0}$, so hat man $e \leqq e_-(i,\nu_0)$ für $i \geqq i_0(\varepsilon)$, das heißt

$$J_i(e) \leqq \nu_0^{-1}\|e\| \leqq \varepsilon\|e\|, \qquad e \in K(g_0), \quad e \leqq g_0 - e_\delta, \quad i \geqq i_0(e)\,,$$

was zu beweisen war.

Ersetzt man die Folge $J_1, J_2, \ldots$ durch die Folge $J_1, -J_1, J_2, -J_2, \ldots$, so erhält man das

Corollar. *Sei* $J_1, J_2, \ldots$ *wie im Satz* (8.1). *Dann gibt es für* $\delta > 0$ *ein* $e_\delta \in K(g_0)$ *mit* $\|e_\delta\| \leqq \delta$, *so daß es für* $\varepsilon > 0$ *ein* $i_0(\varepsilon)$ *gibt mit*

$$|J_i(e)| \leqq \varepsilon \|e\|, \qquad e \in K(g_0), \quad e \leqq g_0 - e_\delta, \quad i \geqq i_0(\varepsilon) .$$

Wir formen jetzt dieses Corollar um. Da

$$P_{g_0 - e_\delta}(e) = (g_0 - e_\delta) \wedge e \leqq g_0 - e_\delta$$

(Eigenschaft (1) § 5) für beliebiges $e \in K(g_0)$, ist

$$\left|J_i(P_{g_0-e_\delta}(e))\right| \leqq \varepsilon \|P_{g_0-e_\delta}(e)\|, \qquad e \in K(g_0), \quad i \geqq i_0(\varepsilon) .$$

Sei y ein g_0-elementares Element in L. Dann ist

$$y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k ,$$

λ_k reell, $e_k \in K(g_0)$, $e_k \wedge e_j = 0$ für $k \neq J$, $\bigvee_k e_k = g_0$, und

$$P_{g_0-e_\delta}(y) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_{g_0-e_\delta}(e_k) .$$

Nun ist

$$P_{g_0-e_\delta}(e_k) \wedge P_{g_0-e_\delta}(e_j) = P_{g_0-e_\delta}(e_k \wedge e_j) = P_{g_0-e_\delta}(0) = 0$$

für $k \neq j$ (Eigenschaft (e) § 4). Da die Norm die Kakutani-Eigenschaft besitzt, folgt also

$$\|P_{g_0-e_\delta}(y)\| = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \, \|P_{g_0-e_\delta}(e_k)\| .$$

Man hat damit für y g_0-elementar und $i \geqq i_0(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} |J_i(P_{g_0-e_\delta}(y))| &\leqq \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \left|J_i(P_{g_0-e_\delta}(e_k))\right| \\ &\leqq \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \, \|P_{g_0-e_\delta}(e_k)\| = \varepsilon \|P_{g_0-e_\delta}(y)\| . \end{aligned}$$

Aus Satz (5.1) weiß man, daß die g_0-elementaren Elemente normdicht im Bildraum von $P_{g_0}(\cdot)$ liegen. Aus der Stetigkeit von J_i und $P_{g_0-e_\delta}(\cdot)$ folgt jetzt

$$\left|J_i(P_{g_0-e_\delta}(P_{g_0}(y)))\right| \leqq \varepsilon \left\|P_{g_0-e_\delta}(P_{g_0}(y))\right\|, \qquad y \in L, \quad i \geqq i_0(\varepsilon)$$

oder äquivalent, da $P_{g_0-e_\delta} P_{g_0} = P_{g_0-e_\delta}$ (Eigenschaft (e) § 4),

$$\left|J_i(P_{g_0-e_\delta}(y))\right| \leqq \varepsilon \|P_{g_0-e_\delta}(y)\| \leqq \varepsilon \|P_{g_0-e_\delta}\| \, \|y\| ,$$

$y \in L$, $i \geqq i_0(\varepsilon)$. Dieses Ergebnis halten wir als Corollar fest.

COROLLAR. *Sei $J_1, J_2, \ldots$ eine schwach gegen Null konvergente Folge aus L^*. Dann gibt es für beliebiges $\delta > 0$ ein $e_\delta \in K(g_0)$ mit $\|e_\delta\| \leqq \delta$, so daß die Folge $\{J_i(P_{g_0 - e_\delta}(\cdot))\}$ von Elementen aus L^* stark gegen Null konvergiert.*

9. Die Eigenschaft G in (L)- und (M)-Räumen.

Sei $y \in L$. Es folgt aus den Eigenschaften (f), (a) und (c) (§ 4), daß

$$P_{y^+}(y) = P_{y^+}(y^+) - P_{y^+}(y^-) = y^+ - P_{y^+}(P_{y^-}(y^-)) = y^+ - P_{y^+ \wedge y^-}(y^-) = y^+ ,$$

da $y^+ \wedge y^- = 0$. Aus den Eigenschaften (i), (c) (§ 3) folgt

$$P_{P_{y^+}(g_0)}(y) = P_{y^+ \wedge g_0}(y) = P_{g_0}(P_{y^+}(y)) = P_{y_0}(y^+) .$$

Die Eigenschaft (c) ergibt

$$P_{e \wedge P_{y^+}(g_0)}(y) = P_e(P_{P_{y^+}(g_0)}(y)) = P_e(P_{g_0}(y^+)) = P_e(y^+) .$$

Analoge Überlegungen liefern einen entsprechenden Ausdruck für y^-. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} P_{e \wedge P_{y^+}(g_0)}(y) &= P_e(y^+), \\ P_{e \wedge P_{y^-}(g_0)}(y) &= -P_e(y^-), \end{aligned} \qquad e \in K(g_0) .$$

SATZ (9.1). *Jeder (L)-Raum hat die Eigenschaft G.*

BEWEIS. Wir können annehmen, daß die Norm die Kakutani-Eigenschaft besitzt, das heißt aus $x \wedge y = 0$ folgt $\|x+y\| = \|x-y\|$. Sei $J_1, J_2, \ldots$ eine schwach gegen Null konvergente Folge aus L^* und $x_1, x_2, x_3, \ldots$ eine schwach gegen Null konvergente Folge aus L. Man kann o. B. d. A. annehmen, daß $\|x_i\| > 0$, $i = 1, 2, 3, \ldots$. Wir definieren

$$g_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k|}{\|x_k\|} .$$

Daß $g_0 \in L$ mit $g_0 \geqq 0$, ist klar. Es gilt außerdem

$$P_{g_0}(x_k) = x_k .$$

Wir betrachten jetzt die Folgen

$$\|P_e(x_k{}^+)\|, \qquad e \in K(g_0), \qquad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Aus der Definition von $J_0(\cdot)$, der natürlichen Linearform (§ 3) und der Tatsache, daß $P_e(x_k{}^+) \geqq 0$, folgt

$$\|P_e(x_k{}^+)\| = J_0(P_e(x_k{}^+)) .$$

Es gilt jedoch

$$P_e(x_k{}^+) = P_{e \wedge P_{x_k^+}(g_0)}(y) .$$

Also ist

$$\|P_e(x_k{}^+)\| = J_0\big(P_{e\wedge e_k}(x_k)\big)$$

mit $e_k = P_{x_k^+}(g_0) \in K(g_0)$ (Eigenschaft (k) § 5). Wir wenden jetzt Satz (6.3) an und schließen daraus auf die Gleichmäßigstetigkeit von $J_0\big(P_e(x_k)\big)$ in $e=0$. Hieraus folgt, daß es für beliebiges $\varepsilon>0$ ein $\delta>0$ gibt, so daß sich aus $\|e\|<\delta$ die Beziehung

$$\|P_e(x_k{}^+)\| = \big|J_0\big(P_{e\wedge e_k}(x_k)\big)\big| \leqq \varepsilon, \qquad k = 1,2,3,\ldots ,$$

ergibt (weil dann $\|e\wedge e_k\|<\delta$ für beliebiges k ist). Analoge Überlegungen gelten auch für $\|P_e(x_k{}^-)\|$. Da

$$\|P_e(x_k)\| = \|P_e(x_k{}^+)\| + \|P_e(x^-)\| ,$$

kann man schließen, daß die $\|P_e(x_k)\|$ in $e=0$ gleichmäßigstetig sind. Da nun $\{J_i\}$ eine schwach-beschränkte Menge ist, ist sie auch norm-beschränkt. Das gleiche gilt für $\{x_i\}$. Sei nun

$$\sup_i \|J_i\| = M, \qquad \sup_i \|x_i\| = K .$$

Wir wählen $\delta>0$, so daß für $\|e\|\leqq\delta$

$$\|P_e(x_k)\| \leqq \varepsilon/M, \qquad k = 1,2,3,\ldots .$$

Aus dem zweiten Corollar zu Satz (8.1) folgt, daß man $e_\delta\in K(g_0)$ mit $\|e_\delta\|\leqq\delta$ finden kann und zwar so, daß die Folge $\{J_i(P_{g_0-e_\delta}(\cdot))\}$ aus L^* in der Norm gegen Null konvergiert. Wir haben

$$J_i(x_i) = J_i\big(P_{g_0}(x_i)\big) = J_i\big(P_{g_0-e_\delta}(x_i)\big) + J_i\big(P_{e_\delta}(x_i)\big)$$

und damit

$$\begin{aligned} |J_i(x_i)| &\leqq \|J_i(P_{g_0-e_\delta}(\cdot)\|K + \|P_{e_\delta}(x_i)\|M \\ &\leqq \|J_i(P_{g_0-e_\delta}(\cdot)\|K + \varepsilon . \end{aligned}$$

Da $\big\|J_i\big(P_{g_0-e_\delta}(\cdot)\big)\big\| \to 0$, folgt

$$\lim_i \sup |J_i(x_i)| \leqq \varepsilon .$$

Da $\varepsilon>0$ beliebig gewählt wurde, ist $\lim_i \sup|J_i(x_i)|=0$, und L hat die Eigenschaft G.

Definition (Kakutani [9]). Ein (M)-Raum ist ein Vektorverband, der gleichzeitig ein Banachraum ist mit einer Norm $\|\cdot\|$, bezüglich der $x\wedge y$ simultan in x und y normstetig ist und die die folgende Eigenschaften besitzt:

a) Aus $x\wedge y\geqq 0$ folgt $\|x\vee y\| = \sup\{\|x\|,\|y\|\}$.
b) Aus $x\wedge y=0$ folgt $\|x+y\|=\|x-y\|$.

Beispiele von (M)-Räumen sind c_0 und $C(\Omega)$ (cf. § 1). Sei (Ω, B, μ) ein beliebiger Maßraum. Dann ist der Raum B aller beschränkten meßbaren Funktionen auf Ω mit der Norm

$$\|f\| = \operatorname{ess}_\omega \sup |f(\omega)|, \qquad f \in B,$$

ein (M)-Raum. Es ist elementar zu beweisen (Kakutani [9]), daß der Dualraum eines (M)-Raumes immer ein (L)-Raum ist. Aus Satz (2.2) folgt jetzt trivial

Satz (9.2). *Alle (L)-Räume und alle (M)-Räume besitzen die Eigenschaft G.*

Aus Satz (2.1) folgt jetzt das

Corollar (Satz A, § 1). *Alle (L)-Räume und alle (M)-Räume sind D-P-strikt.*

LITERATUR

1. R. G. Bartle, N. Dunford and J. Schwartz, *Weak compactness and vector measures*, Canad. J. Math. 7 (1955), 289–305.
2. G. Birkhoff, *Lattice theory, revised edition*, (Amer. Math. Soc. Colloquium Publications 25), New York, 1948.
2a. J. W. Brace, Transformations on Banach spaces, Dissertation, Cornell University, 1953.
2b. J. W. Brace, Weakly compact transformations, University of Maryland. (Unpublished.)
3. N. Dunford and B. J. Pettis, *Transformations on summable functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 47 (1940), 323–392.
4. N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear operators* I, London, 1958.
5. A. Grothendieck, *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type* $C(K)$, Canad. J. Math. 5 (1953), 129–173.
6. K. Jacobs, *Maß und Integral*, Ausarbeitung zur Vorlesung, Göttingen, 1960.
7. K. Jacobs, *Neuere Methoden und Ergebnisse der Ergodentheorie*, Berlin · Göttingen · Heidelberg, 1960.
8. S. Kakutani, *Concrete representations of abstract (L)-spaces and the mean ergodic theorem*, Ann. of Math. (2) 42 (1941), 523–537.
9. S. Kakutani, *Concrete representation of abstract (M)-spaces*, Ann. of Math. (2) 42 (1941), 994–1024.
10. A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Elements of the theory of functions and functional analysis* I, *Metric and normed spaces*, Rochester, N.Y., 1957.
11. O. Nikodym, *Sur une généralization des intégrales de M. Radon*, Fund. Math. 5 (1930), 131–179.
12. H. Wallman, *Lattices and topological spaces*, Ann. of Math. (2) 39 (1938), 112–126.

UNIVERSITÄT GÖTTINGEN, DEUTSCHLAND