MATH. SCAND. 16 (1965), 159–163

MAXIMAL-FASTPERIODIZITÄT VON GRUPPEN II

W. FLUCH

Einleitung.

Im ersten Teil der Arbeit [3] war u.a. gezeigt worden, daß die spezielle lineare Gruppe über dem Polynomring $\Gamma_n[x_1,\ldots,x_m]$ max.-f.p. ist. Dies soll nun verschärft werden zu dem Satz, daß sie sogar über dem Ring $\Gamma_n^{(\mathfrak{p})}[x_1,\ldots,x_m]$ max.-f.p. ist (Definition von $\Gamma_n^{(\mathfrak{p})}$ in § 1).

Weiter wurde in Teil I eine endlich-erzeugte Gruppe (mit endlich vielen Relationen) angegeben, welche min.-f.p. ist. Wir beweisen als Hauptergebnis den Satz, daß *jede endlich-erzeugbare Matrizengruppe* max.-f.p. *ist*. Als Korollar folgert man den für die Theorie der fastautomorphen Funktionen interessanten Satz, daß jede endlich-erzeugbare Funktionsgruppe max.-f.p. ist.

Offen bleiben die Fragen, ob die spezielle lineare Gruppe über dem Ring *aller* ganzalgebraischen Zahlen noch max.-f.p. ist bzw. wann die allgemeine lineare Gruppe max.-f.p. ist.

1. Spezielle lineare Gruppen.

Sei wieder Γ_n der Ring der ganzen Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers K_n vom Grade n und $\mathfrak{p}$ ein Primideal aus Γ_n. Mit $\Gamma_n^{(\mathfrak{p})}$ bezeichnen wir den Ring derjenigen Zahlen aus K_n, welche zu $\mathfrak{p}$ teilerfremde Nenner besitzen. Mittels der Ideale $\mathfrak{p}^r$ bildet man die Homomorphismen

$$\varphi_r:\ \mathrm{SL}(k,\Gamma_n^{(\mathfrak{p})}) \to \mathrm{SL}(k,R_r)\,,$$

wobei mit R_r der endliche Restklassen-Ring $\Gamma_n^{(\mathfrak{p})} \bmod \mathfrak{p}^r$, $r=1,2,3,\ldots$, bezeichnet sei. Für die zugehörigen Normalteiler N_r gilt: eine Matrix M ist dann und nur dann in N_r, falls $M \equiv E \bmod \mathfrak{p}^r$. Somit ist der Durchschnitt $\bigcap_{r=1}^{\infty} N_r = 1$. Wir erhalten den

Satz 1a. *Die Gruppe* $\mathrm{SL}(k,\Gamma_n^{(\mathfrak{p})})$ *ist* max.-f.p.

Bemerkung. Analog wie beim Beweis von Satz 5 in Teil I kann man einsehen, daß $\mathrm{SL}(2,K_n)$ min.-f.p. ist. Man darf also im obigen Satz das Primideal $\mathfrak{p}$ nicht ohne weiteres weglassen.

Eingegangen am 6. März 1964.

SATZ 1b. *Die Gruppe* $\mathrm{SL}(k, \Gamma_n^{(\mathfrak{p})}[x])$ *ist* max.-f.p.

Zum Beweis wähle man sich unendlich viele verschiedene Zahlen $\alpha \in \Gamma_n$, so daß also $\Gamma_n^{(\mathfrak{p})}[\alpha] \subset \Gamma_n^{(\mathfrak{p})}$ für jedes α gilt. Die Polynome $p(x) = x - \alpha$ definieren uns Homomorphismen

$$\mathrm{SL}(k, \Gamma_n^{(\mathfrak{p})}[x]) \to \mathrm{SL}(k, \Gamma_n^{(\mathfrak{p})}[\alpha]),$$

wobei $\mathrm{SL}(k, \Gamma_n^{(\mathfrak{p})}[\alpha]) \subset \mathrm{SL}(k, \Gamma_n^{(\mathfrak{p})})$, also für jedes α max.-f.p. ist. Daß der Durchschnitt der Kern dieser Homomorphismen aber 1 sein muß, folgt aus dem ZPE-Satz im Ringe $\Gamma_n^{(\mathfrak{p})}[x]$.

SATZ 1. *Die Gruppe* $\mathrm{SL}(k, \Gamma_n^{(\mathfrak{p})}[x_1, \ldots, x_m])$ *ist* max.-f.p.

Den Beweis dieses Satzes führt man mittels vollständiger Induktion nach m. Dazu wähle man unendlich viele Polynome

$$p(x_1, \ldots, x_m) = x_m - p_1(x_1, \ldots, x_{m-1})$$

mit

$$p_1(x_1, \ldots, x_{m-1}) \in \Gamma_n^{(\mathfrak{p})}[x_1, \ldots, x_{m-1}].$$

Der Ring

$$\Gamma_n^{(\mathfrak{p})}[x_1, \ldots, x_m] \quad \mathrm{mod} \ p(x_1, \ldots, x_m)$$

ist dann isomorph einem Teilring von $\Gamma_n^{(\mathfrak{p})}[x_1, \ldots, x_{m-1}]$ und

$$\mathrm{SL}(k, \Gamma_n^{(\mathfrak{p})}[x_1, \ldots, x_{m-1}])$$

nach Induktionsvoraussetzung max.-f.p. Daß der Durchschnitt der zu den Homomorphismus gehörenden Normalteiler 1 ist, folgt wie oben.

KOROLLAR. *Jede Funktionsgruppe mit endlich vielen Erzeugenden ist* max.-f.p.

Der Begriff der Funktionsgruppe ist in [2] erläutert. Nach Definition ist eine solche Gruppe F Untergruppe von $\mathrm{SL}(2, C)$. Wegen Satz 1 genügt es zu zeigen, daß F bereits Untergruppe einer geeigneten

$$\mathrm{SL}(k, \Gamma_n^{(\mathfrak{p})}[x_1 \ldots x_m])$$

ist. Seien $a_1, \ldots, a_\mu$ die erzeugenden Matrizen von F, welche m transzendente Zahlen $x_1, \ldots, x_m$ und s algebraische Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \neq 0$ als Elemente enthalten mögen ($m + s \leqq 4\mu$). Dann ist also

$$F \subset \mathrm{SL}(2, \Gamma[\alpha_1 \ldots \alpha_s, x_1, \ldots, x_m]).$$

Da nur endlich viele algebraische Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ in den a_σ vorhanden sind, so gibt es einen algebraischen Zahlkörper K_n mit genügend hohem Grad n, so daß alle in diesem einen Körper liegen. Weiter gibt es in dem zu K_n gehörenden Ring Γ_n sicherlich ein Primideal $\mathfrak{p}$, das teilerfremd zu den Nennern der α_i ist, da durch die Nenner insgesamt nur eine endliche Menge von Primidealen ausgeschlossen ist, das heißt

$$\Gamma[\alpha_1 \ldots \alpha_s x_1 \ldots x_n] \subset \Gamma_n^{(\mathfrak{p})}[x_1,\ldots,x_m] .$$

Damit ist das Korollar bereits bewiesen.

2. Endlich-erzeugbare Matrizengruppen.

Satz 7 in Teil I besagt, daß es endlich-erzeugbare Gruppen (sogar mit endlich vielen Relationen) gibt, welche min-f.p. sind. Im Gegensatz dazu soll nun als Hauptergebnis der Arbeit der Satz bewiesen werden, daß jede endlich-erzeugbare Matrizengruppe max.-f.p. ist (Matrizengruppe heißt jede endl.-dim. treu darstellbare Gruppe). Dieser Satz ist deshalb von selbständigem Interesse, weil er die Untersuchung einer endlich-erzeugbaren Gruppe nach Max.-f.p. zurückführt auf die Frage nach einer treuen (endl.-dim.) Darstellung dieser Gruppe. Letzteres läßt sich in einigen Fällen entscheiden. Wir bringen dazu Beispiele im nächsten Paragraphen.

Satz 2. *Jede endlich-erzeugbare Matrizengruppe ist* max.-f.p.

Beweis. Sei k der Grad der Darstellung und $a_1,\ldots,a_\mu$ die erzeugenden Matrizen von G mit $\mathrm{Det}(a_i)=d_i \neq 0$. In den a_i mögen m transzendente Zahlen $x_1,\ldots,x_m$ und s algebraische Zahlen $\alpha_1,\ldots,\alpha_s \neq 0$ als Elemente auftreten. Dann gilt $m+s \leqq k^2 n$. Die Zahlen $d_i=d_i(\alpha,x)$ sind Polynome aus $\Gamma[\alpha,x]$ mit

$$\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_s) \qquad \text{und} \qquad x = (x_1,\ldots,x_m) .$$

Man wähle sich nun unendlich viele verschiedene m-tupeln $\beta=(\beta_1\ldots,\beta_m)$ von algebraischen Zahlen β_i, so daß $d_i(\alpha,\beta) \neq 0$ wird. Jede Substitution $x \to \beta$ liefert einen Homomorphismus

$$\eta\colon\ G \to \bar{G} \qquad \text{mit} \qquad \bar{G} \subset GL(k,\Gamma[\alpha,\beta]) .$$

Hilfssatz. *Für jede Wahl der β_j mit $d_i(\alpha,\beta) \neq 0$ ist $\bar{G}$* max.-f.p.

Die alg. Zahlen α_i, β_j, $d_k(\alpha,\beta)$ liegen nun in einem Zahlkörper genügend hohen Grades n, den wir mit K_n bezeichnen. Die Zähler und Nenner der eben genannten alg. Zahlen bilden eine endliche Menge A von Zahlen aus Γ_n. Es gibt daher unendlich viele Primideale $\mathfrak{p} \subset \Gamma_n$, welche zu allen Zahlen aus A teilerfremd sind. Bezeichnen wir $\Gamma[\alpha,\beta] \bmod \mathfrak{p}$ mit R für ein solches $\mathfrak{p}$. R ist ein endlicher Restklassenring und $\mathfrak{p}$ induziert den Homomorphismus

$$\varphi: \quad GL(k,\Gamma[\alpha,\beta]) \to GL(k,R) ,$$

bei welchem $\bar{G}$ auf eine endliche Gruppe abgebildet wird. Der Durchschnitt der Kerne der Homomorphismus φ bzw. η ist aber 1, da stets unendlich viele solche Homomorphismen (φ bzw. η) zur Verfügung stehen und in den entsprechenden Ringen der ZPI- bzw. ZPE-Satz gilt. Damit ist Satz 2 bewiesen.

3. Beispiele.

Wir wollen als erste Anwendung zeigen, daß die Fundamentalgruppe einer geschlossenen orientierbaren bzw. nichtorientierbaren Fläche vom Geschlecht p max.-f.p. ist. Dieser Satz wurde für die orientierbaren Flächen zuerst von K. Fung bewiesen (siehe [5]).

Nun kann man zeigen (siehe [1]), daß diese Fundamentalgruppen Untergruppen der Spiegelungsgruppe $S=\{R_1,R_2,R_3\}$ mit den Relationen

$$R_1{}^2 = R_2{}^2 = R_3{}^2 = (R_1R_2)^m = (R_2R_3)^n = (R_3R_1)^2 = E$$

sind für geeignete m und n. Damit hat man aber eine treue Darstellung durch 4×4-Matrizen, also wegen Satz 2 den

Satz 3. *Die Fundamentalgruppe einer geschlossenen orientierbaren bzw. nicht-orientierbaren Fläche vom Geschlecht p ist* max.-f.p. *Sie besitzt eine treue Darstellung durch* 4×4-*Matrizen.*

Eine treue Darstellung durch 3×3-Matrizen wurde von J. Mennicke [6] angegeben.

Um eine weitere Anwendung geben zu können, brauchen wir den Hilfssatz, daß eine Gruppe G mit treu darstellbarem Normalteiler von endlichem Index selbst treu darstellbar ist, welcher in meiner Arbeit [4] bewiesen wurde. Als Resultat erhält man den

Satz 4. *Jede endlich-erzeugbare Gruppe G mit treu darstellbarem Normalteiler von endlichem Index ist* max.-f.p.

Weitere, jedoch speziellere Beispiele lassen sich leicht finden.

LITERATUR

1. H. S. M. Coxeter and W. O. J, Moser, *Generators and relations for discrete groups*, Ergeb. d. Math. 14, Berlin, 1957.
2. L. R. Ford, *Automorphic functions*, New York, 1951.
3. W. Fluch, *Maximal-fastperiodizität von Gruppen* I, Math. Scand. 16 (1965), 148–158.

4. W. Fluch, *Gruppen ohne endlich-dimensionale Darstellungen*, Math. Scand. 16 (1965), 164–168.
5. W. Maak, *Darstellungstheorie unendlicher Gruppen und fastperiodische Funktionen*, Enzyklop. d. math. Wiss. (Zweite Auflage.) I 1,16, Leipzig, 1953.
6. J. Mennicke, *A note on regular coverings of closed orientable surfaces*, Proc. Glasgow Math. Ass. 5 (1961), 49–66.

UNIVERSITÄT GÖTTINGEN, DEUTSCHLAND