MATH. SCAND. 15 (1964) 69–78

EIN APPROXIMATIONSLEMMA IN KOMPLEXEN BANACHRÄUMEN MIT POSITIVEM KEGEL

ULRICH KRENGEL

Wir leiten in gewissen komplexen Banachräumen mit positivem Kegel eine Aussage ab, die in manchen Rechnungen die in Vektorverbänden gültige Gleichung $f=f^+-f^-$ zu ersetzen vermag. Für viele Räume, etwa die Räume $\mathfrak{L}_p$, $1 \leqq p \leqq \infty$, ist sie leicht nachzuweisen, der komplizierte Beweis rechtfertigt sich erst, wenn man das Lemma benutzt, um Operatoren durch solche mit »endlich vielen Richtungen« zu approximieren. Auf diesen Fall wenden wir das Lemma an.

Wir betrachten komplexe Banachräume $\mathfrak{X}$ mit folgenden Eigenschaften:

(E 1): $\mathfrak{X}$ enthält einen reellen Banachverband $\mathfrak{H} = \mathrm{Re}(\mathfrak{X})$, derart dass jedes Element $f \in \mathfrak{X}$ eindeutig darstellbar ist als Summe $f = \mathrm{Re}(f) + i\,\mathrm{Im}(f)$ mit $\mathrm{Re}(f)$, $\mathrm{Im}(f) \in \mathfrak{H}$.

(E 2): Jedem $f \in \mathfrak{X}$ ist ein Element

$$|f| = \sup_{|a|=1} \mathrm{Re}(af) \in \mathfrak{X}^+ = \{h \in \mathfrak{X}:\ h \geqq 0\}$$

zugeordnet.

(E 3): Die Abbildungen $f \to |f|$ und $f \to \mathrm{Re}(f)$ sind normstetig.

Ziel dieser Arbeit ist das

Approximationslemma. *Ist in einem komplexen Banachraum* $\mathfrak{X}$ *mit den Eigenschaften* (E 1)–(E 3) $\mathfrak{H} = \mathrm{Re}(\mathfrak{X})$ *ein bedingt* σ*-vollständiger Banachverband, d. h. besitzen ordnungsbeschränkte Folgen* $f_n \in \mathfrak{H}$ *stets eine kleinste obere Grenze* $\sup_n f_n$, *so hat* $\mathfrak{X}$ *die Eigenschaft*

(E 4): $\mathfrak{T}\mathfrak{r}(\mathfrak{X}) = \{f \in \mathfrak{X}:\ f = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i,\ a_i \text{ komplex},\ f_i \in \mathfrak{X}^+ \text{ und } f_i \wedge f_k = 0,\ i \neq k\}$ *ist normdicht in* $\mathfrak{X}$.

Beweis. Sind die Elemente $f \in \mathfrak{X}$ Funktionen auf einem Punktraum, so gibt es gar keine Schwierigkeiten. Wir wollen einen sich dann an-

Eingegangen am 19. März 1964.

bietenden Beweis in einer algebraischen Form nachvollziehen. Viele Einzelschritte lassen sich mit kleinen Skizzen verdeutlichen.

1) Wesentliches Hilfsmittel sind die folgenden den Elementen $b \in \mathfrak{X}^+ = \mathfrak{H}^+$ zugeordneten Projektionen P_b. Für $g \in \mathfrak{H}^+$ sei

$$gP_b = \sup_{1 \leqq n < \infty} (nb \wedge g) . \tag{1}$$

P_b ist dadurch linear auf $\mathfrak{H}^+$ erklärt, und auf $\mathfrak{H}$ erhalten wir P_b durch lineare Fortsetzung. Der stetige Operator P_b ist schon von Kakutani [1] u. a. verwendet worden, vgl. auch Krengel [3, Lemma 6.1]. Wir benötigen insbesondere folgende aus der Definition sich ergebende Eigenschaften:

$$\mathsf{P}_b \text{ ist positiv, das heisst } g\mathsf{P}_b \geqq 0 \text{ für } g \geqq 0 . \tag{2}$$

$$\text{Aus } b_1 \wedge b_2 = 0 \text{ folgt } \mathsf{P}_{b_1} \wedge \mathsf{P}_{b_2} = 0 . \tag{3}$$

$$\text{Aus } 0 \leqq b_1 \leqq b_2 \text{ folgt } \mathsf{P}_{b_1} \leqq \mathsf{P}_{b_2} . \tag{4}$$

(5) Aus $0 \leqq b_1 \leqq b_2 \leqq \ldots \leqq b$ und $b = \sup_j b_j$ folgt $\mathsf{P}_b = \sup_j \mathsf{P}_{b_j}$.

$$(f \vee g)\mathsf{P}_b = f\mathsf{P}_b \vee g\mathsf{P}_b \text{ für } f, g \in \mathfrak{H} . \tag{6}$$

$$\text{Ist } g = \sup f_k \text{ und } g, f_k \in \mathfrak{H}^+, \text{ so ist } g\mathsf{P}_b = \sup_k (f_k \mathsf{P}_b) . \tag{7}$$

2) K sei der komplexe Einheitskreis und $y \in \mathfrak{X}$ fest. Wir haben y durch Elemente $f \in \mathfrak{T}\mathrm{r}(\mathfrak{X})$ zu approximieren. Den offenen Kreisbögen

$$I = \{a \in K\colon\ a = e^{i\alpha},\ \alpha_{I1} < \alpha < \alpha_{I2}\} ,$$

die weniger als die Hälfte von K überdecken, das heisst für die $\alpha_{I2} - \alpha_{I1} < \pi$ ist, ordnen wir mit Hilfe von y Projektionen Q_I auf folgende Weise zu: Ist $\alpha_{I0} = \frac{1}{2}(\alpha_{I1} + \alpha_{I2})$ und $a_I = e^{i\alpha_{I0}}$ der Mittelpunkt von I, so setzen wir $a_{Ik} = e^{i\alpha_{Ik}}$ $(k = 1, 2)$ und

$$c_I = \mathrm{Re}(a_{I1} a_I^{-1}) = \mathrm{Re}(a_{I2} a_I^{-1}) .$$

Die Einschränkung $\alpha_{I2} - \alpha_{I1} < \pi$ besagt gerade $0 < c_I < 1$. Wir können also

$$b_I = \left(\mathrm{Re}(y c_I^{-1} a_I^{-1}) - |y|\right) \vee 0$$

bilden. Mit Q_I bezeichnen wir den stetigen linearen Operator P_{b_I}, bzw. dessen lineare Fortsetzung auf $\mathfrak{X}$.

3) Sind I und J offene Kreisbögen und $I \cap J = 0$, so gilt $b_I \wedge b_J = 0$ und also $\mathsf{Q}_I \wedge \mathsf{Q}_J = 0$. Das zeigen wir so: Wir stellen fest, dass $a_I c_I^{-1}$ der Schnittpunkt der Tangenten in a_{I1} und in a_{I2} an K ist. $I \cap J = 0$ bedeutet, dass die Verbindungsstrecke von $a_I c_I^{-1}$ und $a_J c_J^{-1}$ einen Punkt mit K gemeinsam hat, also auch die von $a_I^{-1} c_I^{-1}$ und $a_J^{-1} c_J^{-1}$: Es gibt eine reelle Zahl λ, $0 < \lambda < 1$, mit

$$|\lambda a_I^{-1} c_I^{-1} + (1-\lambda) a_J^{-1} c_J^{-1}| \leqq 1 .$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(y a_I^{-1} c_I^{-1}) \wedge \mathrm{Re}(y a_J^{-1} c_J^{-1}) &\leqq \lambda \mathrm{Re}(y a_I^{-1} c_I^{-1}) + (1-\lambda)\,\mathrm{Re}(y a_J^{-1} c_J^{-1}) \\ &\leqq \mathrm{Re}\big(y(\lambda a_I^{-1} c_I^{-1} + (1-\lambda) a_J^{-1} c_J^{-1})\big) \leqq |y| .\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\big(\mathrm{Re}(y a_I^{-1} c_I^{-1}) - |y|\big) \wedge \big(\mathrm{Re}(y a_J^{-1} c_J^{-1}) - |y|\big) \leqq 0$$

und also die Behauptung.

4) Für $I \subseteqq J$ gilt $b_I \leqq b_J$ und also $\mathsf{Q}_I \leqq \mathsf{Q}_J$. Das zeigen wir so: $I \subseteqq J$ ist gleichbedeutend mit

$$I^{-1} = \{a^{-1} \colon a \in I\} \subseteqq J^{-1} .$$

Wir können folgern, dass der ausserhalb von K gelegene Teil desjenigen Kegels, der zwischen den Tangenten an K in den Endpunkten von I^{-1} liegt, in dem entsprechenden Kegel für J^{-1} enthalten ist. Es gibt daher eine reelle Zahl λ, $0 \leqq \lambda \leqq 1$, und eine Zahl $a \in K$ mit

$$a_I^{-1} c_I^{-1} = \lambda a + (1-\lambda) a_J^{-1} c_J^{-1} .$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\lambda(\mathrm{Re}(y a_J^{-1} c_J^{-1}) \vee |y|) &\geqq \lambda |y| \vee \lambda |y| , \\ (1-\lambda)\big(\mathrm{Re}(y a_J^{-1} c_J^{-1}) \vee |y|\big) &\geqq (1-\lambda)\,\mathrm{Re}(y a_J^{-1} c_J^{-1}) \vee (1-\lambda)|y| .\end{aligned}$$

Durch Addition erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(y a_J^{-1} c_J^{-1}) \vee |y| &\geqq \big(\lambda |y| + (1-\lambda)\,\mathrm{Re}(y a_J^{-1} c_J^{-1})\big) \vee |y| \\ &\geqq \big(\lambda\,\mathrm{Re}(y a) \pm (1-\lambda)\,\mathrm{Re}(y a_J^{-1} c_J^{-1})\big) \vee |y| \\ &= \big(\mathrm{Re}(y a_I^{-1} c_I^{-1})\big) \vee |y| .\end{aligned}$$

Durch Subtraktion von $|y|$ auf beiden Seiten der Ungleichung ergibt sich $b_I \leqq b_J$.

5) Für $I_1 \subseteqq I_2 \subseteqq \ldots \subseteqq I_n \subseteqq \ldots \subseteqq I$ mit $I = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ gilt $b_I = \sup_j b_{I_j}$ und also $\mathsf{Q}_I = \sup_j \mathsf{Q}_{I_j}$: Aus 4) folgt $b_I \geqq \sup_j b_{I_j}$. Die umgekehrte Ungleichung gilt erst recht, wenn wir sie für verkleinerte I_j nachweisen, und wir können deshalb annehmen, dass die I_j symmetrisch in I liegen, insbesondere also $a_{I_j} = a_I$ ist. Da die I_j das Intervall I ausschöpfen, folgt nun $c_{I_j} \to c_I > 0$ und dann die Behauptung aus der Stetigkeit der Abbildung $f \to \mathrm{Re}(f)$ und der Verbandsoperationen.

6) Nun sollen auch für abgeschlossene Kreisbögen A Projektionen Q_A erklärt werden: Sei

$$A = \{a \in K \colon a = e^{i\alpha}, \alpha_{A1} \leqq \alpha \leqq \alpha_{A2}\} .$$

Wir nehmen wieder $\alpha_{A2} - \alpha_{A1} < \pi$ an. Dann gibt es hinreichend kleine offene Kreisbögen I_j, für die $I_1 \supseteqq I_2 \supseteqq \ldots \supseteqq A$ und $A = \bigcap_{j=1}^{\infty} I_j$ gilt. Wir setzen

$$Q_A = \inf_j Q_{I_j}$$

und zeigen, dass diese Definition unabhängig von der Folge I_j ist: Ist $J_1 \supseteqq J_2 \supseteqq \ldots \supseteqq A$ eine weitere Folge von offenen Kreisbögen mit $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} J_k$, so gibt es zu jedem I_j ein $J_{k_j} \subseteqq I_j$. Daher ist $\inf Q_{J_k} \leqq \inf Q_{I_j}$ und aus Symmetriegründen folgt Gleichheit. $a_A \in K$ sei der Mittelpunkt von A.

7) Q_A und Q_I sind idempotent: Zum Beweis entnehmen wir zuerst der Definition (1) von P_b, dass P_b idempotent ist — also auch Q_I. Es gilt sogar: Für $b \in \mathfrak{X}^+$, $g \in \mathfrak{X}^+$ und $0 \leqq h \leqq gP_b$ ist $hP_b = h$. Denn aus

$$gP_b = gP_bP_b = hP_b + (gP_b - h)P_b \leqq hP_b + gP_b - h$$

folgt $h \leqq hP_b$, und die umgekehrte Ungleichung ergibt sich aus der Definition von P_b. Ist nun Q_A durch die Folge J_k definiert, so ist also für $g \in \mathfrak{X}^+$ stets $gQ_AQ_{J_k} = gQ_A$, da $gQ_A \leqq gQ_{J_k}$ ist. Es folgt $gQ_AQ_A = gQ_A$, und wie oben können wir dies verschärfen zu der Aussage:

Für $g \in \mathfrak{X}^+$ und $0 \leqq h \leqq gQ_A$ ist $hQ_A = h$. (Die Bezeichnung Projektion ist also gerechtfertigt.)

8) Sind A_1 und A_2 abgeschlossen und disjunkt, so liegen sie in disjunkten offenen I_1 und I_2 und nach 3) folgt $Q_{A_1} \wedge Q_{A_2} = 0$. Wir zeigen für offenes I und abgeschlossenes A, dass aus $A \cap I = 0$ ebenfalls $Q_A \wedge Q_I = 0$ folgt: Ist dies nicht richtig, so gibt es ein $g > 0$, für das

$$gQ_A \wedge gQ_I = r > 0$$

ist. Wir suchen eine Folge $I_1 \subseteqq I_2 \subseteqq \ldots \subseteqq I$, die I ausschöpft und für die die Endpunkte von I_i einen positiven Abstand von den Endpunkten von I haben. Auf Grund von 5) ist nun für mindestens ein i

$$gQ_A \wedge gQ_{I_i} = r_i > 0\,.$$

Ist $J_1 \supseteqq J_2 \supseteqq \ldots \supseteqq A$ eine gegen A absteigende Q_A definierende Folge, so können wir alle J_k disjunkt zu I_i annehmen. Aus 3) und der verschärften Aussage in 7) erhalten wir einen Widerspruch zu

$$gQ_{J_k} \wedge gQ_{I_i} \geqq r_i > 0\,.$$

9) Wir zeigen: Ist I ein offener Kreisbogen, so ist

$$|fQ_I| = |f|Q_I \qquad \text{für } f \in \mathfrak{X}\,.$$

Da $\mathfrak{X}^+$ bei Q_I in $\mathfrak{X}^+$ abgebildet wird, ist

$$\mathrm{Re}(gQ_I) = \mathrm{Re}(g)Q_I \tag{8}$$

für $g \in \mathfrak{X}$. Die Gleichung (8) gilt auch mit abgeschlossenem A statt I.

Q_I ist die lineare Fortsetzung einer Projektion P_{b_I}. Die folgenden Suprema sind in Wirklichkeit nur abzählbar, wenn wir sie nur über die $a \in K$ erstrecken, deren Realteil rational ist. Die Suprema ändern sich dabei nicht. Wir wenden (6) und (7) an:

$$\begin{aligned} |f|\mathsf{Q}_I &= \big(\sup_{|a|=1} \mathrm{Re}\,(af)\big)\mathsf{P}_{b_I} \\ &= \big(\sup_{|a|=1}\big(\mathrm{Re}\,(af) \vee \mathrm{Re}\,(-af)\big)\big)\mathsf{P}_{b_I} \\ &= \sup_{|a|=1}\big(\big(\mathrm{Re}\,(af) \vee \mathrm{Re}\,(-af)\big)\mathsf{P}_{b_I}\big) \\ &= \sup_{|a|=1}\big(\mathrm{Re}\,(af)\mathsf{P}_{b_I} \vee \mathrm{Re}\,(-af)\mathsf{P}_{b_I}\big) \\ &= \sup_{|a|=1} |\mathrm{Re}\,(af\mathsf{P}_{b_I})| \;=\; |f\mathsf{Q}_I| \,. \end{aligned}$$

10) Ist A ein abgeschlossener Kreisbogen, so ist ebenfalls

$$|f\mathsf{Q}_A| = |f|\mathsf{Q}_A \qquad \forall f \in \mathfrak{X}:$$

Aus (8) erhalten wir sofort für $a \in K$

$$\mathrm{Re}\,(af\mathsf{Q}_A) = \mathrm{Re}\,(af)\mathsf{Q}_A \leqq |f|\mathsf{Q}_A$$

und damit

$$|f\mathsf{Q}_A| \leqq |f|\mathsf{Q}_A \,.$$

Wir nehmen nun

$$|f|\mathsf{Q}_A - |f\mathsf{Q}_A| = r > 0$$

an. Daraus wollen wir einen Widerspruch herleiten: Aus (E 2) folgt die Ungleichung $|h_1 + h_2| \leqq |h_1| + |h_2|$ und daraus

$$\big||g_1| - |g_2|\big| \leqq |g_1 - g_2| \,.$$

Nun ist, wenn die Folge I_k zur Definition von Q_A dient,

$$\begin{aligned} \big||f\mathsf{Q}_{I_k}| - |f\mathsf{Q}_A|\big| &\leqq |\mathrm{Re}\,(f)^+(\mathsf{Q}_{I_k} - \mathsf{Q}_A)| + |\mathrm{Re}\,(f)^-(\mathsf{Q}_{I_k} - \mathsf{Q}_A)| + \\ &\quad + |\mathrm{Im}\,(f)^+(\mathsf{Q}_{I_k} - \mathsf{Q}_A)| + |\mathrm{Im}\,(f)^-(\mathsf{Q}_{I_k} - \mathsf{Q}_A) \\ &\leqq 4|f|(\mathsf{Q}_{I_k} - \mathsf{Q}_A) \,. \end{aligned}$$

$I_k \supseteqq A$ wird so klein gewählt, dass

$$(9) \qquad \big(r - 4|f|(\mathsf{Q}_{I_k} - \mathsf{Q}_A)\big) \vee 0 > 0$$

ist. Das ist möglich, da $\mathsf{Q}_A = \inf_k \mathsf{Q}_{I_k}$ ist. Aus 9) folgt mit Hilfe von 4)

$$|f|\mathsf{Q}_A - |f\mathsf{Q}_{I_k}| \leqq 0$$

und nun im Widerspruch zu (9)

$$r = |f|\mathsf{Q}_A - |f\mathsf{Q}_A| \leqq 4|f|(\mathsf{Q}_{I_k} - \mathsf{Q}_A) \,.$$

11) Nun können wir die Elemente $f_0 \in \mathfrak{Tr}(\mathfrak{X})$, die y approximieren sollen, leicht konstruieren: Wir teilen K durch eine gerade Anzahl $2n \geqq 4$ von Punkten in gleichlange Kreisbögen und überdecken K mit diesen Kreisbögen, die wir abwechselnd offen und abgeschlossen wählen, genau einmal. Wir nennen sie $I_1, \ldots I_n, A_{n+1}, \ldots, A_{2n}$. Nun bilden wir

$$f_0 = \sum_{k=1}^{n} a_{I_k} |y| \mathsf{Q}_{I_k} + \sum_{k=n+1}^{2n} a_{A_k} |y| \mathsf{Q}_{A_k} .$$

Der Kürze halber führen wir auch die Schreibweise

$$f_0 = \sum_{k=1}^{2n} a_k |y| \mathsf{Q}_k$$

ein. Wir werden zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ durch Wahl eines genügend grossen n

$$\|y - f_0\| < \varepsilon$$

gemacht werden kann. Aus 3) und 8) folgt sofort $|y|\mathsf{Q}_i \wedge |y|\mathsf{Q}_k = 0$ für $i \neq k$ und also $f_0 \in \mathfrak{Tr}(\mathfrak{X})$.

12) Um die Abschätzung durchzuführen, benötigen wir erst noch die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{2n} f \mathsf{Q}_k = f \qquad \text{für alle } f \in \mathfrak{X} \text{ mit } |f| \leqq |y| . \tag{10}$$

Zu ihrem Beweis gehen wir von den abgeschlossenen Bögen A_k zu offenen $I_{kj} \supseteqq A_k$ über, für die $\mathsf{Q}_{A_k} = \inf_j \mathsf{Q}_{I_{kj}}$ ist und von denen wir annehmen, dass $a_{I_{kj}} = a_k$ ist. Diese I_{kj} seien für festes k monoton fallend und für festes j gleichlang. Für $k = 1, \ldots, n$ setzen wir ausserdem $I_{kj} = I_k$. Durch Wahl der I_{kj} haben wir erreicht, dass

$$\sup_k \operatorname{Re}(y a_{I_{kj}}^{-1} c_{I_{kj}}^{-1}) > |y| d_j$$

für ein $d_j > 1$ ist. Das folgt aus (E2) zusammen mit der Tatsache, dass sich benachbarte I_{kj} für festes j gleichmässig weit überlappen. Setzen wir $b_j = \sup_k b_{I_{kj}}$ so ist also

$$b_j = \sup_k \big((\operatorname{Re}(y a_{I_{kj}}^{-1} c_{I_{kj}}^{-1}) - |y|) \vee 0 \big) > (d_j - 1)|y| .$$

Für $0 \leqq f \leqq |y|$ ist

$$\sum_{k=1}^{2n} f \mathsf{Q}_{I_{kj}} \geqq \sup_k f \mathsf{Q}_{I_{kj}} = f \mathsf{P}_{b_j} = f .$$

Da die I_{kj} für festes k fallend sind, gilt auch

$$\sum_{k=1}^{2n} f \mathsf{Q}_{I_{kj_k}} \geqq f ,$$

und lassen wir hierin sukzessive für $k=n+1,\ldots,2n$ den Index $j_k \to \infty$ gehen, so erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{2n} f\mathsf{Q}_k \geqq f.$$

Andererseits ist $f\mathsf{Q}_i \wedge f\mathsf{Q}_k = 0$ für $i \neq k$ und $f\mathsf{Q}_k \leqq f$. Daraus folgt die andere Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{2n} f\mathsf{Q}_k = \sup_k f\mathsf{Q}_k \leqq f.$$

Durch lineare Fortsetzung erhalten wir (10).

13) Das ermöglicht die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{2n} |y|a_k\mathsf{Q}_k - y\right| &= \left|\sum_{k=1}^{2n} |y|a_k\mathsf{Q}_k - \sum_{k=1}^{2n} y\mathsf{Q}_k\right| \\ &\leqq \sum_{k=1}^{2n} \big||y|a_k\mathsf{Q}_k - y\mathsf{Q}_k\big|.\end{aligned}$$

Das Lemma wird bewiesen sein, wenn wir zeigen, dass für jedes $\gamma > 0$

$$\big||y|a_k\mathsf{Q}_k - y\mathsf{Q}_k\big| \leqq \gamma|y|\mathsf{Q}_k \tag{11}$$

gilt, sofern nur $n \geqq N$ für ein N ist, das nur von γ und nicht von k oder y abhängt. Wegen

$$\big||y|a_k\mathsf{Q}_k - y\mathsf{Q}_k\big| = \big||y|a_k\mathsf{Q}_k\mathsf{Q}_k - y\mathsf{Q}_k\mathsf{Q}_k\big| = \big||y|a_k\mathsf{Q}_k - y\mathsf{Q}_k\big|\mathsf{Q}_k$$

folgt (11) bereits, wenn wir

$$\big||y|a_k\mathsf{Q}_k - y\mathsf{Q}_k\big| \leqq \gamma|y| \tag{12}$$

zeigen. Ist $\mathsf{Q}_k = \mathsf{Q}_{A_k}$, I offen und $I \supseteqq A_k$, so ist die linke Seite von (12) gleich

$$\big||y|a_k - y\big|\mathsf{Q}_k \leqq \big||y|a_k - y\big|\mathsf{Q}_I = \big||y|a_k\mathsf{Q}_I - y\mathsf{Q}_I\big|. \tag{13}$$

Wir können uns daher auf den Fall beschränken, dass Q_k ein Q_I ist, wenn wir zeigen, dass für hinreichend kurzes I die rechte Seite in (13) kleiner oder gleich $\gamma|y|$ ist.

14) Weiter können wir annehmen, dass $a_I = 1$ ist: Ist $a_I \neq 1$, so bilden wir $J = \{a\colon aa_I \in I\}$. Mittelpunkt von J ist dann 1. Nennt man nun $\mathsf{Q}_I(z)$ die Projektion, die entsteht, wenn allen Definitionen nicht y sondern z zugrundegelegt wird, so ist

$$\big||y|a_I\mathsf{Q}_I - y\mathsf{Q}_I\big| = \big||y|a_I\mathsf{Q}_J(ya_I^{-1}) - y\mathsf{Q}_J(ya_I^{-1})\big|.$$

Kann man nun unabhängig von z zeigen, dass für hinreichend kurzes J

$$\big||z|\mathrm{Q}_J(z) - z\,\mathrm{Q}_J(z)\big| \leqq \gamma|z|$$

ist, so folgt daraus speziell für $z = a_I^{-1}y$ die Relation

$$\big||y|a_I\mathrm{Q}_I - y\,\mathrm{Q}_I\big| \leqq \gamma|y| \,.$$

15) Wir nehmen also $\mathrm{Q}_k = \mathrm{Q}_I$ und $a_I = 1$ an. Zuerst zeigen wir

$$\mathrm{Re}\,(yc_I^{-1})\mathrm{Q}_I \geqq |y|\mathrm{Q}_I \geqq \mathrm{Re}\,(y)\mathrm{Q}_I \,. \tag{14}$$

Die letzte Ungleichung ist trivial. Setzen wir $\mathrm{Re}\,(yc_I^{-1}) = r_I$ und nehmen an, die erste Ungleichung sei falsch, so ist

$$(|y| - (|y| \wedge r_I))\mathrm{Q}_I > 0 \,.$$

Nach der Definition von Q_I ist dann insbesondere

$$\big((r_I - |y|) \vee 0\big) \wedge \big(|y| - (|y| \wedge r_I)\big) > 0 \,. \tag{15}$$

Sei $v = r_I - |y|$. Dann ist

$$v^- = (|y| - r_I) \vee 0 = -\big((r_I - |y|) \wedge 0\big) = -\big((r_I \wedge |y|) - |y|\big) \,.$$

Die Gleichung (15) bedeutet demnach gerade $v^+ \wedge v^- > 0$, im Widerspruch zu $v^+ \wedge v^- = 0$.

16) Zu $\gamma = 1/m$ soll nun N bestimmt werden. Wir suchen ein $a \in K$, für das $\mathrm{Re}\,(a) > 0$, $\mathrm{Im}\,(a) > 0$ und

$$\mathrm{Re}\,(a) + \mathrm{Im}\,(a)\frac{1}{2m} > 1$$

ist. N wird so bestimmt, dass

$$1 - c_I < \frac{1}{2m} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Re}\,(a)c_I + \mathrm{Im}\,(a)\frac{1}{2m} > 1 \tag{16}$$

ist. Zeige

$$|\mathrm{Im}\,(y)|\mathrm{Q}_I \leqq \frac{1}{2m}|y|\mathrm{Q}_I \,. \tag{17}$$

Es ist $\mathrm{Re}\,(a^{-1}y) = \mathrm{Re}\,(a)\,\mathrm{Re}\,(y) + \mathrm{Im}\,(a)\,\mathrm{Im}\,(y) \leqq |y|$, und daraus folgt mit Hilfe von (14) und (16)

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\,(a)\,\mathrm{Im}\,(y)\mathrm{Q}_I &\leqq |y|\mathrm{Q}_I - \mathrm{Re}\,(a)\,\mathrm{Re}\,(y)\mathrm{Q}_I \\ &\leqq \big(1 - \mathrm{Re}\,(a)c_I\big)|y|\mathrm{Q}_I \leqq \mathrm{Im}\,(a)\frac{1}{2m}|y|\mathrm{Q}_I \,.\end{aligned}$$

Ebenso ergibt sich aus $\mathrm{Re}\,(ay) = \mathrm{Re}\,(a)\,\mathrm{Re}\,(y) - \mathrm{Im}\,(a)\,\mathrm{Im}\,(y) \leqq |y|$ die Ungleichung

$$-\operatorname{Im}(y)\mathsf{Q}_I \leqq \frac{1}{2m}|y|\mathsf{Q}_I$$

und aus $(-\operatorname{Im}(y))\vee\operatorname{Im}(y)=|\operatorname{Im}(y)|$ und (6) dann (17). Die folgende Abschätzung führt uns nun zum Ziel:

$$\begin{aligned}\big||y|\mathsf{Q}_I - y\mathsf{Q}_I\big| &= \big|(|y| - \operatorname{Re}(y) - i\operatorname{Im}(y))\mathsf{Q}_I\big| \\ &= \big||y| - \operatorname{Re}(y) - i\operatorname{Im}(y)\big|\mathsf{Q}_I \\ &\leqq (|y| - \operatorname{Re}(y))\mathsf{Q}_I + |\operatorname{Im}(y)|\mathsf{Q}_I \\ &\leqq (1-c_I)|y|\mathsf{Q}_I + \frac{1}{2m}|y|\mathsf{Q}_I \leqq \frac{1}{m}|y|\mathsf{Q}_I\,.\end{aligned}$$

Das Approximationslemma gestattet es, mehrere Ergebnisse aus [3] zusammenzufassen und zu erweitern: Wir nennen einen komplexen Banachraum $\mathfrak{X}$ mit den Eigenschaften (E 1)–(E 4) einen (Ko,B)-Raum, wenn $\|f\|=\||f|\|$ für jedes $f\in\mathfrak{X}$ ist. Wir sagen, $\mathfrak{X}$ habe die Eigenschaft

(bv): wenn $\mathfrak{H}=\operatorname{Re}(\mathfrak{X})$ ein bedingt vollständiger Banachverband ist;
(L): wenn für $f, g\in\mathfrak{X}^+$ stets $\|f+g\|=\|f\|+\|g\|$ gilt;
(M): wenn für $f, g\in\mathfrak{X}^+$ stets $\|f\vee g\|=\operatorname{Max}\{\|f\|,\|g\|\}$ gilt;
(mK): wenn in $\mathfrak{H}$ der Satz von der monotonen Konvergenz für gefilterte Systeme $\{f_\varkappa\}\subseteqq\mathfrak{H}$ gilt;
(1): wenn $\mathfrak{X}^+$ eine Einheit 1 enthält, d. h. ein Element $1\in\mathfrak{X}^+$ mit $\|1\|=1$, derart dass $|f|\leqq 1$ ist, falls $\|f\|\leqq 1$ ist.

Einen (Ko,B)-Raum mit den Eigenschaften (1) und (bv) nennen wir $(Ko,B,1,bv)$-Raum und entsprechend sind andere Bezeichnungen zu verstehen.

Satz. *Ist $\mathfrak{X}$ ein (Ko,B,L)-Raum und $\mathfrak{Y}$ ein (Ko,B,mK)-Raum oder aber $\mathfrak{X}$ ein (Ko,B)-Raum und $\mathfrak{Y}$ ein $(Ko,B,1,bv)$-Raum, so bilden die stetigen linearen Operatoren von $\mathfrak{X}$ nach $\mathfrak{Y}$ einen (Ko,B,bv)-Raum.*

Beweis. Die Eigenschaften (E 1)–(E 3) und (bv) sind für den Raum der stetigen linearen Operatoren T von $\mathfrak{X}$ nach $\mathfrak{Y}$ in [3] nachgewiesen worden, ebenso $\|\mathsf{T}\|=\||\mathsf{T}|\|$. Wir brauchen also nur das Approximationslemma anzuwenden.

Corollar. *Der Dualraum $\mathfrak{X}^*$ eines (Ko,B)-Raums $\mathfrak{X}$ ist ein (Ko,B,bv)-Raum.*

Beweis. $\mathfrak{X}^*$ ist der Raum der stetigen linearen Operatoren von $\mathfrak{X}$ in den $(Ko,B,1,bv)$-Raum $\mathfrak{C}$ der komplexen Zahlen.

BEMERKUNG. Kakutani [2] hat festgestellt, dass der Dualraum eines (L)-Raums ein (M)-Raum ist und umgekehrt. Ebensogut kann aber die Eigenschaft (1) als duale Eigenschaft zu (L) angesehen werden. Der Dualraum eines (Ko,B,L)-Raums ist ein $(Ko,B,1)$-Raum und umgekehrt. Diese beiden Aussagen sind insofern eng verknüpft, als aus (1) die Eigenschaft (M) folgt. Mit der Eigenschaft (1) formuliert lässt sich die wechselseitige Dualitätsaussage noch geringfügig verallgemeinern: Die linearen Operatoren T von einem (Ko,B,L)-Raum $\mathfrak{X}$ in einen $(Ko,B,1,bv)$-Raum $\mathfrak{Y}$ bilden einen $(Ko,B,1,bv)$-Raum. Der Einheitsoperator T_1 ist folgendermassen erklärbar: Für $f \geqq 0$ sei $f\mathsf{T}_1 = \|f\| 1$. Umgekehrt ist es klar, dass der Raum der stetigen linearen Operatoren T von einem $(Ko,B,1)$-Raum $\mathfrak{X}$ in einen (Ko,B,L)-Raum $\mathfrak{Y}$ die Eigenschaft (L) besitzt, denn für $\mathsf{T} \geqq 0$ ist dann $\|\mathsf{T}\| = \|1\mathsf{T}\|$. Einen (Ko,B,L)-Raum bilden diese Operatoren jedoch im Allgemeinen nicht. Es gibt einfache Beispiele mit $\|\mathsf{T}\| < \||\mathsf{T}|\|$. Die Forderung $\|\mathsf{T}\| = \||\mathsf{T}|\|$ war in [3] für die Anwendungen unentbehrlich, im Allgemeinen wird man auf sie verzichten.

LITERATUR

1. S. Kakutani, *Concrete representation of abstract (L)-spaces and the mean ergodic theorem*, Ann. of Math. 42 (1941), 523–537.
2. S. Kakutani, *Concrete representation of abstract (M)-spaces*, Ann. of Math. 42 (1941), 994–1024.
3. U. Krengel, *Über den Absolutbetrag stetiger linearer Operatoren und seine Anwendung auf ergodische Zerlegungen*, Math. Scand. 13 (1964), 151–187.

UNIVERSITÄT GÖTTINGEN, DEUTSCHLAND