MATH. SCAND. 15 (1964), 5–17

WESENTLICHE SELBSTADJUNGIERTHEIT SINGULÄRER ELLIPTISCHER DIFFERENTIALOPERATOREN ZWEITER ORDNUNG IN $C_0^\infty(G)$

KONRAD JÖRGENS

Einleitung.

Es sei G eine offene, zusammenhängende Punktmenge des m-dimensionalen Raumes R^m. In G wird ein Differentialausdruck der Form

$$Tu = \sum_{j,k=1}^{m} (i\partial_j + b_j) a_{jk} (i\partial_k + b_k) u + qu$$

betrachtet, dessen Koeffizienten den folgenden Voraussetzungen genügen:

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} a_{jk}(x),\ b_j(x),\ q(x) \text{ sind reell;} \\ a_{jk} \in C^2(G),\ b_j \in C^1(G),\ q \in L_{2,\mathrm{loc}}(G); \\ \text{die Matrix } \{a_{jk}(x)\} \text{ ist positiv definit für jedes } x \in G\,. \end{cases}$$

Unter diesen Voraussetzungen bildet T den Raum $C_0^\infty(G)$ (aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit in G kompaktem Träger) in den Hilbertraum $H = L_2(G)$ ab, sodaß durch $T_0 u = Tu$ für $u \in D(T_0) = C_0^\infty(G)$ ein linearer Operator T_0 im Hilbertraum H erklärt ist. T_0 ist offenbar symmetrisch. Für die Anwendungen ist es wichtig, zu wissen, unter welchen Voraussetzungen es genau eine selbstadjungierte Fortsetzung gibt, d. h. T_0 wesentlich selbstadjungiert ist.

Hierzu ein Beispiel: Zwei Teilchen mit den Massen μ_1, μ_2 und den Koordinaten $x_{(1)} = \{x_1, x_2, x_3\}$, $x_{(2)} = \{x_4, x_5, x_6\}$ wirken aufeinander gemäß dem Potential $V(|x_{(1)} - x_{(2)}|)$. Der Schrödingeroperator dieses mechanischen Systems hat in geeigneten Einheiten die Form

$$T = -\mu_1 \Delta_1 - \mu_2 \Delta_2 + V(|x_{(1)} - x_{(2)}|)\,,$$

Eingegangen am 30. Oktober 1964.

worin Δ_1 bzw. Δ_2 der Laplace-Operator bezüglich $x_{(1)}$ bzw. $x_{(2)}$ ist. Die reelle Funktion $V(r)$ sei für $r>0$ stetig mit $V(r)\to 0$ für $r\to\infty$, jedoch singulär im Punkte $r=0$. Existiert das Integral $\int_0^1 V^2(r)r^2dr$, so genügt der Operator T den Voraussetzungen (A) in Bezug auf das Gebiet $G=R^6$. In diesem Falle ist T_0 wesentlich selbstadjungiert nach einem Kriterium von T. Kato [2]. Existiert das Integral nicht, so genügt T den Voraussetzungen (A) in Bezug auf das Gebiet

$$G = \{x=\{x_{(1)},x_{(2)}\} \mid x\in R^6,\, x_{(1)}\neq x_{(2)}\}\,.$$

Die Quantentheorie verlangt, daß T_0 wesentlich selbstadjungiert ist; eine hinreichende Bedingung hierfür ist also zugleich hinreichend für die quantentheoretische Zulässigkeit des Problems.

In der vorliegenden Arbeit wird eine hinreichende Bedingung für die wesentliche Selbstadjungiertheit von T_0 gegeben. Für den Fall $G=R^m$ sind entsprechende Bedingungen zuerst von T. Kato [2] gefunden und später von vielen Autoren verbessert worden. Das stärkste Resultat ist in einer Arbeit von T. Ikebe und T. Kato enthalten ([1]; hier findet man auch eine Zusammenstellung aller früheren Arbeiten). Das Kriterium der vorliegenden Arbeit, spezialisiert auf den Fall $G=R^m$, stellt einen weiteren Fortschritt in dieser Richtung dar[1]. Im allgemeinen Fall gab es bisher keine entsprechenden Ergebnisse. Ein Satz von E. Wienholtz [5, Satz 4] für Ringgebiete $r_1<|x|<r_2$ beruht auf der Voraussetzung der Halbbeschränktheit des Operators T_0, die im folgenden nicht gemacht werden soll. Vielmehr liefert die Methode der vorliegenden Arbeit auch hinreichende Bedingungen für die Halbbeschränktheit von T_0 [1].

Einige wesentliche Verbesserungen in dieser Arbeit sind aus Diskussionen mit Ebbe Thue Poulsen entstanden, dem ich dafür herzlich danken möchte.

1. Beschreibung des Satzes.

Die Bezeichnungen sind im folgenden — soweit möglich — dieselben wie in [1]. Insbesondere seien $a^+(x)$ und $a^-(x)$ der größte und der kleinste Eigenwert der positiv definiten Matrix $\{a_{jk}(x)\}$. In [1] wird $a^*(r)=\max\{a^+(x) \mid |x|\leqq r\}$ gesetzt und unter anderem verlangt, daß das Integral $\int_0^\infty [a^*(r)]^{-\frac{1}{2}}dr$ divergiert. Mit

$$\varrho(x) = \int\limits_0^{|x|} [a^*(r)]^{-\frac{1}{2}}\, dr$$

sind dann die folgenden Voraussetzungen erfüllt:

---

[1] Genaue Angaben hierüber findet man in § 1.

$$
\text{(B)}\begin{cases}\text{Es gibt eine in } G \text{ definierte Funktion } \varrho(x) \text{ mit den Eigenschaften}\\ (1)\ \varrho(x) \geqq 0,\ \varrho(x) \to \infty \text{ für } |x| \to \infty,\\ (2)\ \varrho(x) \text{ genügt einer gleichmäßigen Lipschitzbedingung in jedem}\\ \quad\ \text{kompakten Teilgebiet von } G,\\ (3)\ \sum_{j,k=1}^{m} a_{jk}\,\partial_j\varrho\,\partial_k\varrho \leqq 1 \text{ für fast alle } x \in G.\end{cases}
$$

(Nach einem Satz von H. Rademacher [3] ist eine Lipschitzstetige Funktion fast überall total differenzierbar.)

Im folgenden wird, falls das Gebiet G unbeschränkt ist, die Voraussetzung (B) über das Verhalten der Koeffizienten a_{jk} für $|x| \to \infty$ gemacht. Es gibt Funktionen $a_{jk}(x)$, für welche (B) erfüllt ist, das Integral $\int_0^\infty [a^*(r)]^{-\frac{1}{2}}dr$ jedoch konvergiert. Ein Beispiel (für $m=2$) ist

$$
\{a_{jk}(x)\} = \begin{Bmatrix} 1+x_2{}^2|x|^2 & -x_1x_2|x|^2 \\ -x_1x_2|x|^2 & 1+x_1{}^2|x|^2 \end{Bmatrix}
$$

mit $a^*(r)=1+r^4$ und $\varrho(x)=|x|$.

Ist das Gebiet G nicht der ganze Raum R^m, so kommt eine entsprechende Voraussetzung über das Verhalten der Funktionen a_{jk} in der Nähe des Randes hinzu:

$$
\text{(C)}\begin{cases}\text{Es gibt eine in } G \text{ definierte Funktion } \sigma(x) \text{ mit den Eigenschaften}\\ (1)\ \sigma(x) > 0,\ \sigma(x) \to 0 \text{ für } x \to \Gamma = \text{Rand}(G)\,,\\ (2)\ \sigma(x) \text{ genügt einer gleichmäßigen Lipschitzbedingung in jedem}\\ \text{kompakten Teilgebiet von } G,\\ (3)\ \sum_{j,k=1}^{m} a_{jk}\,\partial_j\sigma\partial_k\sigma \leqq 1 \text{ für fast alle } x \in G\,.\end{cases}
$$

Ist $a_{jk}=\delta_{jk}$, so hat die Funktion $\delta(x)=\inf\{|x-y| \mid y \in \Gamma\}$ die Eigenschaft (C). Es gilt nämlich $|\delta(x)-\delta(y)| \leqq |x-y|$ und daher $|\operatorname{grad}\delta(x)| \leqq 1$ für fast alle $x \in G$. Hat man allgemeiner $a^+(x) \leqq a(\delta(x))$ für $x \in G$ mit einer Funktion $a(r)$ derart, daß das Integral $\int_0^r [a(t)]^{-\frac{1}{2}}dt$ endlich ist, so ist mit

$$
\sigma(x) = \int_0^{\delta(x)} [a(t)]^{-\frac{1}{2}}\,dt
$$

die Voraussetzung (C) erfüllt. Dabei ist insbesondere nicht erforderlich, daß Γ eine $(m-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Für das Beispiel der Einleitung ist Γ dreidimensional, und

$$\sigma(x) = (\mu_1+\mu_2)^{-\frac{1}{2}}|x_{(1)}-x_{(2)}|$$

ist eine geeignete Funktion.

Es ist sehr interessant, daß Voraussetzungen über das Verhalten der Koeffizienten b_j weder für große Werte von x noch in der Nähe des Randes Γ erforderlich sind. Dagegen sind weitere Voraussetzungen über die lokalen Eigenschaften und das Wachstum der Funktion q nötig. Die lokale Bedingung ist die von F. Stummel [4]: Sei $Q_{\alpha,\mathrm{loc}}(G)$ die Menge der Funktionen $f(x)$ mit der Eigenschaft, daß zu jedem kompakten Teilgebiet K von G eine Zahl C_K (abhängig von K und von f) existiert, sodaß

$$\int\limits_{K\cap\{|x-y|\leqq 1\}} \frac{|f(y)|^2}{|x-y|^{m-4+\alpha}}\,dy \leqq C_K \quad \text{für alle } x\in K$$

gilt mit einer festen Zahl $\alpha\in(0,1]$. (Für $m=2$ und $m=3$ ist $Q_{\alpha,\mathrm{loc}}(G)=L_{2,\mathrm{loc}}(G)$.) Man definiert

$$M_f(x) = \int\limits_{G\cap\{|x-y|\leqq 1\}} \frac{|f(y)|^2}{|x-y|^{m-4+\alpha}}\,dy \quad \text{für } x\in G\,,$$

falls dieses Integral existiert. Mit diesen Bezeichnungen kann man nun die Voraussetzungen über q folgendermaßen formulieren:

(D) Es sei $q(x)=q_1(x)+q_2(x)$, wo

(1) $q_1\in Q_{\alpha,\mathrm{loc}}(G)$, $q_1(x)\geqq q^{**}(\sigma(x))-q^{*}(\varrho(x))$ mit positiven und für $t>0$ stetigen Funktionen $q^*(t)$, $q^{**}(t)$,

(2) $\limsup\limits_{t\to 0+}(\log t^{-1})^{-1}\int_t^1[q^{**}(s)]^{\frac{1}{2}}\,ds>1$,

(3) $q_2\in Q_{\alpha,\mathrm{loc}}(G)$, $[M_{q_2}(x)]^{\frac{1}{2}}\leqq m^*(\varrho(x))$ mit einer positiven und für $t\geqq 0$ stetigen Funktion $m^*(t)$, und

(4) $[M_{q_2}(x)]^{\frac{1}{2}}\leqq ca^-(x)$, c eine Konstante,

(5) $q^*(t)+m^*(t)$ ist monoton nicht abnehmend, und das Integral $\int_1^\infty[q^*(t)+m^*(t)]^{-\frac{1}{2}}dt$ divergiert.

Satz. *Für die Koeffizienten des Differentialausdrucks T seien die Voraussetzungen (A,B,C,D) erfüllt. Dann ist T_0 wesentlich selbstadjungiert.*

Aufgrund des Satzes ist $T_0{}^*$ die eindeutige selbstadjungierte Fortsetzung von T_0. — Aus dem Beweis des Satzes läßt sich ferner folgendes Kriterium für die Halbbeschränktheit des adjungierten Operators $T_0{}^*$ ablesen:

ZUSATZ. *Unter den Voraussetzungen des Satzes seien außerdem q^* und m^* konstant. Dann ist der Operator T_0^* nach unten halbbeschränkt, und es gilt*

$$(u, T_0^* u) = \int_G \left\{ \sum_{j,k=1}^{m} a_{jk} [(i\partial_j + b_j)u] \overline{[(i\partial_k + b_k)u]} + q|u|^2 \right\} dx$$

für jedes Element $u \in D(T_0^*)$.

Im Falle $G = R^m$ ist die Voraussetzung (C) überflüssig und in (D) kann man $q^{**} \equiv 0$ setzen und (2) weglassen. (D) ist dann gleichbedeutend mit den Voraussetzungen von Ikebe und Kato in [1] bis auf die Änderungen, die sich aus (B) ergeben; diese haben zur Folge, daß das Kriterium (A, B, D) allgemeiner ist als das Resultat von [1]. Ein Beispiel ist der Operator

$$T = -\sum_{j=1}^{m} \partial_j e^{-2|x|} \partial_j + q(x)$$

mit $q \in Q_{\alpha.\,\mathrm{loc}}(R^m)$ und $q(x) \geqq -ce^{2|x|}$. Dieser erfüllt nicht die Voraussetzungen von [1], wohl aber (A, B, D) mit $\varrho(x) = e^{|x|}$, $q^*(r) = cr^2$ und $q_2 \equiv 0$.

Die Zerlegung $q = q_1 + q_2$ ermöglicht die Zulassung von Funktionen q, die in beschränkten Teilgebieten von G nach unten nicht beschränkt sind. Allerdings ist die Voraussetzung (D4) sehr störend, da sie praktisch die gleichmäßige Elliptizität des Differentialausdrucks T in beschränkten Teilgebieten von G bedeutet. Ist $q_2 \equiv 0$, so ist q in jedem beschränkten Teilgebiet von G nach unten beschränkt; dafür fallen die Voraussetzungen (D3) und (D4) weg, und es ist zulässig, daß T auf dem Rand von G degeneriert, wenn nur (C) erfüllt ist.

Für das Beispiel der Einleitung kann man $q_2 \equiv 0$ wählen, falls $V(r)$ nach unten beschränkt ist. Setzt man dann

$$q^* = \max\{1, 1 - \inf V(r)\},$$

und verwendet man

$$\sigma(x) = (\mu_1 + \mu_2)^{-\frac{1}{2}} |x_{(1)} - x_{(2)}|,$$

so erhält man

$$q^{**}(t) = V\big((\mu_1 + \mu_2)^{\frac{1}{2}} t\big) + q^*,$$

und aus (D2) wird

$$\limsup_{t \to 0+} (\log t^{-1})^{-1} \int_t^1 [q^* + V(s)]^{\frac{1}{2}}\, ds > (\mu_1 + \mu_2)^{\frac{1}{2}}.$$

Ist dies erfüllt, so ist nach dem Satz der Operator T_0 des Beispiels wesentlich selbstadjungiert.

Einige weitere Beispiele sollen zeigen, daß die Bedingung (D2) nicht wesentlich abgeschwächt werden kann. Betrachtet man etwa den Operator

$$T = -\Delta + \beta |x|^{-2}$$

in $G = \{x \mid x \in R^m, x \neq 0\}$, so erhält man mit $\sigma(x) = |x|$ aus (D2) die Bedingung $\beta > 1$. Andererseits kann man durch Separation der Variablen alle selbstadjungierten Fortsetzungen von T_0 explizit berechnen. Es zeigt sich, daß T_0 dann und nur dann wesentlich selbstadjungiert ist, wenn $\beta + (\frac{1}{2}m - 1)^2 \geqq 1$ ausfällt. Für $m = 2$ ist also $\beta \geqq 1$ notwendig und hinreichend, d. h. (D2) ist nahezu bestmöglich. Für beliebiges $m \geqq 2$ ist der Operator

$$T = -\Delta + \frac{\beta}{x_1^2 + x_2^2}$$

im Gebiet $G = \{x \mid x \in R^m, x_1^2 + x_2^2 > 0\}$ ein geeignetes Beispiel; auch hier verlangt (D2), daß $\beta > 1$ sein muß, und $\beta \geqq 1$ ist notwendig und hinreichend für die wesentliche Selbstadjungiertheit von T_0.

2. Der adjungierte Operator T_0^*.

Der Operator T_0 ist symmetrisch; daher gilt $T_0 \subset T_0^{**} \subset T_0^*$. Nach Definition ist T_0 genau dann wesentlich selbstadjungiert, wenn T_0^{**} selbstadjungiert, d. h. wenn $T_0^{**} = T_0^*$ ist. Notwendig und hinreichend hierfür ist also die Beziehung $T_0^* \subset T_0^{**}$, d. h. die Symmetrie von T_0^*; dies ist aber gleichbedeutend damit, daß die quadratische Form $(u, T_0^* u)$ für jedes $u \in D(T_0^*)$ reell ist. Hierbei ist zu beachten, daß $D(T_0^*)$ dicht in H, und daß H ein komplexer Hilbertraum ist.

Zum Beweis des Satzes bleibt also zu zeigen: *Unter den Voraussetzungen* (A, B, C, D) *ist die quadratische Form* $(u, T_0^* u)$ *in* $D(T_0^*)$ *reell.*

Zum Beweis braucht man eine genaue Beschreibung des Operators T_0^*. Für Funktionen $u \in L_{2,\mathrm{loc}}(G)$ seien $\partial_j u$ und $\partial_j \partial_k u$ die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung im Sinne der Distributionstheorie. Es sei $H_{2,\mathrm{loc}}$ der lineare Raum aller $u \in L_{2,\mathrm{loc}}(G)$ mit $\partial_j u \in L_{2,\mathrm{loc}}(G)$ und $\partial_j \partial_k u \in L_{2,\mathrm{loc}}(G)$ für $j, k = 1, 2, \ldots m$. Für $u \in H_{2,\mathrm{loc}}$ und $q \in Q_{\alpha,\mathrm{loc}}(G)$ gilt $qu \in L_{2,\mathrm{loc}}(G)$ nach Lemma 1 in [1]. Interpretiert man also die Ableitungen ∂_j in T im obigen Sinne, so ist unter den Voraussetzungen (A) und $q \in Q_{\alpha,\mathrm{loc}}(G)$ die Funktion Tu für alle $u \in H_{2,\mathrm{loc}}$ erklärt und liegt in $L_{2,\mathrm{loc}}(G)$. Die gewünschte Beschreibung von T_0^* ist in dem folgenden Satz enthalten (vgl. [1, Lemma 4]): *Unter den Voraussetzungen* (A) *und* $q \in Q_{\alpha,\mathrm{loc}}(G)$ *ist*

$$D(T_0^*) = \{u \mid u \in H \cap H_{2,\mathrm{loc}},\ Tu \in H\}$$

und

$$T_0^* u = Tu \qquad \text{für} \qquad u \in D(T_0^*)\,.$$

Der Beweis kann nach dem Muster der Beweise von Lemma 3 und Lemma 4 in [1] geführt werden, wenn man beachtet, daß zu jedem kompakten Teilgebiet K von G eine Fortsetzung der Koeffizienten von T in K auf den ganzen Raum R^m existiert, die in K mit den gegebenen Koeffizienten übereinstimmt und in R^m den Voraussetzungen (A) und $q \in Q_{\alpha,\mathrm{loc}}(R^m)$ genügt.

3. Beweis des Satzes.

Es ist zu zeigen, daß für $u \in D(T_0^*)$ die quadratische Form

$$(u, T_0^* u) = \int_G u\overline{Tu}\, dx$$

reell ist. Wäre eine partielle Integration möglich, und alle Randglieder gleich Null, so erhielte man

$$\int_G \{P(u) + q|u|^2\}\, dx\,,$$

worin

$$P(u) = \sum_{j,k=1}^{m} a_{jk} [(i\partial_j + b_j)u]\, \overline{[i\partial_k + b_k)u]}$$

gesetzt ist. Die Idee des folgenden Beweises besteht darin, den Ausdruck $(u, T_0^* u)$ als Grenzwert von Integralen der Form

$$\int \varphi_n^2 \{P(u) + q|u|^2\}\, dx$$

darzustellen, worin die Funktionen φ_n reell sind, in G kompakten Träger haben und für $n \to \infty$ gegen 1 streben. Das Integrationsgebiet G ist hier und bei den folgenden Integralen weggelassen.

Es sei $\varphi(t)$ eine für $t \geqq 0$ stetige Funktion, $0 \leqq \varphi(t) \leqq 1$, $\varphi(t) \equiv 0$ für $t \geqq r$ und $\varphi'(t)$ stückweise stetig. Die Funktion $f(x) = \varphi(\varrho(x))$ hat dann wegen (B) die folgenden Eigenschaften:

(I)
- (1) $0 \leqq f(x) \leqq 1, f(x) \equiv 0$ für $|x| \geqq R$,
- (2) $f(x)$ genügt einer gleichmäßigen Lipschitzbedingung in jedem kompakten Teilgebiet von G,
- (3) $\sum_{j,k=1}^{m} a_{jk} \partial_j f \partial_k f \leqq [\varphi'(\varrho)]^2 \leqq C_1$ fast überall.

Darin ist R so groß zu wählen, daß $\varrho(x) \geqq r$ ist für $|x| \geqq R$, und $C_1 = \max [\varphi'(t)]^2$. Aus (D2) folgt die Existenz einer Zahl β mit $0 < \beta < 1$ derart, daß

$$\limsup_{t \to 0+} (\log t^{-1})^{-1} \int_t^1 [\beta q^{**}(\tau)]^{\frac{1}{2}} \, d\tau > 1$$

ist. Zu jeder Zahl $s \in (0,1)$ kann man daher eine Zahl $t_0 = t_0(s) < s$ finden, mit der

$$\int_{t_0}^{s} [\beta q^{**}(\tau)]^{\frac{1}{2}} \, d\tau > \log t_0^{-1}$$

gilt. Nun definiert man

$$\psi_s(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geqq s \,, \\ \exp\{-\int_t^s [\beta q^{**}(\tau)]^{\frac{1}{2}} \, d\tau\} & \text{für } t_0 \leqq t \leqq s \,, \\ \psi_s(t_0) + t - t_0 & \text{für } t_0 - \psi_s(t_0) \leqq t < t_0 \,, \\ 0 & \text{für } 0 \leqq t < t_0 - \psi_s(t_0) \,, \end{cases}$$

wobei wegen der obigen Ungleichung die Zahl $t_1(s) = t_0 - \psi_s(t_0)$ positiv ist. $\psi_s(t)$ ist stetig mit stückweise stetiger Ableitung, und es gilt

$$[\psi_s'(t)]^2 \leqq \beta q^{**}(t) [\psi_s(t)]^2 + 1 \,.$$

Setzt man nun $g_s(x) = \psi_s(\sigma(x))$, so hat diese Funktion infolge der Voraussetzung (C) die Eigenschaften:

$$\text{(II)} \begin{cases} (1)\ 0 \leqq g_s(x) \leqq 1, \ g_s(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \sigma(x) \leqq t_1(s) \,, \\ 1, & \text{falls } \sigma(x) \geqq s \,, \end{cases} \\ (2)\ g_s(x) \text{ genügt einer gleichmäßigen Lipschitzbedingung in jedem} \\ \quad\ \text{kompakten Teilgebiet von } G, \\ (3)\ \sum_{j,k=1}^{m} a_{jk} \partial_j g_s \partial_k g_s \leqq \beta q^{**}(\sigma) g_s^2 + 1 \\ \quad\ \text{für fast alle } x \in G \,. \end{cases}$$

Aus (I) und (II) liest man ab, daß für jedes $s < 1$ die Funktion $f(x) g_s(x)$ einen in $G \cap \{|x| \leqq R\}$ liegenden kompakten Träger hat, einer gleichmäßigen Lipschitzbedingung genügt und für $s \to 0$ gegen $f(x)$ strebt. Durch partielle Integration erhält man

$$\text{(III)} \quad \begin{aligned} \int f^2 g_s^2 u \overline{Tu} \, dx &= \int f^2 g_s^2 \{P(u) + q|u|^2\} \, dx + \\ &\quad + 2i \int f g_s u \sum_{j,k=1}^{m} a_{jk} [f \partial_j g_s + g_s \partial_j f] \overline{[(i\partial_k + b_k) u]} \, dx \,. \end{aligned}$$

Es soll nun zunächst gezeigt werden, daß man hierin g_s durch 1 ersetzen kann. Dazu braucht man Abschätzungen der Summanden in (III). Mit Hilfe der Ungleichung von Cauchy für positiv definite quadratische Formen erhält man unter Verwendung von (D1) und (II,3) mit beliebigem $\varepsilon > 0$ die Ungleichung

$$\begin{aligned}
&\left| 2i \int f^2 g_s u \sum_{j,k=1}^{m} a_{jk} \partial_j g_s \overline{[(i\partial_k + b_k)u]}\, dx \right| \\
&\quad \leqq \varepsilon \int f^2 g_s^2 P(u)\, dx + \varepsilon^{-1} \int f^2 |u|^2 \sum_{j,k=1}^{m} a_{jk} \partial_j g_s \partial_k g_s\, dx \\
&\quad \leqq \int f^2 g_s^2 \{\varepsilon P(u) + \varepsilon^{-1} \beta q^{**} |u|^2\}\, dx + \varepsilon^{-1} \int f^2 |u|^2\, dx \\
&\quad \leqq \int f^2 g_s^2 \{\varepsilon P(u) + \varepsilon^{-1} \beta (q_1 + q^*) |u|^2\}\, dx + \varepsilon^{-1} \int |u|^2\, dx\,,
\end{aligned}$$

und ebenso mit Hilfe von (I,3) und mit beliebigem $\eta > 0$

$$\begin{aligned}
&\left| 2i \int f g_s^2 u \sum_{j,k=1}^{m} a_{jk} \partial_j f \overline{[(i\partial_k + b_k)u]}\, dx \right| \\
&\quad \leqq \eta \int f^2 g_s^2 P(u)\, dx + \eta^{-1} \int g_s^2 |u|^2 \sum_{j,k=1}^{m} a_{jk} \partial_j f\, \partial_k f\, dx \\
&\quad \leqq \eta \int f^2 g_s^2 P(u)\, dx + \eta^{-1} C_1 \int |u|^2\, dx\,.
\end{aligned}$$

Ferner wird eine Ungleichung von Ikebe und Kato benötigt [1, Lemma 2 und der Beweis von Lemma 5]:

$$\begin{aligned}
&\int f^2 g_s^2 |q_2| |u|^2\, dx \\
&\leqq C_2 \lambda^{\frac{1}{2}\alpha} \int [M_{q_2}]^{\frac{1}{2}} \left\{ f^2 g_s^2 \sum_{j=1}^{m} |(i\partial_j + b_j)u|^2 + \sum_{j=1}^{m} |\partial_j (f g_s)|^2 |u|^2 + \lambda^{-2} f^2 g_s^2 |u|^2 \right\} dx
\end{aligned}$$

gültig für jedes $\lambda \in (0,1]$ mit einer nur von α und m abhängigen Zahl C_2. Mit Hilfe von (D3), (D4), (I,3) und (II,3) erhält man daraus

$$\begin{aligned}
&\int f^2 g_s^2 |q_2| |u|^2\, dx \\
&\qquad \leqq C_2 \lambda^{\frac{1}{2}\alpha} \int f^2 g_s^2 \{c P(u) + \lambda^{-2} m^* |u|^2\}\, dx + \\
\text{(IV)} &\qquad + 2c C_2 \lambda^{\frac{1}{2}\alpha} \int |u|^2 \left\{ f^2 \sum_{j,k=1}^{m} a_{jk} \partial_j g_s \partial_k g_s + g_s^2 \sum_{j,k=1}^{m} a_{jk} \partial_j f \partial_k f \right\} dx \\
&\qquad \leqq c C_2 \lambda^{\frac{1}{2}\alpha} \int f^2 g_s^2 \{P(u) + 2\beta (q_1 + q^*) |u|^2\}\, dx + \\
&\qquad + C_2 \lambda^{\frac{1}{2}\alpha} \int |u|^2 \{\lambda^{-2} m^* f^2 + 2c + 2c C_1\}\, dx\,.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Abschätzungen folgt aus (III)

$$\int f^2 g_s^{\,2}\{P(u)+(q_1+q^*)|u|^2\}\,dx$$
$$\leqq \int f^2 g_s^{\,2}\{|u||Tu|+q^*|u|^2+(\varepsilon+\eta+cC_2\lambda^{\frac{1}{2}\alpha})P(u)+$$
$$+(\varepsilon^{-1}\beta+2cC_2\lambda^{\frac{1}{2}\alpha}\beta)(q_1+q^*)|u|^2\}\,dx+$$
$$+\int |u|^2\{\varepsilon^{-1}+\eta^{-1}C_1+C_2\lambda^{\frac{1}{2}\alpha}(\lambda^{-2}m^*f^2+2c+2cC_1)\}\,dx\,.$$

Setzt man nun

$$\varepsilon = \beta^{\frac{1}{2}},\quad \eta = \tfrac{1}{4}(1-\beta^{\frac{1}{2}}),\quad \lambda = \min\left\{1, \left(\frac{\eta}{cC_2}\right)^{2/\alpha}\right\},$$

so wird daraus

$$\int f^2 g_s^{\,2}\{P(u)+(q_1+q^*)|u|^2\}\,dx$$
$$\leqq \frac{1}{2\eta}\int \{\tfrac{1}{2}|Tu|^2+(C_3+q^*f^2+C_4m^*f^2)|u|^2\}\,dx \leqq C_5$$

nach Definition von $D(T_0^{\,*})$ mit einer von s unabhängigen Zahl C_5. Dabei wurde benutzt, daß die Funktionen m^*f^2 und q^*f^2 wegen (I,1) beschränkt sind. Aus (II,1) folgt nun

$$\int\limits_{\sigma(x)\geqq s} f^2\{P(u)+(q_1+q^*)|u|^2\}dx \leqq C_5$$

und durch Grenzübergang $s \to 0$ schließlich

$$\int f^2\{P(u)+(q_1+q^*)|u|^2\}\,dx \leqq C_5\,.$$

Aus (IV) erhält man die Existenz des Integrals

$$\int f^2|q_2||u|^2\,dx\,.$$

Nun kann man in (III) den Grenzübergang $s \to 0$ durchführen. Dabei benutzt man die Abschätzung

$$\left|\int f^2 g_s u \sum_{j,k=1}^{m} a_{jk}\partial_j g_s\,\overline{[(i\partial_k+b_k)u]}\,dx\right|^2$$
$$\leqq \left\{\int f^2 g_s|u|\left[P(u)\sum_{j,k=1}^{m} a_{jk}\partial_j g_s\partial_k g_s\right]^{\frac{1}{2}}dx\right\}^2$$
$$\leqq \int f^2 g_s^{\,2}P(u)\,dx \int\limits_{t_1\leqq\sigma(x)\leqq s} f^2|u|^2(\beta q^{**}g_s^{\,2}+1)\,dx$$
$$\leqq C_5 \int\limits_{\sigma(x)\leqq s} f^2|u|^2(q_1+q^*+1)\,dx \to 0 \quad \text{für } s\to 0\,.$$

Also geht (III) über in

$$\text{(V)} \int f^2 u \overline{Tu}\, dx = \int f^2 \{P(u) + q|u|^2\}\, dx + 2i \int f u \sum_{j,k=1}^{m} a_{jk} \partial_j f \overline{[(i\partial_k + b_k)u]}\, dx .$$

Hierin wird nun f durch eine Schar $f_r(x) = \vartheta(\varrho(x) - r)$ ersetzt, worin $\vartheta \in C^1(-\infty, \infty)$ ist mit $0 \leqq \vartheta(t) \leqq 1$ und

$$\vartheta(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \leqq 0 , \\ 0 & \text{für } t \geqq 1 . \end{cases}$$

Daher hat f_r die Eigenschaften

$$\text{(VI)} \begin{cases} (1)\ 0 \leqq f_r(x) \leqq 1,\ f_r(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } \varrho(x) \leqq r , \\ 0 & \text{für } \varrho(x) \geqq r+1 , \end{cases} \\ (2)\ f_r \text{ genügt einer gleichmäßigen Lipschitzbedingung in jedem} \\ \quad\ \text{kompakten Teilgebiet von } G, \\ (3)\ \sum_{j,k=1}^{m} a_{jk} \partial_j f_r \partial_k f_r \leqq [\vartheta'(\varrho - r)]^2 \leqq C_6 , \end{cases}$$

worin C_6 von r nicht abhängt. Damit folgt aus (V) durch nunmehr geläufige Abschätzungen

$$\int f_r^2 P(u)\, dx$$
$$\leqq \int f_r^2 \{\tfrac{1}{2}|u|^2 + \tfrac{1}{2}|Tu|^2 + (|q_2| - q_1)|u|^2 + \tfrac{1}{4}P(u)\}\, dx + 4C_6 \int |u|^2\, dx .$$

Nun benutzt man $-q_1 \leqq q^*(\varrho)$ und die aus (IV) durch den Grenzübergang $s \to 0$ folgende Ungleichung

(VII)

$$\int f_r^2 |q_2| |u|^2\, dx \leqq C_2 \lambda^{\alpha/2} \int f_r^2 \{cP(u) + \lambda^{-2} m^* |u|^2\}\, dx + 2cC_2 C_6 \lambda^{\alpha/2} \int |u|^2\, dx .$$

Setzt man dies ein und wählt $\lambda = \min\{1, (4cC_2)^{-2/\alpha}\}$, so folgt mit (VI,1)

$$\int_{\varrho(x) \leqq r} P(u)\, dx \leqq \int f_r^2 P(u)\, dx$$
$$\leqq 4 \int f_r^2 \{\tfrac{1}{2}|Tu|^2 + \big(q^*(\varrho) + C_7 m^*(\varrho)\big)|u|^2\}\, dx + C_8 \int |u|^2\, dx$$
$$\leqq C_9 \int_{\varrho(x) \leqq r+1} [q^*(\varrho) + m^*(\varrho)]|u|^2\, dx + C_{10} ,$$

worin C_9 und C_{10} von r unabhängig sind. Setzt man $p^*(t) = q^*(t) + m^*(t)$ und

$$F(r) = \int_{\varrho(x)\leqq r} P(u)\,dx, \qquad G(r) = C_9 \int_{\varrho(x)\leqq r+1} p^*(\varrho)|u|^2\,dx\,,$$

so sind diese Funktionen monoton nicht abnehmend, genügen der Ungleichung $F(r)-G(r)\leqq C_{10}$ für $r\geqq 0$, und p^* ist stetig nach (D1) und (D3), monoton nicht abnehmend nach (D5), und es ist $\int_0^\infty [p^*(t)]^{-\frac{1}{2}}dt=\infty$. Daher gilt

$$\begin{aligned}\int_0^r \frac{dF(t)-dG(t)}{p^*(t+1)} &= \int_{0<\varrho(x)\leqq r} \frac{P(u)}{p^*(\varrho+1)}dx - C_9 \int_{1<\varrho(x)\leqq r+1} |u|^2 dx \\ &= \frac{F(r)-G(r)}{p^*(r+1)} - \frac{F(0)-G(0)}{p^*(1)} - \int_0^r [F(t)-G(t)]\,d\frac{1}{p^*(t+1)} \\ &\leqq \frac{C_{10}}{p^*(r+1)} - \frac{F(0)-G(0)}{p^*(1)} - C_{10}\int_0^r d\frac{1}{p^*(t+1)} \\ &= \frac{C_{10}-F(0)+G(0)}{p^*(1)} = C_{11}\,,\end{aligned}$$

und folglich ist

$$\int \frac{P(u)}{p^*(\varrho+1)}dx \leqq C_9 \int |u|^2\,dx + C_{11} = C_{12}\,.$$

Damit gelingt nun in (V) der Grenzübergang $f\to 1$. Man setzt $f(x)=f_r^*(x)=\zeta_r(\varrho(x))$ mit

$$\zeta_r(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0\leqq t\leqq r\,, \\ \max\{0,\, 1-\int_r^t [p^*(\tau+1)]^{-\frac{1}{2}}\,d\tau\} & \text{für } t>r\,. \end{cases}$$

Dann ist $0\leqq f_r^*(x)\leqq 1$, $f_r^*(x)=1$ für $\varrho(x)\leqq r$ und $f_r^*(x)\equiv 0$ für große Werte von $|x|$. Ferner genügt f_r^* einer gleichmäßigen Lipschitzbedingung in jedem kompakten Teilgebiet von G und der Ungleichung

$$\sum_{j,k=1}^m a_{jk}\partial_j f_r^*\,\partial_k f_r^* \leqq \frac{1}{p^*(\varrho+1)}\,.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}&\left|\int f_r^* u \sum_{j,k=1}^m a_{jk}\partial_j f_r^* \overline{[(i\partial_k+b_k)u]}\,dx\right|^2 \\ &\leqq \int (f_r^*)^2 \frac{P(u)}{p^*(\varrho+1)}dx \int p^*(\varrho+1)|u|^2 \sum_{j,k=1}^m a_{jk}\partial_j f_r^*\,\partial_k f_r^*\,dx \\ &\leqq C_{12} \int_{\varrho(x)\geqq r} |u|^2\,dx \to 0 \quad \text{für } r\to\infty\,,\end{aligned}$$

und damit aus (V)

$$(\mathrm{VIII})\qquad \begin{aligned}(u,T_0{}^*u) &= \lim_{r\to\infty}\int (f_r{}^*)^2 u\overline{Tu}\,dx\\ &= \lim_{r\to\infty}\int (f_r{}^*)^2\{P(u)+q|u|^2\}\,dx\,.\end{aligned}$$

Also ist $(u,T_0{}^*u)$ reell, und der Satz ist bewiesen.

Unter den Voraussetzungen des Zusatzes existiert das Integral $\int P(u)dx$, und daher wegen (VII) auch $\int q_2|u|^2dx$ und es gilt

$$\int q_2|u|^2\,dx \geqq -\int P(u)\,dx - C_{13}\int |u|^2\,dx\,.$$

Da $q_1 \geqq -q^*$ ist, folgt nun aus (VIII) die Existenz des Integrals $\int q_1|u|^2dx$ und für $r \to \infty$ die Beziehung

$$(u,T_0{}^*u) = \int \{P(u)+q|u|^2\}\,dx \geqq -(q^*+C_{13})(u,u)\,,$$

was zu beweisen war.

LITERATUR

1. T. Ikebe and T. Kato, *Uniqueness of the self-adjoint extension of singular elliptic differential operators*, Archive Rat. Mech. Analysis 9 (1962), 77–92.
2. T. Kato, *Fundamental properties of Hamiltonian operators of Schrödinger type*, Trans. Amer. Math. Soc. 70 (1951), 195–211.
3. H. Rademacher, *Über partielle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variabeln und über die Transformation der Doppelintegrale*, Math. Ann. 79 (1919), 340–359.
4. F. Stummel, *Singuläre elliptische Differentialoperatoren in Hilbertschen Räumen*, Math. Ann. 132 (1956), 150–176.
5. E. Wienholtz, *Halbbeschränkte partielle Differentialoperatoren zweiter Ordnung vom elliptischen Typus*, Math. Ann. 135 (1958), 50–80.

UNIVERSITÄT HEIDELBERG, DEUTSCHLAND