MATH. SCAND. 16 (1965), 121–147

EINE FÜR BELIEBIGE CALL-PROZESSE GELTENDE VERALLGEMEINERUNG DER PALMSCHEN FORMELN

WERNER FIEGER

Ist $x(t)$ ein stationärer, ordinärer Call-Prozeß mit endlichem Parameter λ, so gelten die Palmschen Formeln

$$p\bigl(x(b)-x(a)=0\bigr) = 1 - \lambda \int_0^{b-a} \varphi_0(\tau)\,d\tau\,,$$

$$p\bigl(x(b)-x(a)=k\bigr) = \lambda \int_0^{b-a} \varphi_{k-1}(\tau)\,d\tau - \lambda \int_0^{b-a} \varphi_k(\tau)\,d\tau, \qquad k=1,2,\ldots\,,$$

für $0 \leqq a < b < +\infty$, wobei

$$\varphi_i(t) := \lim_{\tau \searrow 0} p\bigl(x(t+\tau)-x(\tau)=i \mid x(\tau)-x(0) \geqq 1\bigr)$$

für $i=0,1,2,\ldots$ ist; einen Beweis für diese Formeln findet man in [7, Kap. 3]. Mit Methoden, die einfache Verallgemeinerungen der von Khintchine in [7] angewandten Hilfsmittel sind, ist in [2] eine Verallgemeinerung dieser Formeln für stationäre, nicht-ordinäre Call-Prozesse hergeleitet. In [2] ist außerdem der nicht-stationäre, ordinäre Fall mittels eines einfachen integrationstheoretischen Satzes (Hilfssatz 3), der ein Spezialfall einer tiefergehenden Aussage über Burkill-Integrale ist, behandelt.

In § 3 der vorliegenden Arbeit werden die Palmschen Formeln mit Hilfe von Sätzen aus der Theorie der Burkill-Integrale für beliebige Call-Prozesse, die nur einer einfachen Endlichkeitsbedingung genügen müssen, verallgemeinert.

Als Anwendung dieser verallgemeinerten Palmschen Formeln erhalten wir eine Charakterisierung der Call-Prozesse ohne Nachwirkungen und der Poisson-Prozesse mit nicht-stationärer Parameterfunktion (§ 4). Ferner zeigen wir, daß ein Satz von Korolyuk auch für nicht-stationäre Call-Prozesse gilt (§ 5). In § 1 und § 2 sind die integrationstheoretischen Sätze zusammengestellt, die in den Beweisen benötigt werden.

Eingegangen am 4. Oktober 1963.

1. Das Burkill-Unterteilungsintegral über einer beliebigen Grundmenge.

In § 1 und § 2 werden nur die Sätze über das Burkill-Unterteilungsintegral angegeben, die wir später benötigen. Auf Zusammenhänge mit anderen Sätzen über das Burkill-Unterteilungsintegral und mit entsprechenden Sätzen über das Burkill-Normintegral gehen wir nicht ein. Man vergleiche hierzu [6, Abschnitt X] und die dort angegebene Literatur.

Die folgenden Begriffe sind teilweise aus [6] übernommen; auf wesentliche Abweichungen ist im Text hingewiesen.

Es sei Ω eine beliebig vorgegebene Grundmenge. Ein System $\mathfrak{L}$ von Teilmengen der Menge Ω heißt Intervallsystem, falls gilt:

a) es gibt Mengen $I_1,\ldots,I_n \in \mathfrak{L}$ mit $I_\nu \cap I_\mu = 0$ für $\nu \neq \mu$ und mit $\Omega = I_1 \cup \ldots \cup I_n$;
b) aus $I,\, I' \in \mathfrak{L}$, $I \cap I' \neq \emptyset$ folgt $I \cap I' \in \mathfrak{L}$;
c) $\mathfrak{L} \not\ni \emptyset$.

Ein endliches Teilsystem $Z(J) = \{I_1,\ldots,I_r\}$ von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathfrak{L}$ mit $J = I_1 \cup \ldots \cup I_r$ nennen wir eine Intervallunterteilung von J. Eine Intervallunterteilung $Z'(J) = \{I_1',\ldots,I_s'\}$ heißt feiner als $Z(J) = \{I_1,\ldots I_r\}$ (Bezeichnung: $Z'(J) \geq Z(J)$), wenn es zu jedem $I_\sigma' \in Z'(J)$ ein $I_\varrho \in Z(J)$ mit $I_\sigma' \subset I_\varrho$ gibt.

Es bezeichne ${}^K\mathfrak{L}$ den kleinsten Mengenkörper, der $\mathfrak{L}$ umfaßt, ${}^B\mathfrak{L}$ den kleinsten σ-Körper, der $\mathfrak{L}$ enthält.

Über $\mathfrak{L}$ sei die reelle Funktion $F(I)$ gegeben. Zur Abkürzung führen wir die Bezeichnung

$$F(Z(J)) := \sum_{\varrho=1}^{r} F(I_\varrho)$$

ein.

Definition. Die »Intervallfunktion« F heißt $\mathfrak{L}$-Burkill-unterteilungsintegrabel (kurz: $\mathfrak{L}$-Burkill-integrabel, oder: B-integrabel) über $J \in {}^K\mathfrak{L}$ mit dem Integralwert $\int_J F(I)$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Intervallunterteilung $Z_0(J)$ mit

$$\left| F(Z(J)) - \int_J F(I) \right| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad Z(J) \geq Z_0(J)$$

gibt.

Der Integralwert einer über J B-integrablen Funktion F ist eindeutig bestimmt. Ist F über J B-integrabel, so auch über jedem $J' \in {}^K\mathfrak{L}$ mit $J' \subset J$. Ist F B-integrabel über Ω, so ist $f(J) := \int_J F(J)$ über ${}^K\mathfrak{L}$ additiv.

Wir betrachten nun über Ω einen σ-Körper $\mathfrak{B}$ und ein endliches Maß $m|\mathfrak{B}$. Ein System $\mathfrak{K}$ von Teilmengen von Ω nennen wir ein starkes Vitalisches System, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{B}$;

b) $\mathfrak{K} \not\ni \emptyset$;

c) zu jedem $S \subset \Omega$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es endlich oder abzählbar unendlich viele, paarweise disjunkte Mengen N; $K_1, K_2, \ldots \in \mathfrak{K}$ mit

$$S \subset \bigcup_{\nu \geqq 1} K_\nu \cup N \quad \text{und} \quad \underline{m}\Big(\bigcup_{\nu \geqq 1} K_\nu - S\Big) < \varepsilon ,$$

wobei $m(N) = 0$ ist.

Mit $\underline{m}(R)$, $\overline{m}(R)$ bezeichnen wir das innere resp. äußere m-Maß von R. In Abweichung von der Definition in [6] ist hier die Forderung »$m(K) > 0$ für alle $K \in \mathfrak{K}$« durch »$\emptyset \notin \mathfrak{K}$« ersetzt.

Entsprechend übernehmen wir aus [6] die Definition der Ableitungsbasis $\mathfrak{A}$ (Forderung $m(V) > 0$ ersetzt durch $\emptyset \notin \mathfrak{g} \in \mathfrak{G}$), die Definition der starken Vitalischen Ableitungsbasis und die dazu gehörenden Begriffe (vgl. hierzu [6, S. 210–214]).

Wir sagen, daß die Ableitungsbasis $\mathfrak{A}$ die Eigenschaft T^{**} hat, wenn es zu jedem $K \in \bigcup_{\mathfrak{g} \in \mathfrak{A}} \mathfrak{g}$ eine m-Nullmenge N gibt derart, daß zu jedem $\omega \in K - N$ und zu jeder dem Punkt ω zugehörigen Ableitungsfamilie $\mathfrak{g} \in \mathfrak{A}$ ein Ende $\mathfrak{g}_e$ von $\mathfrak{g}$ mit $K' \subset K$ für jedes $K' \in \mathfrak{g}_e$ gibt.

Es sei nun F erklärt über $\bigcup_{\mathfrak{g} \in \mathfrak{A}} \mathfrak{g}$. Als obere $\mathfrak{A}$-Ableitung von F bezüglich m im Punkt ω definiert man

$$\bar{D}F(\omega) := \sup \left\{ \overline{\lim_{K \in \mathfrak{g}}} \frac{F(K)}{m(K)} : \mathfrak{g} \text{ zu } \omega \text{ gehörige Ableitungsfamilie} \right\} ,$$

wobei

$$\frac{F(K)}{m(K)} = \begin{cases} +\infty & \text{für} \quad F(K) \geqq 0, \ m(K) = 0 \\ -\infty & \text{für} \quad F(K) < 0, \ m(K) = 0 \end{cases}$$

gesetzt ist, und wobei $\overline{\lim}_{K \in \mathfrak{g}}$ als oberer Limes bezüglich der gerichteten Familie $\mathfrak{g}$ zu nehmen ist. Ebenso erklärt man die untere Ableitung

$$\underline{D}F(\omega) := \inf \left\{ \underline{\lim}_{K \in \mathfrak{g}} \frac{F(K)}{m(K)} : \mathfrak{g} \text{ zu } \omega \text{ gehörige Ableitungsfamilie} \right\} .$$

Falls $\underline{D}F(\omega) = \bar{D}F(\omega)$ ist, heißt F in ω bezüglich m differenzierbar mit der Ableitung $DF(\omega) := \underline{D}F(\omega)$.

Ist $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{B}$, und gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß es zu beliebigem $J = I_1 \cup \ldots \cup I_n$ mit $I_1, \ldots, I_n \in \mathfrak{L}$ und mit $m(J) < \delta$ stets ein $Z_0(J)$ mit $|F(Z(J))| < \varepsilon$ für alle $Z(J) \geq Z_0(J)$ gibt ,so heißt F totalstetig bezüglich m.

Wir nehmen nun an, daß $\mathfrak{B}$ ein σ-Körper über Ω ist, $m \mid \mathfrak{B}$ ein endliches Maß und $\mathfrak{A}$ eine starke Vitalische Ableitungsbasis mit der Eigenschaft T^{**}; $\mathfrak{L} := \bigcup_{\mathfrak{g}\in\mathfrak{A}} \mathfrak{g}$ sei ein Intervallsystem. Unter diesen Voraussetzungen gilt:

Satz 1. *Ist die m-totalstetige Intervallfunktion F_1 $\mathfrak{L}$-Burkill-integrabel über Ω, so existiert $DF_1(\omega)$ m-fast überall. Ist F_2 ebenfalls m-totalstetig und $\mathfrak{L}$-Burkill-integrabel über Ω, und gilt*

$$\int_J F_1(I) = \int_J F_2(I) \qquad \text{für alle} \quad J \in {}^K\mathfrak{L} ,$$

so ist

$$DF_1(\omega) = DF_2(\omega)$$

m-fast überall.

Bemerkung. Man vergleiche die letzte Anmerkung in [10]. Dort ist jedoch die — für Teile der Theorie wesentliche — Voraussetzung gemacht, daß es beliebig maßfeine Unterteilungen gibt. — Den Beweis für Satz 1 kann man auch ähnlich wie in [11] führen, wenn man die dort auftretende Forderung B^* durch unsere Eigenschaft T^{**} ersetzt.

Beweis von Satz 1. 1) Es seien F_1, F_2 m-totalstetig und $\mathfrak{L}$-Burkill-integrabel über Ω mit $f_\nu(J) := {}_J\!\int F_\nu(I)$. Es genügt zu zeigen, daß aus der Gleichheit

$$f_1(J) = f_2(J) \qquad \text{für alle} \quad J \in {}^K\mathfrak{L}$$

die Relation

$$\overline{m}\big(\{\omega:\ \overline{D}F_1(\omega) > \underline{D}F_2(\omega)\}\big) = 0$$

oder, was damit gleichwertig ist,

$$\overline{m}\big(\{\omega:\ \overline{D}F_1(\omega) > \alpha > \beta > \underline{D}F_2(\omega)\}\big) = 0$$

für alle reellen α, β mit $\alpha > \beta$ folgt.

2) Es seien α, β reell vorgegeben mit $\alpha > \beta$. Wir setzen

$$R := \{\omega:\ \overline{D}F_1(\omega) > \alpha > \beta > \underline{D}F_2(\omega)\}$$

und nehmen an, daβ $\overline{m}(R) > 0$ gilt. Zu

$$\varepsilon := \min\left\{1,\ \frac{\alpha-\beta}{2(|\beta|+4)}\right\} \overline{m}(R)$$

wählen wir $\delta > 0$ so, daß für beliebige paarweise fremde $K_1, \dots, K_m \in \mathfrak{L}$ aus $m(K_1 \cup \dots \cup K_m) < \delta$ immer

$$|F_\nu(Z(K_1 \cup \dots \cup K_m))| < \varepsilon \qquad \text{für} \quad \nu = 1,2$$

folgt, sofern nur $Z(K_1 \cup \ldots \cup K_m)$ genügend fein ist. Dazu gibt es abzählbar viele, paarweise fremde $K_1', K_2', \ldots \in \mathfrak{L}$ und eine m-Nullmenge N mit

$$R \subset \bigcup_{\varrho=1}^{\infty} K_\varrho' \cup N, \qquad \underline{m}\Big(\bigcup_{\varrho=1}^{\infty} K_\varrho' - R\Big) < \tfrac{1}{2}\eta$$

für $\eta := \min\{\varepsilon, \delta\}$, da $\mathfrak{L}$ ein starkes Vitalisches System ist. Folglich existiert eine natürliche Zahl n so, daß für $J := \bigcup_{\varrho=1}^{n} K_\varrho'$ gilt:

(*) $\quad \overline{m}(R) - \tfrac{1}{2}\eta < \overline{m}(R \cap J) \leqq m(J) < \overline{m}(R) + \tfrac{1}{2}\eta < \overline{m}(R \cap J) + \eta\,.$

3) Da F_1, F_2 über J B-integrabel sind, gibt es eine Intervallunterteilung $Z_0(J) = \{I_1, \ldots, I_r\}$ mit

(**) $\quad |F_\nu(Z(J)) - f_\nu(J)| < \varepsilon \qquad$ für $Z(J) \geq Z_0(J)$ und $\nu = 1, 2\,.$

4) Wegen der Eigenschaft T^{**} gibt es eine feste m-Nullmenge N_1 und zu jedem $\omega \in R \cap J - N_1 =: R_1$ zwei Ableitungsfamilien $\mathfrak{g}_1(\omega)$, $\mathfrak{g}_2(\omega)$ mit

$$F_1(K') \geqq \alpha m(K'), \qquad K' \subset I_\varrho \text{ für ein } \varrho \in \{1, \ldots, r\} \text{ für alle } K' \in \mathfrak{g}_1(\omega)$$

und mit

$$F_1(K'') \leqq \beta m(K''), \qquad K'' \subset I_{\varrho'} \text{ für ein } \varrho' \in \{1, \ldots, r\} \text{ für alle } K'' \in \mathfrak{g}_2(\omega)\,.$$

Da $\mathfrak{A}$ eine starke Vitalische Ableitungsbasis ist, existieren abzählbar viele, disjunkte

$$I_1', I_2', \ldots \in \bigcup_{\omega \in R_1} \mathfrak{g}_1(\omega)$$

und abzählbar viele, disjunkte

$$I_1'', I_2'', \ldots \in \bigcup_{\omega \in R_1} \mathfrak{g}_2(\omega)$$

mit

$$\left.\begin{aligned} R \cap J &\subset \bigcup_{\sigma=1}^{\infty} I_\sigma' \cup N_3 \subset J\,, \\ R \cap J &\subset \bigcup_{\sigma=1}^{\infty} I_\sigma'' \cup N_4 \subset J\,. \end{aligned}\right. \qquad \big(m(N_3) = m(N_4) = 0\big)$$

5) Zu jedem s gibt es paarweise disjunkte $\tilde{I}_1^s, \ldots, \tilde{I}_{t(s)}^s \in \mathfrak{L}$ und paarweise disjunkte $\tilde{\tilde{I}}_1^s, \ldots, \tilde{\tilde{I}}_{u(s)}^s \in \mathfrak{L}$ mit

$$\begin{gathered} I_1' \cup \ldots \cup I_s' \cup \tilde{I}_1^s \cup \ldots \cup \tilde{I}_{t(s)}^s = J\,, \\ (I_1' \cup \ldots \cup I_s') \cap (\tilde{I}_1^s \cup \ldots \cup \tilde{I}_{t(s)}^s) = \emptyset\,, \\ \{I_1', \ldots, I_s', \tilde{I}_1^s, \ldots, \tilde{I}_{t(s)}^s\} > Z_0(J) \end{gathered}$$

und entsprechend für $\tilde{\tilde{I}}^s{}_v$. Dabei gilt weiter

$$\bigcap_{s=1}^{\infty} (\tilde{I}_1{}^s \cup \ldots \cup \tilde{I}^s_{t(s)}) \subset J - R \cap J$$

und ebenso

$$\bigcap_{s=1}^{\infty} (\tilde{\tilde{I}}_1{}^s \cup \ldots \cup \tilde{\tilde{I}}^s_{u(s)}) \subset J - R \cap J \, ,$$

also wegen (*)

$$\lim_{s\to\infty} m(\tilde{I}_1{}^s \cup \ldots \cup \tilde{I}^s_{t(s)}) \leqq \underline{m}(J - R \cap J) < \delta \, ,$$
$$\lim_{s\to\infty} m(\tilde{\tilde{I}}_1{}^s \cup \ldots \cup \tilde{\tilde{I}}^s_{u(s)}) \leqq \underline{m}(J - R \cap J) < \delta \, .$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir daher annehmen, daß die $\tilde{I}_\varrho{}^s$, $\tilde{\tilde{I}}_\varrho{}^s$ so gewählt sind, daß

$$\overline{\lim}_{s\to\infty} |F_1(\tilde{I}_1{}^s) + \ldots + F_1(\tilde{I}^s_{t(s)})| < \varepsilon$$

und

$$\overline{\lim}_{s\to\infty} |F_2(\tilde{\tilde{I}}_1{}^s) + \ldots + F_2(\tilde{\tilde{I}}^s_{u(s)})| < \varepsilon \, .$$

gilt.

6) Aus (**) folgern wir

$$\begin{aligned}
f_1(J) + \varepsilon &> F_1(I_1') + \ldots + F_1(I_s') + F_1(\tilde{I}_1{}^s) + \ldots + F_1(\tilde{I}^s_{t(s)}) \\
&\geqq \alpha\, m(I_1') \cup \ldots \cup I_s') + F_1(\tilde{I}_1{}^s) + \ldots + F_1(\tilde{I}^s_{t(s)}) \, , \\
f_2(J) - \varepsilon &< F_2(I_1'') + \ldots + F_2(I_s'') + F_2(\tilde{\tilde{I}}_1{}^s) + \ldots + F_2(\tilde{\tilde{I}}^s_{u(s)}) \\
&\leqq \beta\, m(I_1'' \cup \ldots \cup I_s'') + F_2(\tilde{\tilde{I}}_1{}^s) + \ldots + F_2(\tilde{\tilde{I}}^s_{u(s)})
\end{aligned}$$

und damit für $s \to \infty$ unter Beachtung von (*)

$$\begin{aligned}
f_1(J) + \varepsilon &> \alpha\, m(\textstyle\bigcup_{s=1}^{\infty} I_s') - \varepsilon \\
&\geqq \alpha\, \overline{m}(R \cap J) - \varepsilon \\
&> (\alpha - \beta)(\overline{m}(R) - \tfrac{1}{2}\eta) + \beta\, \overline{m}(J) - |\beta|\eta - \varepsilon \\
&\geqq \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)\overline{m}(R) - (|\beta| + 1)\varepsilon + \beta\, m(\textstyle\bigcup_{s=1}^{\infty} I_s'') \\
&> f_2(J) - (|\beta| + 3)\varepsilon + \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)\overline{m}(R) \, ,
\end{aligned}$$

also wegen $f_1(J) = f_2(J)$

$$(|\beta| + 4)\varepsilon > \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)\overline{m}(R) \, ,$$

was ein Widerspruch zur Wahl von ε ist.

2. Das Burkill-Integral über endlichen Teilintervallen des R^1.

Als Anwendung betrachten wir nun eine über einem endlichen Intervall gegebene Intervallfunktion.

Es sei $-\infty < a < b < +\infty$. Für $a \leqq t < t' \leqq b$ sei die reelle Funktion $\psi(t,t')$ erklärt. Setzen wir

$$\psi(I) := \psi(t,t') \qquad \text{für} \qquad I = (t,t'] \text{ und } \Omega' := (a,b]\,,$$

so ist ψ eine für alle links offenen, rechts abgeschlossenen Teilintervalle I von Ω' erklärte Funktion. ψ ist genau dann über Ω' B-integrabel mit dem Integralwert $\int_a^b \psi(I)$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ Zwischenpunkte $t_1, \ldots, t_n$ $(n = n(\varepsilon))$ mit

$$a =: t_0 < t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1} := b$$

gibt derart, daß für jede Unterteilung

$$a =: t_0' < t_1' < \ldots < t'_{m+1} := b$$

mit

$$\{t_1, \ldots, t_n\} \subset \{t_1', \ldots, t_m'\}$$

die Ungleichung

$$\left| \sum_{\mu=1}^{m+1} \psi(t'_{\mu-1}, t_\mu') - \int_a^b \psi(I) \right| < \varepsilon$$

gilt. Wir sprechen im folgenden auch kurz davon, daß ψ über $[a,b]$ Burkill-unterteilungsintegrabel (oder: B-integrabel) ist.

Die durch die endlich vielen Punkte $t_1, \ldots, t_n$ mit $a < t_1 < \ldots < t_n < b$ gegebene Intervallunterteilung bezeichnen wir wieder mit $Z = \{t_1, \ldots, t_n\}$, ferner setzen wir $Z_1 \geq Z$, falls

$$Z_1 = \{t_1', \ldots, t_m'\} \supset \{t_1, \ldots, t_n\}\,,$$

und

$$\psi(Z) := \sum_{\nu=1}^{n+1} \psi(t_{\nu-1}, t_\nu)\,.$$

Es sei $s(t)$ eine über $[a,b]$ monoton nicht fallende Funktion; die Punkte von $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ klassifizieren wir nach dem Stetigkeitsverhalten von $s(t)$:

$$\begin{aligned} S^{L,R} &:= \{t \in (a,b)\colon\ s(t-0) < s(t) < s(t+0)\} \\ S^{L} &:= \{t \in (a,b]\colon\ s(t-0) < s(t) = s(t+0)\}\,, \\ S^{R} &:= \{t \in [a,b)\colon\ s(t-0) = s(t) < s(t+0)\} \end{aligned}$$

mit $s(a-0) := s(a)$, $s(b+0) := s(b)$ und

$$T := [a,b] - (S^{L,R} \cup S^L \cup S^R)\,.$$

Zur Vereinfachung führen wir noch die Mengen

$$C(t) := \begin{cases} \{1\} & \text{für} \quad t \in T \\ \{2\} & \text{für} \quad t \in S^L \\ \{3\} & \text{für} \quad t \in S^R \\ \{2,3\} & \text{für} \quad t \in S^{L,R} \end{cases}$$

für $t \in [a,b]$ ein. Nun setzen wir

$$\Omega := \{(t,\lambda):\ a \leqq t \leqq b,\ \lambda \in C(t)\}\ ,$$

betrachten das »Intervall«

$$\langle\alpha,\beta\rangle := \{(t,\lambda):\ \alpha < t < \beta,\ \lambda \in C(t)\} \cup \{(\alpha,\lambda):\ \lambda \in C(\alpha) \cap \{3\}\} \cup \\ \cup \{(\beta,\lambda):\ \lambda \in C(\beta) \cap \{1,2\}\}\ ,$$

und setzen

$$m(\langle\alpha,\beta\rangle) := s(\beta) - s(\alpha)\ ,$$
$$\mathfrak{L} := \{\langle\alpha,\beta\rangle:\ a \leqq \alpha < \beta \leqq b\}\ ,$$
$$\mathfrak{B} := {}^{B}\mathfrak{L}\ .$$

Es ist m σ-additiv und endlich über $\mathfrak{L}$; also läßt sich m zu einem ebenfalls mit m bezeichneten Maß über $\mathfrak{B}$ erweitern.

Durch diese Konstruktion, die nur eine Trennung der beidseitigen Unstetigkeitspunkte von $s(t)$ bewirkt, haben wir der monoton nicht fallenden Funktion $s(t)$ ein Maß über Ω zugeordnet. Die Intervallfunktion $\psi(t,t')$ überpflanzen wir durch

$$\psi(\langle\alpha,\beta\rangle) := \psi(\alpha,\beta)\ .$$

Ein durch die Teilmengenrelation gerichtetes System von Intervallen $\langle\alpha_\gamma,\beta_\gamma\rangle$ (Γ beliebige Indexmenge, $\gamma \in \Gamma$) nennen wir eine zugelassene Ableitungsfamilie zu $\omega = (t,\lambda)$, wenn $\lim(\beta_\gamma - \alpha_\gamma) = 0$ und wenn für $\lambda = 1$ (d.h. $t \in T$) entweder $\alpha_\gamma = t$ für alle $\gamma \in \Gamma$ oder $\beta_\gamma = t$ für alle $\gamma \in \Gamma$ bzw. für $\lambda = 2$, $\beta_\gamma = t$ für alle $\gamma \in \Gamma$ bzw. für $\lambda = 3$, $\alpha_\gamma = t$ für alle $\gamma \in \Gamma$ gilt. Die Gesamtheit $\mathfrak{A}$ aller zu irgendeinem Element $\omega \in \Omega$ zugelassenen Ableitungsfamilien bildet eine starke Vitalische Ableitungsbasis. (Den Beweis für diese Aussage führt man etwa mit der in [12] angegebenen Überpflanzung der Menge Ω auf das abgeschlossene Intervall $[s(a),s(b)]$.) Unmittelbar einzusehen ist, daß die Ableitungsbasis $\mathfrak{A}$ die Eigenschaft T^{**} hat.

Mit diesen Begriffen ist der nächste Satz ohne Schwierigkeiten aus Satz 1 zu folgern.

Satz 2. *Es sei $s(t)$ eine über $[a,b]$ monoton nicht fallende Funktion; σ_0 bezeichne das vom Stetigkeitsanteil von $s(t)$ über dem σ-Körper aller Borel-*

schen Teilmengen von $[a,b]$ *definierte Maß. Die für* $a \leqq t < t' \leqq b$ *erklärte reelle Funktion* $\psi(t,t')$ *genüge der Ungleichung*

$$|\psi(t,t')| \leqq s(t')-s(t) .$$

Ist $\psi(t,t')$ *über* $[a,b]$ *B-integrabel, so existieren*

$$\lim_{\tau \nearrow t} \frac{\psi(\tau,t)}{s(t)-s(\tau)}$$

für alle $t \in S^L \cup S^{L,R}$ *und für* σ_0*-fast alle* $t \in T$ *und*

$$\lim_{\tau \searrow t} \frac{\psi(t,\tau)}{s(\tau)-s(t)}$$

für alle $t \in S^R \cup S^{L,R}$ *und für* σ_0*-fast alle* $t \in T$; *für* σ_0*-fast alle* $t \in T$ *sind diese beiden Grenzwerte gleich.*

Beweis. Die von $\psi(t,t')$ und $s(t)$ induzierten Funktionen $\psi | \mathfrak{L}$, $m | \mathfrak{B}$ erfüllen bezüglich der starken Vitalischen Ableitungsbasis $\mathfrak{A}$ die entsprechenden Voraussetzungen von Satz 1. Daher existiert $D\psi(\omega)$ m-fast überall. Wegen der speziellen Form von $\mathfrak{A}$ und wegen

$$\frac{\psi(\langle\alpha,\beta\rangle)}{m(\langle\alpha,\beta\rangle)} = \frac{\psi(\alpha,\beta)}{s(\beta)-s(\alpha)}$$

ergibt sich daraus die Behauptung.

Mit $\mathfrak{B}(a,b)$ bezeichnen wir den σ-Körper der Borelschen Teilmengen von $[a,b]$, mit $\mathfrak{B}(0,+\infty)$ den σ-Körper der Borelschen Teilmengen von $[0,+\infty)$. — Aus [1] übernehmen wir

Definition. Die Funktion $g(t)$ heißt über $[a,b]$ $s(t)$-meßbar, wenn $g(t)$ über $[a,b]-S^{L,R}$ eindeutig und $\mathfrak{B}(a,b)$-meßbar ist, und wenn $g(t)$ für jedes $\tau \in S^{L,R}$ zwei nicht notwendig verschiedene Funktionswerte $g^L(\tau)$, $g^R(\tau)$ besitzt. Weiter heißt $g(t)$ $s(t)$-integrabel, wenn die über Ω definierte Funktion

$$g(\omega) := \begin{cases} g(t) & \text{für} \quad \omega=(t,\lambda) \text{ mit } t \in [a,b]-S^{L,R} \\ g^L(t) & \text{für} \quad \omega=(t,\lambda) \text{ mit } t \in S^{L,R},\ \lambda=2 \\ g^R(t) & \text{für} \quad \omega=(t,\lambda) \text{ mit } t \in S^{L,R},\ \lambda=3 \end{cases}$$

m-integrabel ist; der Wert des $s(t)$-Integrals ist

$$\int_a^b g(t)\, s(dt) := \int_\Omega g(\omega)\, m(d\omega) .$$

Einige Eigenschaften des $s(t)$-Integrals, die in folgendem teilweise benutzt werden, sind in [1, § 4] zusammengestellt.

$g(t)$ ist genau dann $s(t)$-meßbar, wenn $g(\omega)$ $\mathfrak{B}$-meßbar ist. Erfüllen $s(t)$, $\psi(t,t')$ die Voraussetzungen von Satz 2, so gibt es eine $s(t)$-integrable Funktion $\varphi(t)$ mit

$$\int_a^t \psi(I) = \int_a^t \varphi(\tau)\, s(d\tau);$$

$\varphi(t)$ ist bis auf eine σ_0-Nullmenge von Stetigkeitspunkten von $s(t)$ gleich den in Satz 2 auftretenden Limites, genauer:

$$\varphi(t) = \lim_{\tau \nearrow t} \frac{\psi(\tau,t)}{s(t)-s(\tau)} = \lim_{\tau \searrow t} \frac{\psi(t,\tau)}{s(\tau)-s(t)}$$

für σ_0-fast alle $t \in T$,

$$\left.\begin{matrix}\varphi(t)\\ \varphi^L(t)\end{matrix}\right\} = \lim_{\tau \nearrow t} \frac{\psi(\tau,t)}{s(t)-s(\tau)} \qquad \begin{cases}\text{für} & t \in S^L\\ \text{für} & t \in S^{L,R}\end{cases}$$

und

$$\left.\begin{matrix}\varphi(t)\\ \varphi^R(t)\end{matrix}\right\} = \lim_{\tau \searrow t} \frac{\psi(t,\tau)}{s(\tau)-s(t)} \qquad \begin{cases}\text{für} & t \in S^R\\ \text{für} & t \in S^{L,R}\end{cases}$$

(siehe [1, Satz (4.6)]).

Eine unmittelbare Folgerung aus Satz 2 ist

Satz 3. *Sind $\psi_1(t,t')$, $\psi(t,t')$ für $a \leqq t < t' \leqq b$ erklärt mit $0 \leqq \psi_1(t,t') \leqq \psi(t,t')$, sind beide Intervallfunktionen über $[a,b]$ B-integrabel, und definieren wir $s(t) := \int_a^t \psi(I)$ und damit σ_0, S^L etc. wie früher, so existieren*

$$\lim_{\tau \nearrow t} \frac{\psi_1(\tau,t)}{\psi(\tau,t)}$$

für alle $t \in S^L \cup S^{L,R}$ und für σ_0-fast alle $t \in T$ und

$$\lim_{\tau \searrow t} \frac{\psi_1(t,\tau)}{\psi(t,\tau)}$$

für alle $t \in S^R \cup S^{L,R}$ und für σ_0-fast alle $t \in T$.

Beide Grenzwerte sind für σ_0-fast alle $t \in T$ gleich.

Satz 4. *Sind $\psi(t,t')$, $\psi_1(t,t'), \ldots$ über $[a,b]$ nicht-negativ und B-integrabel, ist*

$$\psi(t,t') = \sum_{\mu=1}^{\infty} \psi_\mu(t,t') \qquad \textit{für} \quad a \leqq t < t' \leqq b\,,$$

und gilt

$$\left|\sum_{\mu=m_\varepsilon}^{\infty} \psi_\mu(Z)\right| < \varepsilon \quad \textit{für} \quad Z \geq Z_\varepsilon$$

für jedes $\varepsilon > 0$, so ist

$$\int_a^b \psi(I) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_a^b \psi_\mu(I) .$$

Weiter erhalten wir mit $s(t) := \int_a^t \psi(I)$

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \lim_{\tau \nearrow t} \frac{\psi_\mu(\tau,t)}{\psi(\tau,t)} = 1$$

für $t \in S^L \cup S^{L,R}$ und für σ_0-fast alle $t \in T$, und

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \lim_{\tau \searrow t} \frac{\psi_\mu(t,\tau)}{\psi(t,\tau)} = 1$$

für $t \in S^R \cup S^{L,R}$ und für σ_0-fast alle $t \in T$.

Beweis. Wir setzen

$$\varphi_m(t,t') := \sum_{\mu=1}^{m} \psi_\mu(t,t') .$$

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein Z_0 mit

$$\left|\psi(Z) - \int_a^b \psi(I)\right| < \varepsilon \quad \text{für} \quad Z \geq Z_0$$

und nach Voraussetzung ein m_ε und ein Z_ε mit

$$\psi(Z) - \varepsilon < \varphi_{m_\varepsilon}(Z) \leqq \psi(Z) \quad \text{für} \quad Z \geq Z_\varepsilon .$$

Für $m \geq m_\varepsilon$, $Z \geq Z_\varepsilon$, $Z \geq Z_0$ gilt dann

$$\int_a^b \psi(I) - 2 \cdot \varepsilon < \psi(Z) - \varepsilon < \varphi_{m_\varepsilon}(Z) < \varphi_m(Z) \leqq \psi(Z) < \int_a^b \psi(I) + \varepsilon ;$$

wir erhalten daher

$$\int_a^b \psi(I) = \lim_{m \to \infty} \int_a^b \varphi_m(I) ,$$

was wegen

$$\int_a^b \varphi_m(I) = \sum_{\mu=1}^{m} \int_a^b \psi_\mu(I)$$

die erste Behauptung ergibt. Sind $g_\mu(t)$ die durch

$$\int_a^t g_\mu(\tau)\, s(d\tau) = \int_a^t \psi_\mu(I)$$

bis auf σ_0-Nullmengen $N_\mu \subset T$ eindeutig festgelegten, $s(t)$-integrablen Funktionen, so gilt die Gleichung

$$\int_a^b 1\, s(d\tau) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_a^b g_\mu(\tau)\, s(d\tau) = \int_a^b \Big(\sum_{\mu=1}^{\infty} g_\mu(\tau)\Big)\, s(d\tau)\,,$$

wegen $0 \leqq \sum_{\mu=1}^{\infty} g_\mu(t) \leqq 1$ und des für $s(t)$-Integrale gültigen Satzes von Lebesgue. Daraus folgt, daß bis auf eine σ_0-Nullmenge von Punkten aus T stets $\sum_{\mu=1}^{\infty} g_\mu(t) = 1$ gilt. Nach der vor Satz 3 gemachten Bemerkung erhalten wir schließlich die zweite Behauptung.

Als letzten Satz dieses Paragraphen formulieren wir folgende einfache Existenzaussage:

Satz 5. *Ist $\psi(t,t')$ über $[a,b]$ B-integrabel, und gilt für die Funktion $\psi_1(t,t')$ die Ungleichung*

$$\Big|\psi_1(t_0,t_n) - \sum_{\nu=1}^{n} \psi_1(t_{\nu-1},t_\nu)\Big| \leqq \Big|\psi(t_0,t_n) - \sum_{\nu=1}^{n} \psi(t_{\nu-1},t_\nu)\Big|$$

für beliebige $t_0,t_1,\ldots,t_{n-1}$, t_n mit $a \leqq t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n \leqq b$, so ist ψ_1 über $[a,b]$ ebenfalls B-integrabel.

3. Die verallgemeinerten Palmschen Formeln.

Es sei $x(t)$ ein in $0 \leqq t < +\infty$ definierter Call-Prozeß, d.h. ein stochastischer Prozeß mit

$$\sum_{i=0}^{\infty} p\big(x(t_2) - x(t_1) = i\big) = 1$$

für beliebige t_1, t_2 mit $0 \leqq t_1 < t_2 < +\infty$. $\big(x(t_2) - x(t_1)$ ist mit Wahrscheinlichkeit Eins eine nicht negative, *endliche*, ganze Zahl. Über den Wert $i = \infty$ ist nicht zu summieren.$\big)$ Weiter setzen wir für diesen Paragraphen voraus, daß

$$s(t) := \sup\Big\{\sum_{\nu=1}^{n} p\big(x(t_\nu) - x(t_{\nu-1}) \geqq 1\big):\ 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t\Big\} < +\infty$$

für jedes $t > 0$ ist. (Wegen der Bedeutung dieser Voraussetzung siehe [3] und [4]. In [7, § 7] ist ein ordinärer, stationärer Call-Prozeß konstruiert, der diese Voraussetzung nicht erfüllt.) Führen wir die Abkürzung

$$\Psi_i(t',t'') := p\big(x(t'') - x(t') \geqq i\big) \quad \text{für} \quad 0 \leqq t' < t''\,,$$

$i=1,2,\ldots$, ein, so besagt diese letzte Bedingung nur, daß die Intervallfunktion $\Psi_1(t,t')$ über jedem endlichen Intervall $[a,b]\subset[0,+\infty)$ B-integrabel ist, da

$$\Psi_1(t,t') \leqq \sum_{\nu=1}^{n} \Psi_1(t_{\nu-1},t_\nu)$$

für $t=t_0<t_1<\ldots<t_n=t'$ gilt. ($\Psi_1(t,t')$ ist unteradditiv.) Wegen

$$0 \leqq \Psi_1(t',t'') \leqq E\big(x(t'')-x(t')\big)$$

folgt aus $E\big(x(t)\big)<+\infty$ für jedes $t\geqq 0$ die B-Integrabilität von $\Psi_1(t,t')$ über jedem endlichen Teilintervall der positiven Halbachse. Ist $x(t)$ ein stationärer Call-Prozeß, d.h.

$$\Psi_i(t,t') = \Psi_i(0,t'-t)\,,$$

so liegt B-Integrabilität von $\Psi_1(t,t')$ genau dann vor, wenn der Parameter $\lambda:=\lim_{t\searrow 0}\Psi_1(0,t)/t$ des Call-Prozesses endlich ist; $s(t)$ hat in diesem Fall die Form $s(t)=\lambda t$, wie sich sofort aus Satz 1 ergibt. Für einen Call-Prozeß mit B-integrablen $\Psi_1(t,t')$ braucht natürlich der Erwartungswert $E\big(x(t)\big)$ nicht zu existieren. Wir definieren die Intervallfunktionen

$$\Psi_{i,k}(t',t'';b) := p\big(x(t'')-x(t')\geqq i,\, x(b)-x(t'')\geqq k\big)$$

$(0\leqq t'<t''\leqq b)$; für jedes $b\geqq t''$ ist $\Psi_{i,0}(t',t'';b)=\Psi_i(t',t'')$. Zunächst beweisen wir

Lemma. *Für $i=1,2,\ldots$; $k=0,1,2,\ldots$; $0\leqq t_0<t_1<\ldots<t_n\leqq b$ gilt*

$$\left|\Psi_{i,k}(t_0,t_n;b) - \sum_{\nu=1}^{n}\Psi_{i,k}(t_{\nu-1},t_\nu;b)\right| \leqq \sum_{\nu=1}^{n}\Psi_1(t_{\nu-1},t_\nu) - \Psi_1(t_0,t_n)\,.$$

Beweis. a) Es sei $n=2$. Mit den Abkürzungen

$$z := x(b)-x(t_2),\qquad z_1 := x(t_1)-x(t_0),\qquad z_2 := x(t_2)-x(t_1)$$

gilt

$$\begin{aligned}\Psi_1(t_0,t_1)+\Psi_1(t_1,t_2) &= p(z_1\geqq 1)+p(z_2\geqq 1)\\ &= p(z_1\geqq 1,z_2=0) + p(z_1\geqq 1,z_2\geqq 1) + p(z_2\geqq 1)\\ &= p(z_1+z_2\geqq 1) + p(z_1\geqq 1,z_2\geqq 1)\\ &= \Psi_1(t_0,t_2) + p(z_1\geqq 1,z_2\geqq 1)\,.\end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}\Psi_{i,k}(t_0,t_2;b) &= p(z_1+z_2\geqq i,z\geqq k)\\ &\leqq p(z_1\geqq i,z_2=0,z\geqq k)+p(z_1=0,z_2\geqq i,z\geqq k)\\ &\quad +p(z_1\geqq 1,z_2\geqq 1,z_1+z_2\geqq i,z\geqq k)\\ &\leqq \Psi_{i,k}(t_0,t_1;b) + \Psi_{i,k}(t_1,t_2;b)+p(z_1\geqq 1,z_2\geqq 1)\\ &= \sum_{\nu=1}^{2}\Psi_{i,k}(t_{\nu-1},t_\nu;b) + \sum_{\nu=1}^{2}\Psi_1(t_{\nu-1},t_\nu) - \Psi_1(t_0,t_2)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=1}^{2} \Psi_{i,k}(t_{\nu-1},t_\nu;b) & \\
&= p(z_1\geqq i, z_2+z\geqq k) + p(z_2\geqq i, z\geqq k)\\
&= p(z_1\geqq i, z_2=0, z\geqq k) + p(z_1\geqq i, z_2\geqq 1, z_2+z\geqq k) + p(z_2\geqq i, z\geqq k)\\
&\leqq p(z_1+z_2\geqq i, z\geqq k) + p(z_1\geqq 1, z_2\geqq 1)\\
&= \Psi_{i,k}(t_0,t_2;b) + \sum_{\nu=1}^{2}\Psi_1(t_{\nu-1},t_\nu) - \Psi_1(t_0,t_2)\,.
\end{aligned}$$

Für $n=2$ ist also die Aussage des Lemmas bewiesen.

b) Wenden wir nun vollständige Induktion an, so erhalten wir wegen

$$\begin{aligned}
&\left|\Psi_{i,k}(t_0,t_n;b) - \sum_{\nu=1}^{n}\Psi_{i,k}(t_{\nu-1},t_\nu;b)\right|\\
&\qquad \leqq |\Psi_{i,k}(t_0,t_n;b)-\Psi_{i,k}(t_0,t_1;b)-\Psi_{i,k}(t_1,t_n;b)| +\\
&\qquad\quad + \left|\Psi_{i,k}(t_1,t_n;b)-\sum_{\nu=2}^{n}\Psi_{i,k}(t_{\nu-1},t_\nu;b)\right|\\
&\qquad \leqq \Psi_1(t_0,t_1) + \Psi_1(t_1,t_n) - \Psi_1(t_0,t_n) + \sum_{\nu=2}^{n}\Psi_1(t_{\nu-1},t_\nu) - \Psi_1(t_1,t_n)
\end{aligned}$$

sofort die Behauptung.

Aus diesem Lemma und aus Satz 5 folgt, daß die Intervallfunktionen $\Psi_{i,k}(t,t';b)$, $\Psi_i(t,t')$ und damit auch

$$\begin{aligned}
\psi_{i,k}(t',t'';b) &:= p\big(x(t'')-x(t')=i, x(b)-x(t'')=k\big)\\
&= \Psi_{i,k}(t',t'';b)-\Psi_{i,k+1}(t',t'';b)-\Psi_{i+1,k}(t',t'';b)+\Psi_{i+1,k+1}(t',t'';b)
\end{aligned}$$

und

$$\psi_i(t',t'') := p\big(x(t'')-x(t')=i\big) = \Psi_i(t',t'')-\Psi_{i+1}(t',t'')$$

über jedem endlichen Teilintervall von $[0,b]$ bzw. von $[0,+\infty)$ B-integrabel sind.

Bezeichnen wir mit σ_i das Maß über $\mathfrak{B}(0,+\infty)$, das vom Stetigkeitsanteil von

$$s_i(t) := \int_0^t \psi_i(I), \qquad i=1,2,\ldots\,,$$

definiert wird und mit σ_0 das vom Stetigkeitsanteil von $s(t)$ definierte Maß, so existieren wegen

$$0 \leqq \psi_{i,k}(t',t'';b) \leqq \psi_i(t',t'') \leqq \Psi_i(t',t'') \leqq \Psi_1(t',t'')$$

und wegen

$$0 \leqq \Psi_{i,k}(t',t'';b) \leqq \Psi_1(t',t'')$$

nach Satz 3

$$\lim_{\tau \nearrow t} p\bigl(x(t)-x(\tau)=i \mid x(t)-x(\tau) \geqq 1\bigr) = \lim_{\tau \nearrow t} \frac{\psi_i(\tau,t)}{\Psi_1(\tau,t)}$$

und

$$\lim_{\tau \nearrow t} p\bigl(x(b)-x(t)=k \mid x(t)-x(\tau) \geqq 1\bigr) = \lim_{\tau \nearrow t} \frac{\Psi_{1,k}(\tau,t;b)-\Psi_{1,k+1}(\tau,t;b)}{\Psi_1(\tau,t)}$$

für σ_0-fast alle $t \in T$ und alle $t \in S^L \cup S^{L,R}$ und analog

$$\lim_{\tau \searrow t} p\bigl(x(\tau)-x(t)=i \mid x(\tau)-x(t) \geqq 1\bigr)$$

und

$$\lim_{\tau \searrow t} p\bigl(x(b)-x(\tau)=k \mid x(\tau)-x(t) \geqq 1\bigr)$$

für σ_0-fast alle $t \in T$ und alle $t \in S^R \cup S^{L,R}$. Auf T sind die Grenzwerte $\tau \nearrow t$ σ_0-fast überall gleich den Grenzwerten bei $\tau \searrow t$. Ebenso existieren die Grenzwerte von

$$p\bigl(x(b)-x(t)=k \mid x(t)-x(\tau)=i\bigr) = \frac{\psi_{i,k}(\tau,t;b)}{\psi_i(\tau,t)}$$

für $\tau \nearrow t$ für σ_i-fast alle t und für alle t mit $s_i(t-0) < s_i(t)$ und die entsprechenden Grenzwerte für $\tau \searrow t$ bis auf ebensolche Ausnahmemengen.

Eine Funktion $\varphi(t;b)$, die $s(t)$-integrabel in t (bei festem b) in jedem endlichen Teilintervall von $[0,+\infty)$ bzw. $[0,b]$ ist, nennen wir kurz $s(t)$-integrabel. Es gilt

Satz 5. *Es existieren $s(t)$-integrable Funktionen*

$$p_i(t) \mid 0 \leqq t < +\infty\,,$$
$$\varphi_{\cdot,k}(t;b) \mid 0 \leqq t \leqq b < +\infty\,,$$
$$\varphi_{i,k}(t;b) \mid 0 \leqq t \leqq b < +\infty$$

mit folgenden Eigenschaften:

a) *Es gibt eine σ_0-Nullmenge $N \subset T$ derart, daß für $i=1,2,\ldots$ gilt:*

$$\begin{aligned} p_i(t) &= \lim_{\tau \nearrow t} p\bigl(x(t)-x(\tau)=i \mid x(t)-x(\tau) \geqq 1\bigr) \\ &= \lim_{\tau \searrow t} p\bigl(x(\tau)-x(t)=i \mid x(\tau)-x(t) \geqq 1\bigr) \end{aligned}$$

für alle $t \in T-N$,

$$\left.\begin{matrix} p_i(t) \\ p_i^L(t) \end{matrix}\right\} = \lim_{\tau \nearrow t} p\bigl(x(t)-x(\tau)=i \mid x(t)-x(\tau) \geqq 1\bigr) \qquad \begin{matrix} \textit{für } t \in S^L \\ \textit{für } t \in S^{L,R} \end{matrix}$$

und

$$\left.\begin{matrix} p_i(t) \\ p_i^R(t) \end{matrix}\right\} = \lim_{\tau \searrow t} p(x(\tau)-x(t)=i \mid x(\tau)-x(t) \geqq 1) \qquad \begin{matrix} \textit{für } t \in S^R \\ \textit{für } t \in S^{L,R}\,. \end{matrix}$$

b) *Zu jedem* b *mit* $0<b<+\infty$ *gibt es eine* σ_0*-Nullmenge* $N(b)\subset T\cap(0,b)$, *so daß für* $k=0,1,2,\ldots$

$$\begin{aligned}\varphi_{\cdot,k}(t;b) &= \lim_{\tau\nearrow t} p\big(x(b)-x(t)=k \mid x(t)-x(\tau)\geqq 1\big)\\ &= \lim_{\tau\searrow t} p(x(b)-x(\tau)=k \mid x(\tau)-x(t)\geqq 1)\end{aligned}$$

für alle $t\in T\cap(0,b)-N(b)$ *gilt, und die entsprechenden Gleichungen für* $t\in S^L$, $t\in S^R$ *und* $t\in S^{L,R}$ *bestehen, und für* $i=1,2,\ldots;\ k=0,1,2,\ldots$ *die Gleichungen*

$$\begin{aligned}\varphi_{i,k}(t;b) &= \lim_{\tau\nearrow t} p\big(x(b)-x(t)=k \mid x(t)-x(\tau)=i\big)\\ &= \lim_{\tau\searrow t} p\big(x(b)-x(\tau)=k \mid x(\tau)-x(t)=i\big)\end{aligned}$$

für alle $t\in T\cap(0,b)-N(b)$ *mit* $p_i(t)\neq 0$,

$$\varphi_{i,k}(t;b) = \lim_{\tau\nearrow t} p\big(x(b)-x(t)=k \mid x(t)-x(\tau)=i\big)$$

für alle $t\in S^L$ *mit* $p_i(t)\neq 0$,

$$\varphi^L_{i,k}(t;b) = \lim_{\tau\nearrow t} p\big(x(b)-x(t)=k \mid x(t)-x(\tau)=i\big)$$

für alle $t\in S^{L,R}$ *mit* $p_i{}^L(t)\neq 0$,

$$\varphi^R_{i,k}(t;b) = \lim_{\tau\searrow t} p\big(x(b)-x(\tau)=k \mid x(\tau)-x(t)=i\big)$$

für alle $t\in S^{L,R}$ *mit* $p_i{}^R(t)\neq 0$, *und die entsprechende Gleichung für alle* $t\in S^R$ *mit* $p_i(t)\neq 0$ *erfüllt sind.*

Dieser Satz ist wegen $s_i(t)=\int_0^t p_i(\tau)\,s(d\tau)$ nur eine Zusammenfassung des Vorhergehenden.

Satz 6. *Für die in Satz 5 eingeführten* $s(t)$*-integrablen Funktionen gelten bis auf eine* σ_0*-Nullmenge bzw.* σ_i*-Nullmenge die folgenden Beziehungen:*

a) $0\leqq p_i(t)\leqq 1,\quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i(t)=1;$

b) $0\leqq \varphi_{\cdot,k}(t;b)\leqq 1,\quad \sum_{k=0}^{\infty}\varphi_{\cdot,k}(t;b)=1,$

$0\leqq \varphi_{i,k}(t;b)\leqq 1,\quad \sum_{k=0}^{\infty}\varphi_{i,k}(t;b)=1;$

c) $\sum_{i=1}^{\infty} p_i(t)\,\varphi_{i,k}(t;b)=\varphi_{\cdot,k}(t;b).$

Beweis. Nach dem am Anfang dieses Paragraphen angegebenen Lemma ist

$$\Psi_{i,k}(Z;b) \leqq \Psi_{i,k}(Z_1;b)+\Psi_1(Z)-\Psi_1(Z_1) \qquad \text{für} \quad Z \geq Z_1 .$$

Wählen wir zu vorgegebenem $\varepsilon>0$ die Intervallunterteilung Z_1 von $[0,b]$ so, daß $|\Psi_1(Z)-\Psi_1(Z_1)|<\varepsilon$ für alle $Z \geq Z_1$ gilt, und zu Z_1 die natürliche Zahl m_ε so, daß

$$\Psi_{m_\varepsilon,0}(Z_1;b) < \varepsilon, \qquad \Psi_{1,m_\varepsilon}(Z_1;b) < \varepsilon$$

ist, so erhalten wir für jede Intervallunterteilung Z von $[0,b]$ mit $Z \geqq Z_1$ und für $m \geqq m_\varepsilon$

$$|\Psi_{m,k}(Z;b)| < 2\varepsilon \qquad \text{und} \qquad |\Psi_{i,m}(Z;b)| < 2\varepsilon ,$$

$k=0,1,\ldots;\ i=1,2,\ldots.$ Wegen

$$\Psi_m(t,t') = \sum_{i=m}^{\infty} p\bigl(x(t')-x(t)=i\bigr),$$

$$\Psi_{1,m}(t,t';b) = \sum_{k=m}^{\infty} p\bigl(x(b)-x(t')=k,\ x(t')-x(t)\geqq 1\bigr),$$

$$\Psi_{i,m}(t,t';b)-\Psi_{i+1,m}(t,t';b) = \sum_{k=m}^{\infty} p\bigl(x(b)-x(t')=k,\ x(t')-x(t)=i\bigr)$$

und

$$\Psi_{m,k}(t,t';b)-\Psi_{m,k+1}(t,t';b) = \sum_{i=m}^{\infty} p\bigl(x(b)-x(t')=k,\ x(t')-x(t)=i\bigr)$$

ergibt Satz 4 die nichttrivialen Behauptungen von Satz 6. Für die Aussage c) ist jedoch eine einfache Modifikation von Satz 4 notwendig.

Im nächsten Satz können wir nun die verallgemeinerten Palmschen Formeln zusammenstellen.

Satz 7. *Für jeden Call-Prozeß mit B-integrablem $\Psi_1(t',t'')$ gilt für* $0 \leqq a < b < +\infty$

$$p\bigl(x(b)-x(a)=0\bigr) = 1 - \int_a^b \varphi_{\cdot,0}(t;b)\, s(dt),$$

$$p\bigl(x(b)-x(a)=k\bigr) = \sum_{i=1}^{k} \int_a^b p_i(t)\, \varphi_{i,k-i}(t;b)\, s(dt) - \int_a^b \varphi_{\cdot,k}(t;b)\, s(dt),$$

$k=1,2,\ldots.$

Beweis. $p\bigl(x(b)-x(t)=i\bigr)$ ist als Funktion von t totalstetig bezüglich $s(t)$, $i=0,1,\ldots.$ Für $0 \leqq t' < t'' \leqq b$ gilt

$$\begin{aligned} p\big(x(b)-x(t')=0\big) &= p\big(x(b)-x(t'')=0,\, x(t'')-x(t')=0\big) \\ &= p\big(x(b)-x(t'')=0\big) - p\big(x(b)-x(t'')=0,\, x(t'')-x(t')\geqq 1\big) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} p\big(x(b)-x(t')=k\big) &= \sum_{j=0}^{k} p\big(x(b)-x(t'')=k-j,\, x(t'')-x(t')=j\big) \\ &= \sum_{j=1}^{k} p\big(x(b)-x(t'')=k-j,\, x(t'')-x(t')=j\big) + \\ &\quad + p\big(x(b)-x(t'')=k\big) - p\big(x(b)-x(t'')=k,\, x(t'')-x(t')\geqq 1\big)\,. \end{aligned}$$

Gehen wir zur Grundmenge Ω über, und bilden wir die $\mathfrak{A}$-Ableitungen $D\chi_0$, $D\chi_k$ der Intervallfunktionen

$$\chi_0(\langle t',t''\rangle) := \psi_0(t'',b)-\psi_0(t',b), \qquad \chi_k(\langle t',t''\rangle) := \psi_k(t'',b)-\psi_k(t',b)$$

bezüglich m, so erhalten wir (mit den Bezeichnungen von Seite 129)

$$\begin{aligned} D\chi_0(\omega) &= \varphi_{\cdot,0}(\omega\,;\, b)\,, \\ D\chi_k(\omega) &= \varphi_{\cdot,k}(\omega\,;\, b) - \sum_{j=1}^{k} p_j(\omega)\cdot\varphi_{j,k-j}(\omega\,;\, b) \end{aligned}$$

für m-fast alle $\omega\in\Omega$. Wegen der Totalstetigkeit von $p\big(x(b)-x(t)=i\big)$ folgt daraus

$$p\big(x(b)-x(a)=i\big)-p\big(x(b)-x(b)=i\big) = -\int_\Omega D\chi_i(\omega)\, m(d\omega)\,,$$

also nach Übergang zu den $s(t)$-Integralen:

$$p\big(x(b)-x(a)=0\big) = 1 - \int_a^b \varphi_{\cdot,0}(t\,;\, b)\, s(dt)\,,$$

$$p\big(x(b)-x(a)=k\big) = \sum_{j=1}^{k}\int_a^b p_i(t)\,\varphi_{j,k-j}(t\,;\, b)\, s(dt) - \int_a^b \varphi_{\cdot,k}(t\,;\, b)\, s(dt)$$

für $k=1,2,\ldots$, was zu beweisen war.

4. Zwei Sätze von Khintchine.

In diesem Paragraphen sei $x(t)$ ein Call-Prozeß ohne Nachwirkungen (d.h. $x(t_2)-x(t_1)$ und $x(t_4)-x(t_3)$ sind unabhängig für $0\leqq t_1<t_2\leqq t_3<t_4<+\infty$). Zunächst beweisen wir (in [5] ist unter anderen Voraussetzungen eine ähnliche Aussage bewiesen)

Satz 8. *Für einen Call-Prozeß $x(t)$ ohne Nachwirkungen gilt*

$$\sup\left\{\sum_{\nu=1}^{n} p\big(x(t_\nu)-x(t_{\nu-1})\geqq 1\big):\ a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b\right\} < +\infty$$

für beliebige a, b mit $0\leqq a<b<+\infty$.

Beweis. Aus der Annahme

$$\sup\left\{\sum_{\nu=1}^{n} p\big(x(t_\nu)-x(t_{\nu-1})\geqq 1\big):\ a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b\right\} = +\infty$$

folgt die Existenz von $\tau_1,\ldots,\tau_{n_0-1}$ mit $a=:\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_{n_0}:=b$ und mit

$$\sum_{\nu=1}^{n_0} p\big(x(\tau_\nu)-x(\tau_{\nu-1})\geqq 1\big) \geqq 1\,.$$

Ferner gibt es ein $\nu_0\in\{1,\ldots,n_0\}$ mit

$$\sup\left\{\sum_{\mu=1}^{m} p(x(t_\mu)-x(t_{\mu-1})\geqq 1):\ \tau_{\nu_0-1}=t_0<t_1<\ldots<t_m=\tau_{\nu_0}\right\} = +\infty\,.$$

Es sei

$$\begin{aligned}
z_1 &:= x(\tau_1)-x(a)\,,\\
z_2 &:= x(\tau_2)-x(\tau_1)\,,\\
&\ \vdots\\
z_{\nu_0-1} &:= x(\tau_{\nu_0-1})-x(\tau_{\nu_0-2})\,,\\
z_{\nu_0} &:= x(\tau_{\nu_0+1})-x(\tau_{\nu_0})\,,\\
&\ \vdots\\
z_{n_0-1} &:= x(b)-x(\tau_{n_0-1})\,.
\end{aligned}$$

Ebenso gibt es wieder $\tau_{11},\ldots,\tau_{1m_0-1}$ mit $\tau_{\nu_0-1}=\tau_{10}<\tau_{11}<\ldots<\tau_{1m_0}=\tau_{\nu_0}$ und mit

$$\sum_{\mu=1}^{m_0} p\big(x(\tau_{1\mu})-x(\tau_{1\mu-1})\geqq 1\big) \geqq 2;$$

ferner existiert ein μ_0 derart, daß Ψ_1 über $[\tau_{1\mu_0-1},\tau_{1\mu_0}]$ nicht B-integrabel ist. Setzen wir nun wieder

$$\begin{aligned}
z_{n_0} &:= x(\tau_{11})-x(\tau_{\nu_0-1})\\
&\ \vdots\\
z_{n_0+\mu_0-2} &:= x(\tau_{1\mu_0-1})-x(\tau_{1\mu_0-2})\\
z_{n_0+\mu_0-1} &:= x(\tau_{1\mu_0+1})-x(\tau_{1\mu_0})\\
&\ \vdots\\
z_{n_0+m_0-2} &:= x(\tau_{\nu_0})-x(\tau_{1m_0-1})
\end{aligned}$$

und wenden auf das Intervall $[\tau_{1\mu_0-1}, \tau_{1\mu_0}]$ wieder das gleiche Verfahren an usw., so erhalten wir eine Folge $z_1, z_2, \ldots$ von unabhängigen Zufallsvariablen mit

$$\sum_{\varrho=1}^{\infty} p(\{z_\varrho \geqq 1\}) = +\infty .$$

Nach dem Borel-Cantellischen Lemma treten daher mit Wahrscheinlichkeit Eins unendlich viele der Ereignisse $\{z_\varrho \geqq 1\}$ ein; folglich ist $p\big(x(b) - x(a) = +\infty\big) = 1$, was aber ein Widerspruch zur Definition des Call-Prozesses ist.

Wegen

$$\begin{aligned} p\big(x(b)-x(t'')=k \mid x(t'')-x(t') \geqq 1\big) &= p\big(x(b)-x(t'')=k \mid x(t'')-x(t')=i\big) \\ &= p\big(x(b)-x(t'')=k\big) \end{aligned}$$

erhalten wir

$$\varphi_{\cdot,k}(t;b) = \varphi_{i,k}(t;b) = p\big(x(b)-x(t)=k\big)$$

für $t \in S^L \cap (0,b]$ und für σ_0-fast alle $t \in [0,b] - (S^L \cup S^R \cup S^{L,R})$,

$$\varphi_{\cdot,k}(t;b) = \varphi_{i,k}(t;b) = \lim_{\tau \searrow t} p\big(x(b)-x(\tau)=k\big)$$

für $t \in S^R \cap [0,b)$ und

$$\varphi^L_{\cdot,k}(t;b) = \varphi^L_{i,k}(t;b) = p\big(x(b)-x(t)=k\big)$$

für $t \in S^{L,R} \cap (0,b]$,

$$\varphi^R_{\cdot,k}(t;b) = \varphi^R_{i,k}(t;b) = \lim_{\tau \searrow t} p\big(x(b)-x(\tau)=k\big)$$

für $t \in S^{L,R} \cap (0,b)$.

Definieren wir für $|z| \leqq 1$, z reell, die erzeugenden Funktionen

$$\Pi(z;t,b) := \sum_{k=0}^{\infty} p\big(x(b)-x(t)=k\big)\, z^k$$

und

$$\Phi(z;t,b) := \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{\cdot,k}(t;b)\, z^k ,$$

für $0 \leqq t \leqq b$, so ist $\Phi(z;t,b)$ bei festen z und bei festem b über jedem Teilintervall von $[0,b]$ $s(t)$-integrabel, ferner

$$\begin{aligned} \Phi(z;t,b) &= \Pi(z;t,b) && \text{für} \quad \text{alle } t \in [0,b] - (S^R \cup S^{L,R}) , \\ \Phi(z;t,b) &= \Pi(z;t+0,b) && \text{für} \quad t \in [0,b) \cap S^R , \\ \Phi^L(z;t,b) &= \Pi(z;t,b) && \text{für} \quad t \in (0,b] \cap S^{L,R} , \\ \Phi^R(z;t,b) &= \Pi(z;t+0,b) && \text{für} \quad t \in (0,b) \cap S^{L,R} . \end{aligned}$$

Aus den verallgemeinerten Palmschen Formeln ergibt sich

$$\Pi(z;t,b) = 1 - \int_t^b \varphi_{\cdot,0}(\tau;b)\, s(d\tau) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} \int_t^b p_i(\tau)\, \varphi_{\cdot,k-i}(\tau;b)\, z^k\, s(d\tau) - \int_t^b \varphi_{\cdot,k}(\tau;b) z^k\, s(d\tau) \right)$$

und nach Vertauschung der Summationsreihenfolge

$$(*) \qquad \Pi(z;t,b) = 1 + \int_t^b \Phi(z;\tau,b)\, P(z;\tau)\, s(d\tau)$$

mit

$$P(z;\tau) := \sum_{k=1}^{\infty} p_k(\tau) z^k - 1 .$$

Definieren wir für $0 < z < \frac{1}{2}$ und für $0 \leqq t \leqq b$ die Funktion

$$\Theta(z;t,b) := \ln \Pi(z;t,b) ,$$

so gilt wegen

$$\Pi(z;t_1,b) = \Pi(z;t_1,t_2)\, \Pi(z;t_2,b) \qquad \text{für} \quad 0 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq b$$

zunächst

$$\Theta(z;t_2,b) - \Theta(z;t_1,b) = -\ln \Pi(z;t_1,t_2) .$$

Weiter ist für $|z| \leqq \frac{1}{2}$ stets

$$|1 - \Pi(z;t_1,t_2)| \leqq p\big(x(t_2) - x(t_1) \geqq 1\big) \sum_{k=0}^{\infty} |z|^k \leqq 2\big(s(t_2) - s(t_1)\big)$$

und damit für t_1, t_2 mit $s(t_2) - s(t_1) \leqq \frac{1}{4}$ auch

$$|\Theta(z;t_1,b) - \Theta(z;t_2,b)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\big(1 - \Pi(z;t_1,t_2)\big)^n}{n} \right|$$

$$\leqq \sum_{n=1}^{\infty} [2\big(s(t_2) - s(t_1)\big)]^n$$

$$\leqq [s(t_2) - s(t_1)] \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = 4[s(t_2) - s(t_1)];$$

das bedeutet, daß die Intervallfunktion $\Theta(z;t_2,b) - \Theta(z;t_1,b)$ bezüglich $s(t_2) - s(t_1)$ totalstetig ist. Folglich existiert eine $s(t)$-integrable Funktion $\vartheta(z;t,b)$ mit

$$\Theta(z;t,b) = \int_t^b \vartheta(z;\tau,b)\, s(d\tau) \qquad \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq b$$

(vgl. hierzu die Ausführungen vor Satz 3 und [1, § 4]). Aus (*) können wir $\vartheta(z;t,b)$ berechnen.

Ist $t \in (0,b] \cap T$, so ist auch $\Pi(z;t-0,b) = \Pi(z;t,b)$ und damit bis auf eine σ_0-Nullmenge von t-Werten

$$\begin{aligned}\vartheta(z;t,b) &= -\lim_{\tau \nearrow t} \frac{\Theta(z;t,b)-\Theta(z;\tau,b)}{s(t)-s(\tau)} \\ &= -\lim_{\tau \nearrow t} \frac{\ln \Pi(z;t,b)-\ln \Pi(z;\tau,b)}{\Pi(z;t,b)-\Pi(z;\tau,b)} \lim_{\tau \nearrow t} \frac{\Pi(z;t,b)-\Pi(z;\tau,b)}{s(t)-s(\tau)} \\ &= \frac{-1}{\Pi(z;t,b)} \lim_{\tau \nearrow t} \frac{\Pi(z;t,b)-\Pi(z;\tau,b)}{s(t)-s(\tau)} = P(z;t)\,,\end{aligned}$$

da der letzte Limes für σ_0-fast alle Stetigkeitspunkte von $s(t)$ gleich

$$-\Phi(z;t,b)\cdot P(z;t) = -\Pi(z;t,b)\,P(z;t)$$

ist. Ist $t \in (0,b] \cap (S^L \cup S^{L,R})$, so folgt aus (*)

$$\Pi(z;t-0,b) = \begin{cases} \Pi(z;t,b)\,[1+P(z;t)\,(s(t)-s(t-0))], & t \in S^L\,, \\ \Pi(z;t,b)\,[1+P^L(z;t)\,(s(t)-s(t-0))], & t \in S^{L,R}\,, \end{cases}$$

und damit

$$\begin{aligned}&\lim_{\tau \nearrow t} \frac{\Theta(z;t,b)-\Theta(z;\tau,b)}{s(t)-s(\tau)} \\ &\qquad = \lim_{\tau \nearrow t} \frac{1}{s(t)-s(\tau)} \ln \frac{\Pi(z;t,b)}{\Pi(z;\tau,b)} \\ &\qquad = \frac{-1}{s(t)-s(t-0)} \begin{cases} \ln[1+P(z;t)\cdot(s(t)-s(t-0))], & t \in S^L\,, \\ \ln[1+P^L(z;t)\cdot(s(t)-s(t-0))], & t \in S^{L,R}\,, \end{cases}\end{aligned}$$

also

$$\vartheta(z;t,b) = \frac{1}{s(t)-s(t-0)} \ln[1+P(z;t)\cdot(s(t)-s(t-0))], \quad t \in S^L\,,$$

und

$$\vartheta^L(z;t,b) = \frac{1}{s(t)-s(t-0)} \ln[1+P^L(z;t)\cdot(s(t)-s(t-0))], \quad t \in S^{L,R}\,.$$

Ebenso erhält man

$$\vartheta(z;t,b) = \frac{1}{s(t+0)-s(t)} \ln[1+P(z;t)\,(s(t+0)-s(t))], \quad t \in S^R\,,$$

und

$$\vartheta^R(z;t,b) = \frac{1}{s(t+0)-s(t)} \cdot \ln[1+P^R(z;t)\,(s(t+0)-s(t))], \quad t \in S^{L,R}\,.$$

Bildet man das $s(t)$-Integral der Funktion $\vartheta(z; t,b)$, so ergibt sich die Behauptung des nächsten Satzes; die im Beweis notwendige Einschränkung $0<z<\frac{1}{2}$ kann man nunmehr wieder durch $|z|\leqq 1$ ersetzen, da die auftretenden Potenzreihen in diesem Bereich konvergieren.

Satz 9. *Für jeden Call-Prozeß ohne Nachwirkungen hat die erzeugende Funktion $\Pi(z; a,b)$ die Form*

$$\Pi(z; a,b) = \exp\left\{\int\limits_{(a,b]\cap T} P(z;t)\,\sigma_0(dt)\right\} U_1(z; a,b)\, U_2(z; a,b)$$

mit

$$P(z; t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t)\, z^k - 1 ,$$

$$U_1(z; a,b) := \prod_{\tau\in(a,b]\cap S^L} \big(1+P(z;\tau)\,[s(\tau)-s(\tau-0)]\big) \cdot \prod_{\tau\in(a,b]\cap S^{L,R}} \big(1+P^L(z;\tau)\,[s(\tau)-s(\tau-0)]\big)$$

und

$$U_2(z; a,b) := \prod_{\tau\in[a,b)\cap S^R} \big(1+P(z;\tau)\,[s(\tau+0)-s(\tau)]\big) \cdot \prod_{\tau\in[a,b)\cap S^{L,R}} \big(1+P^R(z;\tau)\,[s(\tau+0)-s(\tau)]\big) .$$

Khintchine hat in [8] diesen Satz unter der zusätzlichen Voraussetzung »$E\big(x(t)\big)< +\infty$ für jedes $t\geqq 0$« mit anderen Hilfsmitteln bewiesen. Die Umkehrung kann man aus [8] übernehmen. Für die in [8] beim regulären Fall auftretenden Funktionen $\chi_k(\beta)$ erhält man

$$\chi_k(\beta) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^\beta p_k(t)\, s(dt) = \int_0^\beta \psi_k(I), & k\geqq 1 \\[2ex] \displaystyle -s(\beta) = -\int_0^\beta \psi_1(I), & k=0; \end{cases}$$

die Darstellung der $\chi_k(\beta)$ als Burkill-Integrale ist bereits in [14] enthalten.

Als einfachstes Beispiel erhalten wir für $p_1(t)=1$, $p_k(t)=0$ für $k\geqq 2$, $s(t)=\lambda t$ den Poisson-Prozeß mit der erzeugenden Funktion

$$\Pi(z; a,b) = e^{(z-1)\lambda(b-a)} .$$

Einfach ist nun der Beweis für folgenden Satz, der eine Präzisierung des Ergebnisses von [9] ist.

SATZ 10. *Für einen Call-Prozeß $x(t)$ gilt*

$$p\big(x(b)-x(a)=k\big) = e^{-(\Lambda(b)-\Lambda(a))}\frac{[\Lambda(b)-\Lambda(a)]^k}{k!}$$

für $k=0,1,\dots$ mit monoton nicht fallendem $\Lambda(t)$ genau dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) *$x(t)$ ist ohne Nachwirkungen;*

b) *der Stetigkeitsanteil von $\Lambda(t)$ ist bis auf eine additive Konstante gleich dem Stetigkeitsanteil von $s(t)$; das Stetigkeitsverhalten von $\Lambda(t)$ ist in jedem Punkt gleich dem Stetigkeitsverhalten von $s(t)$;*

c) $\Lambda(t)-\Lambda(t-0)=-\ln\{1-(s(t)-s(t-0))\}$ *für* $t\in S^L\cup S^{L,R}$,
$\Lambda(t+0)-\Lambda(t)=-\ln\{1-(s(t+0)-s(t))\}$ *für* $t\in S^R\cup S^{L,R}$;

d) $p_1(t)=1$, $p_k(t)=0$ *für* $k\geqq 2$ *σ_0-fast überall auf T;*

e) $$\left.\begin{matrix}p_k(t)\\ p_k{}^L(t)\end{matrix}\right\} = \frac{1}{s(t)-s(t-0)}\,e^{-(\Lambda(t)-\Lambda(t-0))}\,\frac{[\Lambda(t)-\Lambda(t-0)]^k}{k!}$$

für $t\in S^L$ resp. $t\in S^{L,R}$;

$$\left.\begin{matrix}p_k(t)\\ p_k{}^R(t)\end{matrix}\right\} = \frac{1}{s(t+0)-s(t)}\,e^{-(\Lambda(t+0)-\Lambda(t))}\,\frac{[\Lambda(t+0)-\Lambda(t)]^k}{k!}$$

für $t\in S^R$ resp. $t\in S^{L,R}$.

BEWEIS. 1) $p\big(x(b)-x(a)=k\big)$ hat genau dann die angegebene Gestalt, wenn $x(b)-x(a)$ die erzeugende Funktion $\Pi(z;a,b)=\exp\{(\Lambda(b)-\Lambda(a))(z-1)\}$ hat.

2) Erfüllt der Call-Prozeß $x(t)$ die Forderungen a)–e), so hat nach Satz 9 $x(b)-x(a)$ die erzeugende Funktion $\exp\{(\Lambda(b)-\Lambda(a))(z-1)\}$.

3) Hat $x(t')-x(t)$ für $0\leqq t<t'<+\infty$ die erzeugende Funktion $\exp\{(\Lambda(t')-\Lambda(t))(z-1)\}$, so ist $x(t)$ ohne Nachwirkungen. Die erzeugende Funktion $\Pi(z;a,b)$ hat daher die in Satz 9 angegebene Gestalt.

Zerlegt man beide Darstellungen der erzeugenden Funktion $\Pi(z;a,b)$ in den Anteil von $S^L\cap(a,b]$:

$$\prod_{\tau\in S^L\cap(a,b]}\Pi(z;\tau-0,\tau)\,,$$

in den entsprechenden Anteil von $S^R\cap[a,b)$, in den Anteil von $S^{L,R}\cap[a,b]$:

$$\Bigg(\prod_{\tau\in S^{L,R}\cap(a,b]}\Pi(z;\tau-0,\tau)\Bigg)\Bigg(\prod_{\tau\in S^{L,R}\cap[a,b)}\Pi(z;\tau,\tau+0)\Bigg)$$

und in den Anteil von $T\cap[a,b]$, so erhält man durch Vergleichen

$$1 + P(z;\tau)\,[s(\tau)-s(\tau-0)] = \exp\{(\Lambda(\tau)-\Lambda(\tau-0))(z-1)\}$$

für $\tau \in S^L$ und entsprechend für $\tau \in S^R$ und $\tau \in S^{L,R}$ und für den Anteil von $T \cap [a,b]$ schließlich

$$\exp\left\{\int_{(a,b]\cap T} P(z;\tau)\,\sigma_0(d\tau)\right\} = \exp\{(\Lambda_0(b)-\Lambda_0(a))(z-1)\}\ ,$$

wobei zur Abkürzung

$$\Lambda_0(t) := \Lambda(t) - \sum_{\tau\in S^L(t)} (\Lambda(\tau)-\Lambda(\tau-0)) - \sum_{\tau\in S^R(t)} (\Lambda(\tau+0)-\Lambda(\tau))$$

mit

$$S^L(t) := (S^L \cup S^{L,R}) \cap (0,t] \quad \text{und} \quad S^R(t) := (S^R \cup S^{L,R}) \cap [0,t)$$

gesetzt ist. Daraus ergeben sich unmittelbar die Behauptungen b)–e).

5. Ein Satz von Korolyuk.

Nach einem Satz von Korolyuk (siehe [7]) gilt für einen stationären, ordinären Call-Prozeß $x(t)$ stets

$$E(x(b)-x(a)) = \lambda(b-a), \qquad \text{wobei} \quad \lambda = \lim_{\tau\searrow 0} \Psi_1(\tau)/\tau$$

der Parameter des Call-Prozesses $x(t)$ ist. Mit den hier entwickelten Methoden können wir allgemein $E(x(b)-x(a))$ berechnen:

Satz 11. *Ist $x(t)$ ein Call-Prozeß mit B-integrablem Ψ_1, so existiert der Erwartungswert von $x(b)-x(a)$ genau dann, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} k p_k(t)$ über $[a,b]$ $s(t)$-integrabel ist. Wenn $E(x(b)-x(a))$ existiert, gilt*

$$E(x(b)-x(a)) = \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} k p_k(t)\, s(dt)\ .$$

Beweis. 1) Sind x_1, x_2 zwei Zufallsvariablen, die mit Wahrscheinlichkeit Eins nicht negative ganze Zahlen annehmen, so ist für $m=1,2,\ldots$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} k\, p(x_1+x_2=k) &= \sum_{\substack{i_1,i_2\geq 0\\ i_1+i_2\leq m}} (i_1+i_2)\, p(x_1=i_1, x_2=i_2)\\ &= \sum_{i_1=1}^{m} i_1 \sum_{i_2=0}^{m-i_1} p(x_1=i_1, x_2=i_2) + \sum_{i_2=1}^{m} i_2 \sum_{i_1=0}^{m-i_2} p(x_1=i_1, x_2=i_2)\\ &\leq \sum_{i_1=1}^{m} i_1 p(x_1=i_1) + \sum_{i_2=1}^{m} i_2 p(x_2=i_2)\ .\end{aligned}$$

2) Es existiere $E(x(b)-x(a))$. Nach 1) gilt für $m=1,2,\ldots$ und für jede Intervallunterteilung Z von $[a,b]$

$$\sum_{k=1}^{m} k p(x(b)-x(a)=k) \leqq \sum_{k=1}^{m} k\psi_k(Z) \leqq E(x(b)-x(a)),$$

also auch

$$\sum_{k=1}^{m} k p(x(b)-x(a)=k) \leqq \sum_{k=1}^{m} \int_a^b k\psi_k(I) = \int_a^b \sum_{k=1}^{m} k p_k(t)\, s(dt)$$
$$\leqq E(x(b)-x(a)) < +\infty$$

und damit für $m \to \infty$ nach dem Satz von Lebesgue

$$E(x(b)-x(a)) = \sum_{k=1}^{\infty} k p(x(b)-x(a)=k)$$
$$\leqq \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} k p_k(t)\, s(dt) \leqq E(x(b)-x(a)).$$

3) Ist umgekehrt $\sum_{k=1}^{\infty} k p_k(t)$ $s(t)$-integrabel über $[a,b]$, so gilt für $m = 1,2,\ldots$

$$+\infty > \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} k p_k(t)\, s(dt) \geqq \int_a^b \sum_{k=1}^{m} k p_k(t)\, s(dt) \geqq \sum_{k=1}^{m} k p(x(b)-x(a)=k).$$

Daraus folgt die Existenz von $E(x(b)-x(a))$. Beweisteil 2) ergibt dann wieder die zweite Behauptung des Satzes.

Für stationäre Call-Prozesse ohne Nachwirkungen ist dieser Satz in [7] bewiesen. Eine unmittelbare Folgerung ist

Satz 12. *Für einen Call-Prozeß $x(t)$ mit B-integrablem Ψ_1 gilt $E(x(b)-x(a))=s(b)-s(a)$ genau dann, wenn $p_k(t)=0$ für $k=2,\ldots$ und $p_1(t)=1$ für alle $t\in[a,b]$ mit Ausnahme einer σ_0-Nullmenge von Stetigkeitspunkten von $s(t)$ ist.*

Nennt man abweichend von der in [2], [9] und [14] gebrauchten Terminologie einen Call-Prozeß $x(t)$ ordinär, wenn $p_k(t)=0$ für $k=2,\ldots$ mit Ausnahme einer σ_0-Nullmenge von Stetigkeitspunkten von $s(t)$ gilt, so lautet Satz 12 wie folgt:

Die Ordinarität von $x(t)$ ist notwendig und hinreichend für die Gültigkeit der Gleichung $E(x(b)-x(a))=s(b)-s(a)$ $(0\leqq a<b<+\infty)$.

Diese Formulierung enthält als Spezialfälle den Satz von Korolyuk, die von Khintchine [7] und Zitek [13] bewiesenen Umkehrungen und, sofern man von der Abweichung in der Definition der Ordinarität absieht, auch die von Zitek [14] für nicht-stationäre Call-Prozesse ohne Nachwirkungen angegebene Verallgemeinerung.

LITERATUR

1. W. Fieger, *Die Anwendung einiger maß- und integrationstheoretischer Sätze auf matrizielle Riemann-Stieltjes-Integrale*, Math. Ann. 150 (1963), 387–410.
2. W. Fieger, *Zwei Verallgemeinerungen der Palmschen Formeln*, Transactions of the Third Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions and Random Processes, Prague, 1964, 107–122.
3. M. Fisz, *Realizations of some stochastic processes*, Studia Math. 15 (1956), 359–364.
4. M. Fisz, *Characterization of sample functions of stochastic processes by some absolute probabilites*, Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Vol. 2, 143–151 (1961).
5. M. Fisz and K. Urbanik, *Analytical characterization of a composed, non-homogeneous Poisson process*, Studia Math. 15 (1956), 328–336.
6. O. Haupt, G. Aumann und Chr. Y. Pauc, *Differential- und Integralrechnung* III, Berlin, 1955.
7. A. Ya. Khintchine, *Mathematische Methoden der Bedienungstheorie*, Trudy Mat. Inst. Steklov. 49, Moskau (1955), pp. 122. (Russisch.)
8. A. Ya. Khintchine, *Sequences of chance events without after-effects*, Teor. Veroyatnost. i Primenen 1 (1956), 3–18. (Russian; English summary.)
9. A. Ya. Khintchine, *On Poisson sequences of chance events*, Teor. Veroyatnost. i Primenen 1 (1956), 320–327. (Russian; English summary.)
10. Chr. Y. Pauc, *Contributions à une théorie de la différentiation de fonctions d'intervalle sans hypothèse de Vitali*, C. R. Acad. Sci. Paris 236 (1953), 1937–1939.
11. R. de Possel, *Sur la dérivation abstraite des fonctions d'ensemble*, J. Math. Pures Appl. (9) 15 (1936), 391–409.
12. J. Ridder, *Über Perron–Stieltjessche und Denjoy–Stieltjessche Integrationen*, Math. Z. 40 (1936), 127–160.
13. F. Zitek, *On a theorem of Korolyuk*, Czechoslovak Math. J. 7 (82) (1957), 318–319. (Russian; English summary.)
14. F. Zitek, *Zur Theorie der ordinären nachwirkungsfreien Folgen*, Czechoslovak Math. J. 8 (83) (1958), 448–459. (Russisch; deutsche Zusammenfassung.)

TECHNISCHE HOCHSCHULE, KARLSRUHE, DEUTSCHLAND