MATH. SCAND. 14 (1964), 220–224

EIN SATZ ÜBER EIGENTLICHE HOLOMORPHE ABBILDUNGEN VON ANALYTISCHEN POLYEDERGEBIETEN

HANS RISCHEL

R. Remmert und K. Stein [2] haben bewiesen, dass eigentliche holomorphe Abbildungen von analytischen Polyedergebieten bemerkenswerte Eigenschaften besitzen. Die entscheidenden Hilfsmittel dieser Untersuchung sind der Abbildungssatz von Remmert [1, Satz 23] und eine Idee, die von Rothstein [3] stammt. (Für Anwendungen siehe etwa [2, Satz 11].) Die vorliegende Arbeit knüpft an diese Untersuchungen an. Sie enthält eine Ergänzung zu einem Hauptsatz von Remmert und Stein.

Zuerst seien einige Bezeichnungen eingeführt (vgl. hierzu [2, S. 183–184]).

Unter einem *analytischen Polyeder* im komplexen Zahlenraum C^n wird eine kompakte Teilmenge P von C^n mit folgender Eigenschaft verstanden: Es gibt eine offene Umgebung U von P und endlich viele in U holomorphe Funktionen $f_1,\ldots,f_k$, so dass ein Punkt $z \in U$ genau dann zu P gehört, wenn

$$|f_1(z)| \leqq 1, \ldots, |f_k(z)| \leqq 1 .$$

Ein *analytisches Polyedergebiet* A im komplexen Zahlenraum C^n ist eine zusammenhängende Komponente des offenen Kernes $\mathring{P}$ eines analytischen Polyeders P in C^n.

Sei A ein Polyedergebiet in C^n. Ein System $g_1,\ldots,g_l$ von Funktionen, die in einer offenen Umgebung von $\bar{A}$ holomorph sind, heisst ein *Minimalsystem* für A, wenn gilt:

1) Für jedes $z \in A$ ist $|g_1(z)| < 1, \ldots, |g_l(z)| < 1$.
2) Zu jedem $z \in \partial A$ gibt es ein j, $1 \leqq j \leqq l$, so dass $|g_j(z)| = 1$.
3) Zu jedem j, $1 \leqq j \leqq l$, gibt es einen Punkt $z \in \partial A$, so dass $|g_j(z)| = 1$, aber $|g_p(z)| < 1$ für $p \neq j$.

Eingegangen am 30. Oktober 1963.

Man sieht leicht, dass jedes analytische Polyedergebiet ein Minimalsystem besitzt.

Sei A ein Polyedergebiet in C^n. Eine nicht konstante Funktion g, die in einer offenen Umgebung von $\bar{A}$ holomorph ist, heisst eine *Zerlegungsfunktion* von A, wenn es eine topologisch $2n-1$-dimensionale Teilmenge des Randes ∂A von A gibt, wo $|g(z)|$ konstant ist. Die durch g erzeugte Zerlegung von A, also die Zerlegung von A in die zusammenhängenden Komponenten der Mengen $\{z \in A \mid g(z) = \text{Konstante}\}$, heisst dann eine *charakteristische Zerlegung* von A. Ist $g_1, \ldots, g_l$ irgend ein Minimalsystem für A, so sieht man sofort, dass jede der Funktionen $g_1, \ldots, g_l$ eine Zerlegungsfunktion von A ist. Andererseits zeigt man leicht, dass es zu jeder Zerlegungsfunktion von A eine Funktion des Minimalsystems derart gibt, dass die beiden Funktionen analytisch abhängig sind. Sämtliche charakteristischen Zerlegungen von A werden also von den Funktionen eines Minimalsystems erzeugt. Die Anzahl s der charakteristischen Zerlegungen von A heisst die *Stufe* von A. Insbesondere gilt $s \leqq l$.

Der Satz von Remmert und Stein [2, Satz 14] besagt nun folgendes:

SATZ. *Im C^2 seien gegeben ein Polyedergebiet A der Stufe s und ein Polyedergebiet $*A$ der Stufe $*s$. Es sei $\tau : A \to *A$ eine eigentliche holomorphe Abbildung. Dann ist jeder charakteristischen Zerlegung Z_σ von A in natürlicher Weise eine charakteristische Zerlegung $*Z_{*\sigma}$ von $*A$ derart zugeordnet, dass jedes Element von Z_σ bei τ auf ein Element von $*Z_{*\sigma}$ abgebildet wird; verschiedenen Z_σ sind verschiedene $*Z_{*\sigma}$ zugeordnet.*

Eine notwendige Bedingung für die Existenz der Abbildung τ ist also, dass $s \leqq *s$. Wir wollen jetzt zeigen, dass sogar $s = *s$ gelten muss, also dass folgendes gilt:

SATZ. *Es seien A ein Polyedergebiet der Stufe s in $C^2(z_1, z_2)$ und $*A$ ein Polyedergebiet der Stufe $*s$ in $C^2(w_1, w_1)$. Wenn es eine eigentliche holomorphe Abbildung $\tau : A \to *A$ gibt, so ist $s = *s$.*

BEWEIS.

1) Sei $f_1, \ldots, f_k$ ein Minimalsystem für A und $g_1, \ldots, g_l$ ein Minimalsystem für $*A$, so dass $f_1, \ldots, f_s$ bzw. $g_1, \ldots, g_{*s}$ die charakteristischen Zerlegungen von A bzw. $*A$ erzeugt. Wir nehmen an, dass die von f_j, $j = 1, \ldots, s$, erzeugte Zerlegung vermöge τ in die von g_j erzeugte Zerlegung übergeführt wird. Die Annahme $s < *s$, aus der wir einen Widerspruch herleiten wollen, bedeutet dann, dass $s < l$, und dass die Funktionen $g_1, \ldots, g_{s+1}$ paarweise analytisch unabhängig sind.

Da $g_1,\ldots,g_l$ ein Minimalsystem von $^*A$ ist, gibt es einen Punkt $\boldsymbol{w}^{(0)} \in \partial{}^*A$ und eine in C^2 offene Umgebung U von $\boldsymbol{w}^{(0)}$, so dass

$$(1) \qquad |g_{s+1}(\boldsymbol{w}^{(0)})| = 1, \qquad |g_j(\boldsymbol{w})| < 1 \quad \text{für} \quad j \neq s+1 \text{ und } \boldsymbol{w} \in U .$$

Da die Funktion g_{s+1} sicher nicht konstant ist, können $\partial g_{s+1}/\partial w_1$ und $\partial g_{s+1}/\partial w_2$ nicht beide identisch verschwinden. Wir nehmen an, dass $\partial g_{s+1}/\partial w_1 \not\equiv 0$. Die Funktion $\partial g_{s+1}/\partial w_1$ kann dann auch nicht in der Menge $U \cap \partial{}^*A$ identisch verschwinden. Es ist also möglich, den Punkt $\boldsymbol{w}^{(0)}$ so zu wählen, dass ausser (1) noch

$$(2) \qquad \partial g_{s+1}(\boldsymbol{w}^{(0)})/\partial w_1 \neq 0$$

gilt.

2) Wählen wir die Umgebung U genügend klein und einfach zusammenhängend, so hat $g_{s+1}(w)$ in dieser einen eindeutigen Logaritmus. Es sei

$$h(\boldsymbol{w}) = \log\big(g_{s+1}(\boldsymbol{w})/g_{s+1}(\boldsymbol{w}^{(0)})\big) \quad \text{mit} \quad h(\boldsymbol{w}^{(0)}) = 0 .$$

Das Funktionenpaar

$$(*) \qquad \tilde{w}_1 = h(\boldsymbol{w}), \qquad \tilde{w}_2 = w_2 - w_2^{(0)}$$

von in U holomorphen Funktionen hat dann eine in $\boldsymbol{w}^{(0)}$ nicht verschwindende Funktionaldeterminante. Nach einem bekannten Satz gibt es dann einen Dizylinder $\tilde{U} = \tilde{U}_1 \times \tilde{U}_2$ um $(0,0)$ in $C^2(\tilde{w}_1,\tilde{w}_2)$ und eine offene Umgebung $U' \subseteq U$ von $\boldsymbol{w}^{(0)}$ in $C^2(w_1,w_2)$, derart dass die Gleichungen (*) eine biholomorphe Abbildung $\mu : U' \to \tilde{U}$ definieren. Man sieht, dass $\mu(\boldsymbol{w}^{(0)}) = (0,0)$ und

$$\mu(^*A \cap U') = \tilde{U} \cap \{\tilde{\boldsymbol{w}} \mid \operatorname{Re}\tilde{w}_1 < 0\} .$$

3) Wir bezeichen die in $\tilde{U}$ definierte und holomorphe Funktion $g_j \circ \mu^{-1}$ mit $\tilde{g}_j$, $j = 1,\ldots,1$. Die Funktion $\tilde{g}_{s+1}$ ist dann nur von der Veränderlichen $\tilde{w}_1$ abhängig. Da die Funktionen $g_1,\ldots,g_{s+1}$ als paarweise analytisch unabhängig vorausgesetzt sind, gilt dasselbe für die Funktionen $\tilde{g}_1,\ldots,\tilde{g}_{s+1}$. Wir haben also

$$\partial\tilde{g}_j/\partial\tilde{w}_2 \not\equiv 0 \qquad \text{für} \qquad j = 1,\ldots,s .$$

Die Funktion

$$\tilde{p} = \frac{\partial\tilde{g}_1}{\partial\tilde{w}_2} \cdots \frac{\partial\tilde{g}_s}{\partial\tilde{w}_2}$$

ist also nicht identisch 0 in $\tilde{U}$. Sie kann daher auch nicht in der Menge $\tilde{U} \cap \{\tilde{\boldsymbol{w}} \mid \operatorname{Re}\tilde{w}_1 = 0\}$ identisch verschwinden. Es gibt folglich einen Punkt $\tilde{\boldsymbol{a}} = (\tilde{a}_1,\tilde{a}_2) \in \tilde{U}$ mit $\operatorname{Re}\tilde{a}_1 = 0$, so dass

$$\frac{\partial\tilde{g}_j(\tilde{\boldsymbol{a}})}{\partial\tilde{w}_2} \neq 0 \qquad \text{für} \qquad j = 1,\ldots,s .$$

Der Punkt $\mu^{-1}(\tilde{a}) \in U'$ liegt auf dem Rande von $*A$, und wir können annehmen, dass er mit $w^{(0)}$ zusammenfällt, also dass $\tilde{\boldsymbol{a}} = (0,0)$. (Dies bedeutet nur, dass μ durch Parallelverschiebungen in der $\tilde{w}_1$- und $\tilde{w}_2$-Ebene geändert wird.)

4) Es sei $b_j = g_j(\boldsymbol{w}^{(0)}) = \tilde{g}_j(0,0)$, $j = 1,\ldots,s$. Nach dem Satz über implicite Funktionen gibt es dann: eine offene Umgebung $\tilde{U}_1' \subseteqq \tilde{U}_1$ des Punktes 0 in der $\tilde{w}_1$-Ebene, für jedes $j = 1,\ldots,s$ eine offene Umgebung V_j von b_j in der ζ_j-Ebene und eine holomorphe Funktion $\tilde{\varphi}_j(\tilde{w}_1,\zeta_j)$ in $\tilde{U}_1' \times V_j$, derart dass

(a) $\tilde{\varphi}_j(\tilde{U}_1' \times V_j) \subseteqq U_2$.
(b) $\tilde{\varphi}_j(0,b_j) = 0$.
(c) $\tilde{g}_j(\tilde{w}_1,\tilde{\varphi}_j(\tilde{w}_1,\zeta_j)) = \zeta_j$ für alle $\tilde{w}_1 \in \tilde{U}_1'$, $\zeta_j \in V_j$.

5) Es sei ε reell, positiv und so klein, dass das Parallelogramm Γ mit den Ecken 0, $-\varepsilon$, $-2\varepsilon + i\varepsilon$, $-\varepsilon + i\varepsilon$ ganz in $\tilde{U}_1'$ liegt, und so dass $\tilde{g}_j(\Gamma,0) \subseteqq V_j$ für $j = 1,\ldots,s$. Die Mengen $\tilde{S}$ und $\tilde{K}_k$, $j = 1,\ldots,s$ werden folgendermassen definiert:

$$
\begin{aligned}
\tilde{S} &= \{\tilde{\boldsymbol{w}} \mid \tilde{w}_1 = -\varepsilon t,\ \tilde{w}_2 = 0;\ t \in]0,1]\}\,,\\
\tilde{K}_j &= \{\tilde{\boldsymbol{w}} \mid \tilde{w}_2 = \tilde{\varphi}_j(\tilde{w}_1,\tilde{g}_j(-\varepsilon t,0)),\ \tilde{w}_1 = -\varepsilon(t+1) + i\varepsilon;\ t \in [0,1]\}\,.
\end{aligned}
$$

Wegen (a) sind $\tilde{S}$ und alle $\tilde{K}_j$ Teilmengen von $\tilde{U} \cap \{\tilde{\boldsymbol{w}} \mid \operatorname{Re}\tilde{w}_1 < 0\}$, und es gilt:

(i) $\bar{\tilde{S}} \cap \{\boldsymbol{w} \mid \operatorname{Re}\tilde{w}_1 = 0\} \neq \emptyset$.
(ii) $\tilde{K}_j$ ist kompakt, $j = 1,\ldots s$.
(iii) Zu jedem $\tilde{s} \in \tilde{S}$ und für jedes $j = 1,\ldots,s$ gibt es eine stetige Kurve $\tilde{k}_j$ in $\tilde{U} \cap \{\tilde{\boldsymbol{w}} \mid \operatorname{Re}\tilde{w} < 0\}$, die $\tilde{s}$ mit einem Punkte von $\tilde{K}_j$ verbindet und längs der die Funktion $\tilde{g}_j$ konstant ist.

Die Behauptungen (i) und (ii) sind klar. Es sei $\tilde{\boldsymbol{s}} = (-\varepsilon t,0)$. Wir definieren die Kurve $\tilde{k}_j$ durch die Parameterdarstellung

$$
\left.
\begin{aligned}
\tilde{w}_1 &= -\varepsilon t - \varepsilon\theta + i\varepsilon\theta,\\
\tilde{w}_2 &= \tilde{\varphi}_j(-\varepsilon t - \varepsilon\theta + i\varepsilon\theta,\, \tilde{g}_j(-\varepsilon t,0)),
\end{aligned}
\right.
\qquad \theta \in [0,1]
$$

Es ist klar, dass diese Kurve in $\tilde{U} \cap \{\tilde{\boldsymbol{w}} \mid \operatorname{Re}\tilde{w}_1 < 0\}$ liegt, in $\tilde{\boldsymbol{w}}^{(0)}$ beginnt und in einem Punkte von $\tilde{K}_j$ endet. Nach (c) hat $\tilde{g}_j$ den konstanten Wert $\tilde{g}_j(-\varepsilon t,0)$ längs $\tilde{k}_j$.

6) Es seien $S = \mu^{-1}(\tilde{S})$, $K_j = \mu^{-1}(\tilde{K}_j)$, $j = 1,\ldots,s$. Dann sind S und $K = \bigcup_{j=1}^{s} K_j$ Teilmengen von $*A$ mit den folgenden Eigenschaften:

(I) $\bar{S} \cap \partial{*A} \neq \emptyset$.
(II) K ist kompakt.

(III) Für jedes $w \in S$ und jedes $j = 1, \ldots, s$ hat das w enthaltende Element der durch g_j erzeugten Zerlegung von $^*A$ Punkte mit K gemeinsam.

Es ist nun wesentlich, dass τ (infolge des Remmertschen Abbildungssatzes) surjektiv ist. Da τ eigentlich ist, ist $L = \tau^{-1}(K)$ eine kompakte Teilmenge von A. Die Menge

$$L' = \{z \in A \mid f_p(z) \in f_p(L);\, p = 1, \ldots, k\}$$

ist dann ebenfalls eine kompakte Teilmenge von A.

Es gilt $\tau^{-1}(S) \subseteqq L'$. Sei nämlich $z^{(0)} \in A$ mit $\tau(z^{(0)}) \in S$. Da jede der Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ Zerlegungsfunktion von A ist, gilt infolge der Voraussetzungen für jedes $p = 1, \ldots, k$, dass das $z^{(0)}$ enthaltende Element der durch f_p erzeugten Zerlegung von A für ein gewisses j, $1 \leqq j \leqq s$, vermöge τ auf das $\tau(z^{(0)})$ enthaltende Element der durch g_j erzeugten Zerlegung von $^*A$ abgebildet wird. Jedes solche Element hat aber nach (III) Punkte mit K gemeinsam. Es gibt also für jedes p, $p = 1, \ldots, k$, einen Punkt $z^{(p)} \in L$, so dass $f_p(z^{(0)}) = f_p(z^{(p)})$. Folglich gilt $z^{(0)} \in L'$.

Da τ surjektiv ist, gilt $S \subseteqq \tau(L')$. Dies widerspricht aber der Stetigkeit von τ. Wegen (I) gibt es nämlich keine kompakte Teilmenge von $^*A$, die S enthält.

Damit ist der Satz bewiesen.

BEISPIEL. Es gibt keine eigentliche holomorphe Abbildung eines Dizylinders auf ein Simplexgebiet im C^2.

LITERATUR

1. R. Remmert, *Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume*, Math. Ann. 133 (1957), 328–370.
2. R. Remmert und K. Stein, *Eigentliche holomorphe Abbildungen*, Math. Zeitschr. 73 (1960), 159–189.
3. W. Rothstein, *Zur Theorie der analytischen Abbildungen im Raum zweier komplexer Veränderlichen*, Diss. Univ. Münster, 1935.

UNIVERSITÄT KOPENHAGEN, DÄNEMARK