MATH. SCAND. 14 (1964), 120–128

LORENTZMETRIK IN DER ALGEBRA DER KOMPLEXEN 4-MATRIZEN

JOSEF WEIER

Sei $(\gamma_1,\ldots,\gamma_4)$ ein Diracquadrupel. Die γ_ν seien also komplexe 4-Matrizen mit $\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu=2\delta_{\mu\nu}$. Die Matrizen

$$(*)\qquad \gamma_\nu,\qquad \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4,\qquad i\gamma_\mu\gamma_\nu,\ \mu<\nu,\qquad i\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu,\ \lambda<\mu<\nu,\qquad 1$$

in dieser Reihenfolge mögen $\Gamma_1,\Gamma_2,\ldots,\Gamma_{16}$ heissen. Dann lässt sich jede komplexe 4-Matrix ξ eindeutig als $\xi=\sum\xi^\nu\Gamma_\nu$ mit komplexen Zahlen ξ^ν darstellen. Die Zahl

$$\sum_{\nu=1}^{16}(\xi^\nu)^2$$

ist von der besonderen Wahl des Diracquadrupels $(\gamma_1,\ldots,\gamma_4)$ unabhängig. Die Matrizen γ_ν stehen in folgendem Sinne paarweis aufeinander senkrecht. Ordnet man je zwei Matrizen α, β aus der Algebra A der komplexen 4-Matrizen als Skalarprodukt die Zahl

$$(1)\qquad \langle\alpha,\beta\rangle \;=\; \tfrac{1}{4}\,\mathrm{spur}(\alpha\beta)$$

zu, so ist $\langle\gamma_\mu,\gamma_\nu\rangle=0$ für $\mu\neq\nu$.

Das Skalarprodukt (1) *induziert in die Algebra A eine Lorentzmetrik*: Sei L der reelle Lorentzraum, M der komplexe Lorentzraum und $C(M)$ die Cliffordalgebra über M. Es sei also M der Vektorraum aller Quadrupel $x=(x^1,\ldots,x^4)$ komplexer Zahlen x^ν, gemäss

$$(2)\qquad x\cdot y \;=\; \sum_{\nu=1}^{3}x^\nu y^\nu - x^4y^4$$

mit einem Skalarprodukt versehen. Mit $d_j=(\delta_j^1,\ldots,\delta_j^4)$ und

$$e_j \;=\; d_j \quad \text{für } j=1,2,3, \qquad e_4 \;=\; -id_4$$

ist $(e_1,\ldots,e_4)$ eine orthonormale Basis von M. Die Algebra $C(M)$, im besonderen das mit $s\vee t$ bezeichnete Cliffordprodukt von Elementen s, t aus $C(M)$ ist im ersten Abschnitt erklärt.

Eingegangen am 15. Februar 1964.

Die obige Aussage, das Skalarprodukt $\langle\alpha,\beta\rangle$ induziere in A eine Lorentzmetrik, ist dann näherhin so gemeint: *Man kann die Algebra $C(M)$ derart isomorph auf die Algebra A der komplexen 4-Matrizen abbilden, dass das über $C(M)$ fortgesetzte Produkt* (2) *gerade dem Skalarprodukt in A entspricht.*

Im zweiten Abschnitt wird erläutert, in welchem Sinne die Gleichung

$$s \vee t = s \wedge t + s \cdot t \tag{3}$$

richtig ist, wobei $s \wedge t$ wie üblich das äussere Produkt und $s \cdot t$ das innere Produkt der, nicht notwendig gleichstufigen, Terme s und t aus $C(M)$ bedeutet. *Es ist dann das Cliffordprodukt $s \vee t$ in einen metrikunabhängigen Teil, $s \wedge t$, und einen Teil, $s \cdot t$, in den die Lorentzmetrik eingeht, zerlegt.* Nach (3) ist im besonderen

$$d_j \vee d_k = d_j \wedge d_k + d_j \cdot d_k ,$$

wobei

$$d_1 \cdot d_1 = d_2 \cdot d_2 = d_3 \cdot d_3 = -d_4 \cdot d_4 = 1$$

gilt. Dass die »Spurtechnik« in der Theorie der 4-Spinoren mathematisch nicht genügend durchgefeilt ist, hat auch E. A. Hylleraas in [2] mit Recht bemerkt.

1. Cliffordalgebra über dem komplexen Lorentzraume.

Die Bedeutung von M, d_j und e_j sei dieselbe wie oben. Der reelle Lorentzraum L besteht aus den $x = (x^1, \ldots, x^4)$ aus M, für die alle x reell sind. Die Tensoren

$$(**) \qquad e_\nu,\ \nu = 1,2,3,4, \qquad e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4, \qquad i e_\mu \wedge e_\nu,\ \ \mu < \nu,$$
$$i e_\lambda \wedge e_\mu \wedge e_\nu,\ \ \lambda < \mu < \nu ,$$

in dieser Reihenfolge bezeichnen wir auch mit E_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, 16$. Im besonderen ist also $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 = E_5$ gesetzt. Jeder inhomogene schiefsymmetrische kontravariante Tensor s über M schreibt sich dann eindeutig als

$$s = \sum_{\nu=1}^{16} s^\nu E_\nu$$

mit komplexen Zahlen s^ν. Mit $t = \sum t^\nu E_\nu$ sei $s + t = \sum (s^\nu + t^\nu) E_\nu$. Der additive Operator der Cliffordalgebra $C(M)$ über M ist damit erklärt.

Zur Definition des Cliffordproduktes $s \vee t$ der Tensoren s und t genügt es offenbar, die speziellen Produkte $E_\alpha \vee E_\beta$, $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, 16$, zu definieren. Im übrigen ist der $\vee$-Operator linear:

$$s \vee (t_1+t_2) = s \vee t_1 + s \vee t_2 \,, \tag{1}$$

$$(\alpha s) \vee \beta t = (\alpha\beta) s \vee t \,. \tag{2}$$

Es ist also nicht $(\alpha s)\vee\beta t=\alpha\bar{\beta}(s\vee t)$. Das widerspräche der allgemeinen Definition einer Algebra.

Zur Erklärung von $E_\alpha\vee E_\beta$ seien $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ natürliche Zahlen zwischen 1 und 4, nicht notwendig paarweis verschieden. Sind die λ_j untereinander gleich, so ist $e_{\lambda_1}\vee\ldots\vee e_{\lambda_r}=1$. Sonst ist

$$e_{\lambda_1} \vee \ldots \vee e_{\lambda_r} = (-1)^q\, e_{k_1} \wedge \ldots \wedge e_{k_\varrho} \,. \tag{3}$$

Dabei bedeutet q die Anzahl der Inversionen in $(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)$, und es sind

$$k_1 < k_2 < \ldots < k_\varrho$$

die paarweis verschiedenen unter den Zahlen $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$. Hierauf ist

$$(e_{\lambda_1}\wedge\ldots\wedge e_{\lambda_a}) \vee (e_{\mu_1}\wedge\ldots\wedge e_{\mu_b}) = e_{\lambda_1} \vee \ldots \vee e_{\lambda_a} \vee e_{\mu_1} \vee \ldots \vee e_{\mu_b} \,. \tag{4}$$

Damit ist $E_\alpha\vee E_\beta$ für alle α,β erklärt.

Im Unterschied zum »*Cliffordprodukt*« $s\vee t=\sum_{\alpha,\beta}s^\alpha t^\beta\, E_\alpha\vee E_\beta$ der Tensoren $s=\sum s^\nu E_\nu$ und $t=\sum t^\nu E_\nu$ wollen wir die, im allgemeinen echt komplexe, Zahl

$$\langle s,t\rangle = \sum_{\nu=1}^{16} s^\nu t^\nu \tag{5}$$

als das »*Diagonalprodukt*« von s und t bezeichnen. Sind a, b Vektoren des reellen Lorentzraumes mit $a=\sum a^\nu E_\nu$ und $b=\sum b^\nu E_\nu$, so ist

$$a^\nu = b^\nu = 0 \qquad \text{für} \quad \nu\geqq 5 \,,$$

und es gilt

$$a = \sum a^\nu e_\nu, \qquad b = \sum b^\nu e_\nu \,.$$

Das Skalarprodukt von a und b bezüglich der Lorentzmetrik ist

$$a\cdot b = \sum_{\nu=1}^{4} a^\nu b^\nu \,. \tag{6}$$

Drückt man a und b bezüglich der Basis $(d_1,\ldots,d_4)$ als $a=\sum\alpha^\nu d_\nu$ und $b=\sum\beta^\nu d_\nu$ aus, so ist

$$a\cdot b = \sum_{\nu=1}^{3} \alpha^\nu\beta^\nu - \alpha^4\beta^4 \,. \tag{7}$$

Schliesslich ist

$$a\cdot b = \langle a,b\rangle \,. \tag{8}$$

Es ist also das Diagonalprodukt eine Fortsetzung des von der Metrik des komplexen Lorentzraumes M festgelegten Skalarproduktes über die Cliffordalgebra $C(M)$.

Der Satz der Einleitung, dass $\langle\alpha,\beta\rangle=\frac{1}{4}\operatorname{spur}\alpha\beta$ in die Algebra der komplexen 4-Matrizen eine Lorentzmetrik induziert, lässt sich jetzt wie folgt präzisieren. *Bildet man die Cliffordalgebra $C(M)$ über M vermöge $e_\nu\to\gamma_\nu$ isomorph auf A ab, so entspricht dem Diagonalprodukt in $C(M)$ gerade das Skalarprodukt $\frac{1}{4}$ spur $(\alpha\beta)$ in A.*

Für Vektoren a, b des reellen Lorentzraumes gilt ausser (6) bis (8), dass

$$a\vee b = a\wedge b+a\cdot b\,.$$

Es ist nämlich $e_\mu\vee e_\nu=e_\mu\wedge e_\nu+e_\mu\cdot e_\nu$, daher

$$\begin{aligned} a\vee b = \sum a^\mu b^\nu e_\mu\vee e_\nu &= \sum a^\mu b^\nu(e_\mu\wedge e_\nu+e_\mu\cdot e_\nu)\\ &= \left(\sum a^\mu e_\mu\right)\wedge\sum b^\nu e_\nu+\left(\sum a^\mu e_\mu\right)\cdot\sum b^\nu e_\nu\\ &= a\wedge b+a\cdot b\,,\end{aligned}$$

wie behauptet.

2. Cliffordprodukt und Skalarprodukt.

Die Bedeutung von L, M und $C(M)$ sei dieselbe wie oben. Wie oben sei $d_j=(\delta_j^1,\ldots,\delta_j^4)$, ferner

$$e_j = d_j \quad \text{für } j=1,2,3 \qquad \text{und} \qquad e_4 = -id_4\,.$$

In welcher Weise geht die Lorentzmetrik des Vektorraumes L in das Cliffordprodukt ein?

Hierzu bezeichne t ein Element aus $C(M)$, also einen inhomogenen schiefsymmetrischen kontravarianten Tensor über M. Dann ist

$$d_j\vee t = d_j\wedge t+d_j\cdot t\,, \tag{1}$$

wie wir zeigen wollen.

Zunächst ist jedoch noch das Skalarprodukt $d_j\cdot t$ zu erklären. Zur Definition des Skalarproduktes von Elementen aus L genügt es, die Produkte $d_j\cdot d_k$ zu erklären und mit $a=\sum\alpha^\nu d_\nu$, $b=\sum\beta^\nu d_\nu$ wie oben

$$a\cdot b = \sum\alpha^j\beta^k d_j\cdot d_k$$

zu setzen. Entsprechend genügt es zur Definition des Skalarproduktes $s\cdot t$ der Tensoren $s=\sum s^\nu E_\nu$ und $t=\sum t^\nu E_\nu$, die Ausdrücke

$$(d_{\alpha_1}\otimes\ldots\otimes d_{\alpha_r})\cdot(d_{\beta_1}\otimes\ldots\otimes d_{\beta_s})$$

zu definieren. Wir setzen nun

$$(2) \qquad d_j \cdot (d_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes d_{\alpha_r}) = (d_j \cdot d_{\alpha_1}) d_{\alpha_2} \otimes \ldots \otimes d_{\alpha_r},$$

für $r < s$ allgemein

$$(d_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes d_{\alpha_r}) \cdot (d_{\beta_1} \otimes \ldots \otimes d_{\beta_s}) = \frac{1}{r!} (d_{\alpha_1} d_{\beta_1}) \ldots (d_{\alpha_r} d_{\beta_r}) d_{\beta_{r+1}} \otimes \ldots \otimes d_{\beta_s}.$$

Wegen $d_j \cdot d_j = 1$, $j = 1, 2, 3$, und $d_4 \cdot d_4 = -1$ geht in diese Produkte die Lorentzmetrik ein.

Aus (2) folgt

$$(3) \qquad d_j \cdot (d_j \wedge d_{j_2} \wedge \ldots \wedge d_{j_r}) = \pm d_{j_2} \wedge \ldots \wedge d_{j_r},$$

je nachdem $j \leqq 3$ oder $j = 4$ ist.

Beweis von (3). Es ist

$$\begin{aligned} d_j \cdot (d_j \wedge d_{j_2} \wedge \ldots \wedge d_{j_r}) &= d_j \cdot (\delta^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}_{j j_2 \ldots j_r} d_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes d_{\alpha_r}) \\ &= \delta^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}_{j j_2 \ldots j_r} (d_j \cdot d_{\alpha_1}) d_{\alpha_2} \otimes \ldots \otimes d_{\alpha_r}) \\ &= \begin{cases} \delta^{j \alpha_2 \ldots \alpha_r}_{j j_2 \ldots j_r} d_{\alpha_2} \otimes \ldots \otimes d_{\alpha_r} & \text{für } j \leqq 3, \\ -\delta^{4 \alpha_2 \ldots \alpha_r}_{4 j_2 \ldots j_r} d_{\alpha_2} \otimes \ldots \otimes d_{\alpha_r} & \text{für } j = 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Wegen

$$\delta^{k \alpha_2 \ldots \alpha_r}_{k j_2 \ldots j_r} = \delta^{\alpha_2 \ldots \alpha_r}_{j_2 \ldots j_r}$$

folgt hieraus bereits die Behauptung.

Beweis der Formel (1). Man darf $t = d_{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge d_{\alpha_r}$ annehmen. Es komme *erstens* j unter den α_k nicht vor. Aus (2) folgt dann leicht, dass $d_j \cdot t = 0$. Die verbleibende Gleichung $d_j \vee t = d_j \wedge t$ ist aber nach der Definition des $\vee$-Produktes richtig. Wenn *zweitens* j unter den α_k vorkommt, so ist zunächst $d_j \wedge t = 0$. Hier besagt also (1), dass

$$d_j \vee t = d_j \cdot t.$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung folgt leicht aus (3).

Die Beziehung (1) eignet sich auch zur Definition des Cliffordproduktes. Von (1) ausgehend kann man nämlich induktiv

$$(4) \qquad (d_{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge d_{\lambda_r}) \vee t = (d_{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge d_{\lambda_{r-1}}) \vee (d_{\lambda_r} \vee t)$$

setzen und dann das Cliffordprodukt linear fortsetzen.

Berechnet man nach (1) den Ausdruck $e_\alpha \vee (e_\beta \vee t)$, so ist zunächst

$$\begin{aligned} e_\alpha \vee (e_\beta \vee t) &= e_\alpha \vee (e_\beta \wedge t + e_\beta \cdot t) \\ &= e_\alpha \wedge e_\beta \wedge t + e_\alpha \cdot (e_\beta \wedge t) + e_\alpha \wedge (e_\beta \cdot t) + e_\alpha \cdot (e_\beta \cdot t), \end{aligned}$$

daher

$$e_\alpha \vee (e_\alpha \vee t) = e_\alpha \cdot (e_\alpha \wedge t) + e_\alpha \wedge (e_\alpha \cdot t).$$

Trivialerweise ist nämlich $e_\alpha \wedge e_\alpha \wedge t = 0$, und nach (2) und (3) ist $e_\alpha \cdot (e_\alpha \cdot t) = 0$. Andererseits ist $e_\alpha \vee e_\alpha = 1$, daher $e_\alpha \vee (e_\alpha \vee t) = t$. Somit $e_\alpha \cdot (e_\alpha \wedge t) + e_\alpha \wedge (e_\alpha \cdot t) = t$.

3. Über die Spur gewisser 4-Matrizen.

Seien wieder $\gamma_1, \ldots, \gamma_4$ Matrizen mit $\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}$. Wie in der Einleitung seien $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{16}$ die Matrizen

$$(*) \qquad \gamma_\nu, \quad \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4, \quad i\gamma_\mu\gamma_\nu,\ \mu<\nu, \quad i\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu,\ \lambda<\mu<\nu, \quad 1\,.$$

Dann ist $\Gamma_j^2 = 1$ für alle j. Weiter ist

$$(1) \qquad \operatorname{spur} \Gamma_j = 0 \qquad \text{für } \Gamma_j \neq 1\,.$$

Bei R. H. Good [1] wird (1) wie folgt bewiesen. Es genügt zu zeigen, dass zu jedem $\Gamma_j \neq 1$ ein Γ_k mit $\Gamma_k \Gamma_j \Gamma_k = -\Gamma_j$ existiert. Dann ist nämlich

$$\operatorname{spur}(\Gamma_k \Gamma_j \Gamma_k) = \operatorname{spur}(\Gamma_j \Gamma_k \Gamma_k) = \operatorname{spur} \Gamma_j\,.$$

Andererseits ist $\operatorname{spur}(-\Gamma_j) = -\operatorname{spur} \Gamma_j$. Ist *erstens* $\Gamma_j = \gamma_\nu$, so kann man $\Gamma_k = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$ setzen. Wenn *zweitens* $\Gamma_j = i\gamma_\mu\gamma_\nu$ mit $\mu<\nu$, so kann man $\Gamma_k = \gamma_\mu$ setzen. Ist *drittens* $\Gamma_j = i\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu$ mit $\lambda<\mu<\nu$, so kann man $\Gamma_k = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$ setzen. Im *vierten* Falle, dass $\Gamma_j = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$, liefert $\Gamma_k = \gamma_\nu$ die Relation $\Gamma_k \Gamma_j \Gamma_k = -\Gamma_j$.

Die Matrizen $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{16}$ sind linear unabhängig.

Zum Beweis dieser Behauptung seien wie bei R. H. Good [1] z^j komplexe Zahlen mit $\sum z^j \Gamma_j = 0$. Zu zeigen, dass $z^j = 0$ für alle j. Wegen $\Gamma_j^2 = 1$ ist

$$z^r + \sum_{j \neq r} z^j \Gamma_j \Gamma_r = 0\,.$$

Wegen $\operatorname{spur} \Gamma_k = 0$ für $\Gamma_k \neq 1$ genügt es also zu zeigen, dass sich $\Gamma_j \Gamma_r$ für alle $j \neq r$ als

$$\Gamma_j \Gamma_r = \zeta \Gamma_k$$

mit $\Gamma_k \neq 1$ und einer komplexen Zahl ζ darstellen lässt. Das wiederum folgt unmittelbar aus der Definition der Γ_k als Produkt von γ_ν.

Aus der linearen Unabhängigkeit der Γ_j folgt, dass

$$(2) \qquad \Gamma_j \neq 1 \qquad \text{für} \quad j \leqq 15\,.$$

Dabei sind also die von 1 verschiedenen Matrizen (*) mit $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{15}$ bezeichnet.

Die Cliffordalgebra über dem komplexen Lorentzraume und die Algebra der komplexen 4-Matrizen sind isomorph.

Zur Erklärung eines konkreten Isomorphismus sei wieder L der reelle Lorentzraum, M der komplexe Lorentzraum, $C(M)$ die Cliffordalgebra über M und $d_j = (\delta_j^1, \ldots, \delta_j^4)$ für $j = 1,2,3,4$, ferner $e_j = d_j$ für $j = 1,2,3$ und $ie_4 = d_4$. Die Tensoren (**) seien in der angegebenen Reihenfolge mit $E_1, E_2, \ldots, E_{16}$ bezeichnet. Dann sind die Elemente von $C(M)$ die Tensoren $s = \sum s^\nu E_\nu$, $t = \sum t^\nu E_\nu$ usw. mit

$$s \vee t = \sum s^\alpha t^\beta \, E_\alpha \vee E_\beta$$

als Produkt.

Die Matrizen (*) in der angegebenen Reihenfolge sind oben mit $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{16}$ bezeichnet. Jede komplexe 4-Matrix σ schreibt sich eindeutig als $\sigma = \sum \sigma^\nu \Gamma_\nu$. Mit $\tau = \sum \tau^\nu \Gamma_\nu$ ist

$$\sigma\tau = \sum \sigma^\alpha \tau^\beta \, \Gamma_\alpha \Gamma_\beta .$$

Setzt man daher

$$\Phi(E_\nu) = \Gamma_\nu \qquad \text{für} \qquad \nu = 1,2,\ldots,16 ,$$

so vermittelt Φ einen Isomorphismus der Cliffordalgebra über M auf die Algebra der komplexen 4-Matrizen, da die E_ν und die Γ_ν die gleichen Multiplikationstafeln bestimmen.

4. Die durch die Spur vermittelte Lorentzmetrik in der Algebra der komplexen 4-Matrizen.

Wie oben sei A die Algebra der komplexen 4-Matrizen und $(\gamma_1, \ldots, \gamma_4)$ ein Diracquadrupel. Die Matrizen (*) seien wieder mit $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{16}$ bezeichnet. Es lässt sich dann jede komplexe 4-Matrix α eindeutig als $\alpha = \sum a^\nu \Gamma_\nu$ darstellen. Wir wollen nun zeigen:

Sind α, β komplexe 4-Matrizen und a^ν, b^ν ihre Koordinaten bezüglich der Γ_ν, also $\alpha = \sum a^\nu \Gamma_\nu$ und $\beta = \sum b^\nu \Gamma_\nu$, so ist

$$\tfrac{1}{4}\,\mathrm{spur}(\alpha\beta) = \sum_{\nu=1}^{16} a^\nu b^\nu .$$

Insbesondere ist also $\sum_{\nu=1}^{16} (a^\nu)^2$ von der besonderen Wahl des Diracquadrupels $(\gamma_1, \ldots, \gamma_4)$ unabhängig.

Beweis. Es ist $\alpha\beta = (\sum a^\mu \Gamma_\mu)(\sum b^\nu \Gamma_\nu) = \sum a^\mu b^\nu \, \Gamma_\mu \Gamma_\nu$, daher

$$\mathrm{spur}(\alpha\beta) = \sum a^\mu b^\nu \,\mathrm{spur}(\Gamma_\mu \Gamma_\nu) .$$

Für $\mu \neq \nu$ gilt, wie oben gezeigt, $\Gamma_\mu \Gamma_\nu = z\Gamma_\lambda$ mit $\Gamma_\lambda \neq 1$ und einer komplexen Zahl z. Wie oben gezeigt, ist ferner

$$\mathrm{spur}\,\Gamma_\lambda = 0 \qquad \text{für} \qquad \Gamma_\lambda \neq 1 .$$

Daher ist

$$\mathrm{spur}(\alpha\beta) = \sum a^\nu b^\nu \,\mathrm{spur}(\Gamma_\nu)^2 .$$

Andererseits ist $(\Gamma_\nu)^2 = 1$, wie oben gezeigt. Also $\operatorname{spur}(\Gamma_\nu)^2 = 4$, wie behauptet.

Statt $\frac{1}{4}\operatorname{spur}(\alpha\beta)$ wollen wir auch $\langle\alpha,\beta\rangle$ schreiben. Dann gilt:

Diagonalprodukt in der Cliffordalgebra $C(M)$ über M und Skalarprodukt in der Algebra A der komplexen 4-Matrizen hängen gemäss

$$\langle x,y\rangle = \langle\Phi(x),\Phi(y)\rangle$$

miteinander zusammen, wobei Φ den oben erklärten Isomorphismus von $C(M)$ auf A bedeutet.

Genauer gilt: Sei $(e_1,\ldots,e_4)$ eine orthonormale Basis im komplexen Lorentzraume M und $(\gamma_1,\ldots,\gamma_4)$ ein Diracquadrupel. Die Tensoren (**) und die Matrizen (*) seien in den angegebenen Reihenfolgen mit E_j bzw. mit Γ_j bezeichnet. Sei Φ der durch $\Phi(E_j) = \Gamma_j$ bestimmte Isomorphismus. Sind dann x, y Elemente aus $C(M)$ mit

$$x = \sum x^j E_j \qquad \text{und} \qquad y = \sum y^j E_j\,,$$

so ist

$$\langle x,y\rangle = \sum x^j y^j = \tfrac{1}{4}\operatorname{spur}\bigl(\Phi(x)\Phi(y)\bigr) = \langle\Phi(x),\Phi(x)\rangle\,,$$

wie oben behauptet.

Bekanntlich lässt sich jede komplexe 2-Matrix $y = (y_{jk})$ eindeutig als

$$y = \sum_{\nu=1}^{3} x^\nu\sigma_\nu + x^4 E$$

darstellen, wo die σ_ν die Paulimatrizen und E die Einheitsmatrix bedeuten. Wenn y hermitisch, sind die x^ν reell. Gemäss

$$x^4 = \tfrac{1}{2}(y_{11}+y_{22}), \qquad x^3 = \tfrac{1}{2}(y_{11}-y_{22})\,,$$
$$x^1 = \tfrac{1}{2}(y_{12}+y_{21}), \qquad ix^2 = \tfrac{1}{2}(y_{21}-y_{12})$$

drücken sich die x^ν durch die y_{jk} aus.

Sind die Matrizen γ_ν des Diracquadrupels $(\gamma_1,\ldots,\gamma_4)$ hermitisch, so sind auch die Γ_ν hermitisch. Die Zahlen x^ν aus

$$Y = \sum_{\nu=1}^{16} x^\nu\Gamma_\nu$$

sind sämtlich reell, wenn Y eine hermitische Matrix ist.

Dass die Γ_ν hermitisch, ergibt sich unmittelbar aus ihrer Definition als Produkte der γ_ν und aus den Vertauschungsrelationen der γ_ν. Dann ist

$$Y = \overline{Y}' = \sum \overline{x}^\nu \overline{\Gamma}_\nu' = \sum \overline{x}^\nu \Gamma_\nu ,$$

also $\sum (x^\nu - \overline{x}^\nu)\Gamma_\nu = 0$. Wegen der linearen Unabhängigkeit der Γ_ν ist daher $x^\nu = \overline{x}^\nu$, wie behauptet.

LITERATUR

1. R. H. Good, *Properties of the Dirac matrices*, Rev. Modern Phys. 27 (1955), 187–211.
2. E. A. Hylleraas, *Über die Darstellung von Spinoren*, Z. Physik 167 (1962), 243–249.

UNIVERSITÄT BONN, DEUTSCHLAND