MATH. SCAND. 14 (1964), 193–196

BEWEIS EINER FORMEL FÜR DIE RIEMANNSCHE ZETAFUNKTION

CARL LUDWIG SIEGEL

In einer brieflichen Mitteilung an Viggo Brun habe ich vor Jahren einen Beweis gegeben für eine Formel, die er mir vorgelegt hatte. Dies ist in der Abhandlung: »La somme des facteurs de Möbius« par Viggo Brun [1] erwähnt. Da dieser Beweis nie gedruckt worden ist, hat mir Brun vorgeschlagen, denselben zu veröffentlichen. In der erwähnten Abhandlung heisst es:

»Pour éclaircir les relations entre la fonction zéta et les nombres de Bernoulli on peut étudier l'équivalence connue suivante qui est une conséquence de la formule d'Euler–Maclaurin

$$(s-1)\zeta(s) \sim 1+\tfrac{1}{2}(s-1)+\frac{B_2}{2!}(s-1)s+\frac{B_4}{4!}(s-1)s(s+1)(s+2)+\ldots$$

où la série à droite est divergente (ou finie).

Étudions les sommes successives

$$\begin{aligned} Q_1(s) &= 1+\tfrac{1}{2}(s-1) = \tfrac{1}{2}(s+1) \\ Q_2(s) &= 1+\tfrac{1}{2}(s-1)+\frac{B_2}{2!}(s-1)s = \tfrac{1}{12}(s+2)(s+3) \\ Q_4(s) &= \ldots = -\tfrac{1}{720}(s+2)(s+4)(s+5)(s-9) \\ Q_6(s) &= \ldots = \tfrac{1}{30240}(s+2)(s+4)(s+6)(s+7)[s^2-10s+45]\,. \end{aligned}$$

Dans une correspondance entre M.M. A. Selberg, E. Jacobsthal, C. Siegel [2] et moi j'ai fait la supposition que

$$Q_{2r}(s) = \frac{B_{2r}}{(2r)!}(s+2)(s+4)\ldots(s+2r)(s+2r+1)[s^{r-1}+(r^2-6r-1)s^{r-3}+\ldots]\,.$$

M. Siegel en a donné une démonstration. Comme on voit les zéros « trivielles » $(-2, -4, -6, \ldots)$ de la fonction zéta figurent ici. On peut se poser la question: Les racines complexes de $Q_r(s)$ s'approchent elles vers les zéros de la fonction zéta quand r augmente?

Eingegangen am 11. November 1963.

M. Siegel en a donné une réponse negative. Cela se peut naturellement expliquer par la divergence de la série.

J'ai essayé — en donnant à la formule d'Euler–Maclaurin une autre forme — d'obtenir une somme convergente pour $(s-1)\zeta(s)$:

$$\begin{aligned}(s-1)\zeta(s) = {} & Q_{2r-2}(s)+\frac{B_{2r}}{(2r)!}(s-1)s(s+1)\ldots(s+2r-1)[\zeta(s+2r)-1]+ \\ & +\frac{1}{2!}\frac{B_{2r}}{(2r)!}(s-1)s(s+1)\ldots(s+2r)[\zeta(s+2r+1)-1]+ \\ & +\left\{\frac{1}{3!}\frac{B_{2r}}{(2r)!}+\frac{1}{1!}\frac{B_{2r+2}}{(2r+2)!}\right\}(s-1)s\ldots(s+2r+1)[\zeta(s+2r+2)-1]+ \\ & +\left\{\frac{1}{4!}\frac{B_{2r}}{(2r)!}+\frac{1}{2!}\frac{B_{2r+2}}{(2r+2)!}\right\}(s-1)s\ldots(s+2r+2)[\zeta(s+2r+3)-1]+ \\ & +\left\{\frac{1}{5!}\frac{B_{2r}}{(2r)!}+\frac{1}{3!}\frac{B_{2r+2}}{(2r+2)!}+\frac{1}{1!}\frac{B_{2r+4}}{(2r+4)!}\right\}(s-1)s\ldots(s+2r+3)[\zeta(s+2r+4)-1]+ \\ & +\left\{\frac{1}{6!}\frac{B_{2r}}{(2r)!}+\frac{1}{4!}\frac{B_{2r+2}}{(2r+2)!}+\frac{1}{2!}\frac{B_{2r+4}}{(2r+4)!}\right\}(s-1)s\ldots(s+2r+4)[\zeta(s+2r+5)-1]+ \\ & +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

J'ai mentionné cette formule dans une lettre à M. Siegel en disant que je croyais que la série soit convergente, au moins pour s réel et >1. Dans une lettre de 15 juin 1946 M. Siegel a démontré la convergence de cette série pour toutes valeurs de s, réelles et complexes. Il a également démontré la justesse de cette formule. En réiterant la formule on peut obtenir des polynômes qui probablement sont plus analogues à la fonction zéta que les polynômes mentionnés plus haut.«

Mein Beweis war:

Ist ϱ beliebig und $|y|<1$, so gilt die binomische Reihenentwicklung

$$(1-y)^{\varrho} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n-\varrho-1}{n}y^n .$$

Man substituiere

$$\varrho = 1-s, \qquad y = x^{-1}$$

und multipliziere mit x^{1-s}; dies liefert

$$(x-1)^{1-s}-x^{1-s} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+s-1}{n+1}x^{-n-s}$$

für $x > 1$. Ist auch $s > 1$, so sind rechts alle Glieder positiv. Summiert man über $x = 2, 3, 4, \ldots$, so erhält man links eine konvergente Reihe mit der Summe 1, und rechts ist die Vertauschung der Summationsfolge erlaubt.

Setzt man noch zur Abkürzung

$$\zeta(s) - 1 = \sum_{n=2}^{\infty} n^{-s} = \eta(s)\,, \tag{1}$$

so wird

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+s-1}{n+1} \eta(n+s)\,, \tag{2}$$

zunächst für $s > 1$. Weiterhin sei $s = \sigma + it$ beliebig. Ist dann $n > 1 - \sigma$, so ist $\eta(n+s)$ durch die Reihe in (1) erklärt und es gilt

$$\lim_{n \to \infty} \{2^{n+s} \eta(n+s)\} = 1\,.$$

Definiert man

$$\binom{n+s-1}{n+1} \eta(n+s) = a_n(s) = a_n\,,$$

so ist also

$$\lim_{n \to \infty} a_n / a_{n+1} = 2\,.$$

Man zeigt leicht, dass dies sogar gleichmässig bezüglich s in jedem beschränkten Gebiet der s-Ebene gilt. Hieraus ersieht man die absolute und gleichmässige Konvergenz der Reihe in (2), für jedes solche Gebiet. Die Funktionalgleichung (2) liefert jetzt die analytische Fortsetzung von $(s-1)\zeta(s)$ in die ganze s-Ebene, und (2) gilt überall.

Man ersetze s in (2) durch $k+s$ für $k = 0, 1, 2, \ldots, h$, multipliziere mit

$$\binom{k+s-2}{k} B_k$$

und summiere über k. Dies ergibt

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{h} \binom{k+s-2}{k} B_k &= \sum_{k=0}^{h} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k+s-1}{n+k+1} \binom{n+k+1}{k} B_k \eta(n+k+s) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+s-1}{n+1} \eta(n+s) \sum_{k=0}^{\mathrm{Min}(n,h)} \binom{n+1}{k} B_k \\ &= (s-1)\eta(s) - \sum_{n=h+1}^{\infty} \binom{n+s-1}{n+1} \eta(n+s) \sum_{k=h+1}^{n} \binom{n+1}{k} B_k \end{aligned}$$

für jedes $h = 0, 1, 2, \ldots$. Dies ist Ihre Formel.

Die unendliche Reihe konvergiert, weil man endlich viele absolut konvergente Reihen addiert und umgeordnet hat.

Ich glaube, dass (2) schon irgendwo in der Literatur steht, aber ich weiss nicht wo.

LITERATUR

1. Viggo Brun, *La somme des facteurs de Möbius*, Dixième congrès des mathématiciens scandinaves, Copenhague, 1946, 40–53.
2. V. Brun, E. Jacobsthal, A. Selberg, C. Siegel, *En brevveksling om et polynom som er i slekt med Riemanns zetafunktion*, Norsk matematisk tidsskrift 28 (1946), 65–71.

UNIVERSITÄT GÖTTINGEN, DEUTSCHLAND