

ÜBER DIE α -KAPAZITÄT EINER VERALLGEMEINERTEN CANTORSCHEN PUNKTMENGE

AGOT E. RIIBER

1.

M. Ohtsuka hat in [2] die α -Kapazität und die logarithmische Kapazität einer symmetrischen verallgemeinerten Cantorschen Punktmenge F im Euklidischen n -Raum untersucht. Nachdem ich diese Abhandlung gelesen hatte, bekam ich den Einfall, die α -Kapazität der in meiner Arbeit [3] definierten verallgemeinerten Cantorschen Punktmenge zu studieren. ([3] behandelt die logarithmische Kapazität.) Bei vorliegender Untersuchung benutzte ich auch die Abhandlung [1] von G. af Hällström, und ich bin ihm auch sonst für wertvolle Hilfe grossen Dank schuldig.

Die Punktmenge in [3] erhält man folgendermassen: Wir gehen von einer in der z -Ebene liegenden, nicht degenerierten, beschränkten, abgeschlossenen, zusammenhängenden Punktmenge M_0 mit dem Durchmesser d_0 aus. In M_0 wählen wir k_1 neue paarweise punktfremde, nicht degenerierte, abgeschlossene, zusammenhängende Punktmenge $A_{1,\nu}$, $\nu = 1, 2, \dots, k_1$. Ihre Vereinigungsmenge M_1 ist demnach eine Untermenge von M_0 . Der Prozess wird fortgesetzt, so dass M_n aus $k_1 k_2 \dots k_n$ paarweise punktfremden, nicht degenerierten, abgeschlossenen, zusammenhängenden Punktmenge $A_{n,\nu}$ besteht. Diese entstehen dadurch, dass man k_n Punktmenge $A_{n,\nu}$, $k_n \geq 2$, in jedes $A_{n-1,\nu}$ legt. Wir nennen zwei $A_{n,\nu}$ zueinander *assoziiert*, wenn sie zu demselben $A_{n-1,\nu}$ ($A_0 = M_0$) gehören, und $A_{n,\nu}^*$ soll die Vereinigungsmenge aller $A_{n+1,\lambda} \subset A_{n,\nu}$ sein. Den Durchmesser von $A_{n,\nu}$ nennen wir $D_{n,\nu}$, und das Maximum d_n der Grössen $D_{n,\nu}$ soll die Bedingung $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$ erfüllen. Setzen wir (der zu (1) entsprechende Zusammenhang in [3] lautet etwas anders)

$$(1) \quad 1/p_n = k_n d_n / d_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$(2) \quad P_n = p_1 p_2 \dots p_n$$

und

Eingegangen am 21. November 1964.

$$(3) \quad N_n = k_1 k_2 \dots k_n,$$

so wird

$$(4) \quad d_n = d_0 (P_n N_n)^{-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Unsere verallgemeinerte Cantorsche Punktmenge ist nun $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$.

2.

Zuerst werden wir einen Satz über die verschwindende α -Kapazität beweisen.

SATZ 1. Falls

$$(5) \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(p_1 p_2 \dots p_{\nu})^{\alpha}}{(k_1 k_2 \dots k_{\nu})^{1-\alpha}} = \infty, \quad 0 < \alpha < 2,$$

ist, so ist M von der α -Kapazität Null.

BEWEIS. Das α -Potential und die entsprechende Kapazität sind Spezialfälle der Grössen bei Ugaheri [4], wo man folgende Definition findet: Wir haben eine beschränkte Borelmenge E in einem Euklidischen Raum R . Sei $\mu(e)$ eine vollständig additive und nicht-negative Funktion der Borelmengen e auf E ; dann nennen wir $\mu(e)$ eine positive Massenbelegung auf E mit Totalmasse $\mu(E)$. Ist $\nu(e)$ eine Massenbelegung auf einer Borelschen Untermenge E' von E , so setzen wir $\mu(e) = \nu(E'e)$ für eine Borelmenge e auf E und erhalten dann eine positive Massenbelegung auf E .

Nach Ugaheri [4, S. 155, Satz 1] gibt es immer eine positive Massenbelegung mit positiver Totalmasse auf einer beschränkten Borelmenge von positiver Kapazität, so dass das von dieser Belegung erzeugte Potential beschränkt ist. Wir werden zeigen, dass man keine Massenverteilung auf M mit beschränktem α -Potential finden kann, wenn (5) gilt.

Zu diesem Zwecke verteilen wir ganz willkürlich auf M eine positive Einheitsmasse und studieren das α -Potential $g(z)$ dieser Masse, $0 < \alpha < 2$. In jedem $A_{n,\nu}$ nehmen wir einen Punkt $z_{n,\nu}$ ausserhalb $A_{n,\nu}^*$ und suchen eine untere Schranke des Mittelwertes

$$\bar{g}_n = \frac{1}{N_n} \sum_{\nu=1}^{N_n} g(z_{n,\nu}) = \frac{1}{N_n} \sum_{h=1}^{N_n} \left[\sum_{\nu=1}^{N_n} \int_{A_{n,h}^*} \frac{1}{|z_{n,\nu} - x|^{\alpha}} d\mu(x) \right].$$

Wir betrachten nun die nicht-negative Masse $\mu_{n,h} = \mu(A_{n,h}^*)$. Der Abstand eines jeden $A_{n,h}^*$ -Punktes von $z_{n,h}$ ist höchstens gleich d_n . Der Abstand von den anderen $k_n - 1$ Punkten $z_{n,\nu}$, die in demselben $A_{n-1,\xi}$ wie $A_{n,h}^*$ liegen, ist höchstens gleich d_{n-1} . Der Abstand von den $(k_{n-1} - 1)k_n$ Punkten $z_{n,\nu}$, die in demselben $A_{n-2,\eta}$ wie $A_{n,h}^*$ liegen, und die noch

nicht mitgenommen sind, ist höchstens gleich d_{n-2} u. s. w. Daher ist für $n \geq 3$

$$\bar{g}_n > \frac{1}{N_n} \sum_{h=1}^{N_n} \mu_{n,h} \left[\frac{1}{d_n^\alpha} + \frac{k_n - 1}{d_{n-1}^\alpha} + \frac{(k_{n-1} - 1)k_n}{d_{n-2}^\alpha} + \dots + \frac{(k_2 - 1)k_3 \dots k_n}{d_1^\alpha} \right].$$

Wir benutzen hier $k_v - 1 \geq \frac{1}{2}k_v$ und erhalten mit Hilfe von (2), (3) und (4)

$$\bar{g}_n > \sum_{h=1}^{N_n} \mu_{n,h} \left[\frac{1}{2d_0^\alpha} \sum_{v=1}^n \frac{(p_1 p_2 \dots p_v)^\alpha}{(k_1 k_2 \dots k_v)^{1-\alpha}} \right].$$

Also wird

$$\bar{g}_n > \frac{1}{2d_0^\alpha} \sum_{v=1}^n \frac{(p_1 p_2 \dots p_v)^\alpha}{(k_1 k_2 \dots k_v)^{1-\alpha}},$$

weil

$$\sum_{h=1}^{N_n} \mu_{n,h} = 1$$

ist. Setzen wir nun (5) voraus, so gibt unsere willkürliche Belegung kein beschränktes α -Potential, und die Kapazität muss nach Ugaheri Null sein.

3.

Wir wenden Satz 1 auf die Punktmengen $F = F_1$ und $F = F_1 \times F_2$ mit $F_1 = F_2$ (siehe [2]) an.

Die Punktmenge F_1 liegt auf der reellen Achse und ist ein Spezialfall von M . Die Menge $A_{n,v}$, $n=1,2,\dots$, ist dann ein Intervall dieser Achse, und wir haben $D_{n,v} = d_n$. Die Menge $A_{n,v}^*$ entsteht aus $A_{n,v}$ dadurch, dass man $k_{n+1} - 1$ offene Strecken von derselben Länge entfernt. Wir bezeichnen für F_1 die Grösse k_v mit k_v' und p_v mit p_v' . Satz 1 gibt unmittelbar in dem linearen Fall die hinreichende Bedingung für verschwindende α -Kapazität des Ohtsukaschen Satzes [2, S. 152]. Ohtsuka hat hier $\alpha < 1$ vorausgesetzt.

Die Punktmenge F_2 ist in derselben Weise wie F_1 konstruiert und liegt auf der imaginären Achse. Um Satz 1 auf die Punktmenge $F = F_1 \times F_2$ (mit $F_1 = F_2$) anwenden zu können, setzen wir $k_n = (k_n')^2$ und $p_n = p_n' / k_n'$. Dann erhält man folgendes: Falls

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{(p_1' p_2' \dots p_v')^\alpha}{(k_1' k_2' \dots k_v')^{2-\alpha}} = \infty, \quad 0 < \alpha < 2,$$

ist, so ist $F = F_1 \times F_2$ (mit $F_1 = F_2$) von der α -Kapazität Null.

Dieses Ergebnis ist auch in dem oben erwähnten Satz von Ohtsuka enthalten.

4.

Um eine hinreichende Bedingung für positive α -Kapazität zu finden, betrachten wir den kleinsten Abstand δ_n zwischen zwei assoziierten $A_{n,\lambda}$ und setzen $r_n = \delta_n/d_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$

SATZ 2. Falls

$$(6) \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(p_1 p_2 \dots p_\nu)^\alpha}{(r_{\nu+1})^\alpha (k_1 k_2 \dots k_\nu)^{1-\alpha}} < \infty, \quad 0 < \alpha < 2,$$

ist, so hat M positive α -Kapazität.

BEWEIS. Nach Ugaheri [4, S. 162, Satz 3] gibt es immer auf einer kompakten Punktmenge E von der Kapazität Null eine positive Massenverteilung mit positiver Totalmasse, welche ein unendliches Potential in jedem E -Punkt erzeugt. Weiter gilt für das Potential $u(z)$ dieser Belegung $\lim_{z \rightarrow z_0} u(z) = \infty$, wenn z_0 ein beliebiger E -Punkt ist (siehe [4, S. 152, Korollar]). Wir werden mit Hilfe von (6) zeigen, dass man mit einer willkürlichen Einheitsverteilung auf M eine Punktfolge $\{\xi_m\}$ konstruieren kann, die sich einem M -Punkte nähert, und für welche das α -Potential beschränkt ist.

Sei $\mu_{n,\nu} \geq 0$ die Masse auf $A_{n,\nu}^*$ unserer willkürlichen Einheitsverteilung. Man zeigt leicht, dass es in jedem $A_{n,\nu}$ einen Punkt $z_{n,\nu}$ gibt, dessen Abstand von $A_{n,\nu}^*$ mindestens gleich $\delta_{n+1}/3$ ist.

Wir suchen zuerst eine obere Schranke des Mittelwertes \bar{g}_n aller $g(z_{n,\nu})$, $\nu = 1, 2, \dots, N_n$, wo $g(z)$ das α -Potential der Verteilung ist.

Auch in diesem Beweise studieren wir zuerst das α -Potential, das in den verschiedenen Punkten $z_{n,\nu}$ von der Masse $\mu_{n,h}$ erzeugt wird. Der Abstand zwischen $A_{n,h}^*$ und $z_{n,h}$ ist mindestens gleich $\delta_{n+1}/3$. Die $k_n - 1$ Punkte $z_{n,\nu}$ der zu $A_{n,h}$ assoziierten $A_{n,\nu}$ haben von $A_{n,h}^*$ einen Abstand, der mindestens gleich δ_n ist. Die k_n genannten $A_{n,\nu}$ gehören zu demselben $A_{n-1,\lambda}$, welches $k_{n-1} - 1$ assoziierte $A_{n-1,\lambda}$ hat. In diesen Punktmenge liegen $(k_{n-1} - 1)k_n$ Punkte $z_{n,\nu}$. Der Abstand eines jeden Punktes von $A_{n,h}^*$ ist mindestens gleich δ_{n-1} u. s. w. Wir erhalten also für $n \geq 2$

$$\bar{g}_n \leq \frac{1}{N_n} \sum_{h=1}^{N_n} \mu_{n,h} \left[\frac{3^\alpha}{r_{n+1}^\alpha d_n^\alpha} + \frac{k_n - 1}{r_n^\alpha d_{n-1}^\alpha} + \frac{(k_{n-1} - 1)k_n}{r_{n-1}^\alpha d_{n-2}^\alpha} + \dots + \frac{(k_1 - 1)k_2 \dots k_n}{r_1^\alpha d_0^\alpha} \right].$$

Wegen (2), (3), (4) und der Ungleichung $k_\nu - 1 < k_\nu$ wird

$$\bar{g}_n < \sum_{h=1}^{N_n} \mu_{n,h} \left[\frac{1}{(d_0 r_1)^\alpha} + \left(\frac{3}{d_0}\right)^\alpha \sum_{\nu=1}^n \frac{(p_1 p_2 \dots p_\nu)^\alpha}{r_{\nu+1}^\alpha (k_1 k_2 \dots k_\nu)^{1-\alpha}} \right].$$

Weil auch hier

$$\sum_{h=1}^{N_n} \mu_{n,h} = 1$$

ist, so wird also

$$\bar{g}_n < \frac{1}{(d_0 r_1)^\alpha} + \left(\frac{3}{d_0}\right)^\alpha \sum_{\nu=1}^n \frac{(p_1 p_2 \dots p_\nu)^\alpha}{r_{\nu+1}^\alpha (k_1 k_2 \dots k_\nu)^{1-\alpha}}.$$

Falls (6) gilt, haben wir daher $\bar{g}_n < C$, wo C eine von n unabhängige Konstante ist. Für mindestens einen Punkt $z_{n,\nu}$, etwa z_n , ist $g(z_n) < C$. Die Folge $\{z_n\}$ mit beschränktem α -Potential nähert sich M und muss auf dieser Menge einen Häufungspunkt haben. Daher existiert eine Folge $\{\xi_m\}$ mit den früher erwähnten Eigenschaften, und die Kapazität muss positiv sein.

5.

Satz 1 und Satz 2 gibt

SATZ 3. Falls für alle ν

$$(7) \quad r_\nu \geq r > 0$$

ist, so hat M dann und nur dann die α -Kapazität Null, wenn

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(p_1 p_2 \dots p_\nu)^\alpha}{(k_1 k_2 \dots k_\nu)^{1-\alpha}} = \infty, \quad 0 < \alpha < 2,$$

gilt.

6.

Setzen wir für $F = F_1$ und $F = F_1 \times F_2$ (mit $F_1 = F_2$)

$$(8) \quad k_\nu' \leq k, \quad p_\nu' \geq p > 1, \quad \nu = 1, 2, \dots,$$

voraus, so gilt (7). Daher sind in diesem Fall die früher erwähnten hinreichenden Bedingungen für Nullkapazität auch notwendig. Der Ohtsukasche Satz ist hier schärfer, denn er braucht nicht (8) anzunehmen.

LITERATURVERZEICHNIS

1. G. af Hällström, *On the capacity of generalized Cantor sets*, Acta Acad. Abo. Math. Phys. 20 (1955) no. 5, 8 pp.
2. M. Ohtsuka, *Capacité d'ensembles de Cantor généralisés*, Nagoya Math. J. 11 (1957), 151-160.
3. Å. Riiber, *Über die Kapazität einer verallgemeinerten Cantorschen Punktmenge*, Arch. Math. 8 (1957), 368-373.
4. T. Ugaheri, *On the general capacities and potentials*, Bull. Tokyo Inst. Tech. Ser. B, 1953, 149-179.