MATH. SCAND. 16 (1965), 164–168

GRUPPEN OHNE ENDLICH-DIMENSIONALE DARSTELLUNGEN

W. FLUCH

Eine Gruppe $G \neq 1$, deren sämtliche endlich-dimensionalen Darstellungen (über dem Körper C der komplexen Zahlen) trivial sind, wollen wir nichtlinear nennen. In [2] wurde die Existenz endlich-erzeugbarer, nichtlinearer Gruppen nachgewiesen und in [3] konnte dies verschärft werden zu: es gibt sogar nichtlineare Gruppen mit endlich vielen Erzeugenden und Relationen. In dieser Arbeit werden nun sämtliche endlich-erzeugbaren, nichtlinearen Gruppen charakterisiert durch den

SATZ 1. *Eine endlich-erzeugbare Gruppe G ist genau dann nichtlinear, falls ihre sämtlichen Faktorgruppen $F \neq 1$ unendlich sind.*

Überabzählbar viele Beispiele dazu sind die endlich erzeugten, unendlichen, einfachen Gruppen von R. Camm (siehe [1]).

Falls G eine endliche Faktorgruppe $F \neq 1$ hat, so liefert ja die reguläre Darstellung von F eine nichttriviale Darstellung von G. Im anderen Fall aber folgt die Behauptung aus dem unten bewiesenen Lemma 2. Es ist bemerkenswert, daß der Satz 1 und Lemma 2 für Gruppen mit unendlich vielen Erzeugenden in dieser Allgemeinheit nicht gelten (siehe jedoch Lemma 3); als Gegenbeispiel wähle man etwa die spezielle lineare Gruppe $\mathrm{SL}(2,R)$ über dem Körper R der rationalen Zahlen, welche eine einfache Gruppe ist. (Ein Beispiel einer Gruppe mit überabzählbar vielen Erzeugenden ist etwa die Drehgruppe O_3^+.) Offenbar ist jede ihrer Faktorgruppen $F \neq 1$ unendlich, aber die Gruppe besitzt eine treue Darstellung durch 2×2-Matrizen. Eine (gruppentheoretische) Charakterisierung *aller* nichtlinearen Gruppen scheint schwierig. Folgendes Lemma ist ziemlich naheliegend.

LEMMA 1. *Die Gruppe G sei Produkt von Untergruppen G_α. Sind alle G_α nichtlinear, so ist auch G nichtlinear.*

BEWEIS. Jede endlich-dimensionale Darstellung D von G liefert eine endlich-dimensionale Darstellung ihrer Untergruppen G_α und nach Vor-

Eingegangen am 16. Juli 1964.

aussetzung ist $D(G_\alpha)=1$ für jedes α. Insbesondere gilt daher für die Erzeugenden $a_\sigma \in G$: $D(a_\sigma)=1$ und somit ist $D(G)=1$.

KOROLLAR 1. *Das direkte und das freie Produkt nichtlinearer Gruppen ist wieder eine nichtlineare Gruppe.*

Die Nichtlinearität der Gruppe $G=\{a,b,c,d\}$, mit den Relationen

$$b^{-1}ab = a^2, \qquad c^{-1}bc = b^2, \qquad d^{-1}cd = c^2, \qquad a^{-1}da = d^2,$$

wurde in [3] auf direktem Wege nachgewiesen. Dasselbe Resultat läßt sich aber auch aus Satz 1 ableiten, da in [4] bewiesen wurde, daß jede Faktorgruppe $\neq 1$ dieser Gruppe unendlich ist. Um den Satz 1 zu beweisen, zeigen wir nun

LEMMA 2. *Jede endlich-erzeugbare Gruppe G, welche eine nichttriviale endlich-dimensionale Darstellung D besitzt, hat einen Normalteiler N mit endlicher Faktorgruppe $F=G/N\neq 1$.*

Eine unmittelbare Konsequenz dieses Lemmas ist das

KOROLLAR 2. *Eine endlich-erzeugbare, einfache Matrizengruppe ist endlich.*

BEWEIS VON LEMMA 2. Sei $a_1,\ldots,a_n$ ein Erzeugendensystem von G und die gegebene, nichttriviale Darstellung D etwa k-dimensional. Nach Voraussetzung ist $\bar{G}=D(G)\neq 1$. Die Bilder der Erzeugenden von G, welche ja ein Erzeugendensystem von $\bar{G}$ bilden, mögen

$$\bar{a}_1 = D(a_1), \ldots, \bar{a}_n = D(a_n)$$

heißen. Die Menge der Elemente $\bar{a}\in\bar{G}$ mit $\mathrm{Det}(\bar{a})=1$ ist ein Normalteiler $\bar{N}$, welcher die Kommutatorgruppe enthält und daher abelsche Faktorgruppe $\bar{A}=\bar{G}/\bar{N}$ besitzt. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1) $\bar{A}\neq 1$. Dann besitzt aber $\bar{A}$, das wie $\bar{G}$ endlich erzeugbar ist, sicherlich eine endliche Faktorgruppe $\bar{\bar{A}}\neq 1$ (die man erhält, indem man die Ordnung eines jeden erzeugenden Elementes endlich macht!). Durch Zusammensetzen erhalten wir die homomorphe Abbildung $G\to\bar{\bar{A}}\neq 1$, welche das Lemma im Falle 1 beweist.

2) $\bar{A}=1$ d.h. $\bar{G}=\bar{N}$ oder $\mathrm{Det}(\bar{a})=1$ für jedes $\bar{a}\in\bar{G}$. Seien nun $x_1,\ldots,x_m$ die transzendenten, voneinander algebraisch unabhängigen und weiter $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ die algebraischen Zahlen $\neq 0$, welche als Elemente in den (erzeugenden) Matrizen $\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n$ auftreten. Es ist $m+s\leqq k^2n$ und $\bar{G}$ eine Untegruppe von

$$\mathrm{SL}(k, \Gamma[\alpha_1,\ldots,\alpha_s,x_1,\ldots,x_m]) .$$

Es gibt gewiß algebraische Zahlen $\beta_1,\ldots,\beta_m$ so, daß beim Homomorphismus

$$\varphi\colon\ \mathrm{SL}(k, \Gamma[\alpha_1,\ldots,\alpha_s,x_1\ldots x_m]) \to \mathrm{SL}(k, \Gamma[\alpha_1\ldots\alpha_s,\beta_1\ldots\beta_m])$$

mindestens eine Matrix $\bar{a}_\mu \neq 1$ auf eine Matrix $\bar{\bar{a}}_\mu \neq 1$ abgebildet wird. Das Bild von $\bar{G}$ bei φ sei

$$\bar{\bar{G}} \subset \mathrm{SL}(k, \Gamma[\alpha_1\ldots\alpha_s,\beta_1\ldots\beta_m])\ .$$

Wir wählen nun ein Hauptideal $\mathfrak{a} = (p) \subset \Gamma[\alpha_1\ldots\beta_m]$, p eine rationale Primzahl, so daß $\mathfrak{a}$ teilerfremd zu allen Nennern der algebraischen Zahlen $\neq 0$, welche in den Matrizen $\bar{\bar{a}}_\mu \neq 1$ auftreten. Da die Menge dieser algebraischen Zahlen endlich ist, ist durch sie auch nur eine endliche Menge P von Primzahlen p ausgeschlossen. Mittels $\mathfrak{a}$ bilden wir den Homomorphismus

$$\eta_p\colon\ \mathrm{SL}(k, \Gamma[\alpha_1\ldots\beta_m]) \to \mathrm{SL}(k,R)\ ,$$

wobei R der endliche Restklassenring $\Gamma[\alpha_1\ldots\beta_m]$ mod $\mathfrak{a}$ ist. Daher ist $\mathrm{SL}(k,R)$ endliche Gruppe, also auch $G_p = \eta_p(\bar{\bar{G}})$. Wir behaupten nun den

Hilfssatz 1. *Ein erzeugendes Element $\bar{\bar{a}}_\sigma(\neq 1) \in \bar{\bar{G}}$ kann nicht bei jedem Homomorphismus η_p, $p \notin P$, auf* 1 *abgebildet werden*, d.h. *G_p ist für mindestens ein $p \notin P$ nicht* 1.

Beweis. Wenn $\eta_p(\bar{\bar{a}}_\sigma) = 1$ für jedes $p \notin P$, so heißt dies $\bar{\bar{a}}_\sigma - 1 \equiv 0 \bmod \mathfrak{a}$ für alle $p \notin P$ und daraus folgt $\bar{\bar{a}}_\sigma - 1 = 0$, weil es unendlich viele $p \notin P$ gibt, eine ganzalgebraische Zahl aber nur durch endlich viele verschiedene Ideale $\mathfrak{a}$ teilbar sein kann. Wir wissen bereits, daß es mindestens ein $\bar{\bar{a}}_\sigma \neq 1$ gibt, also gibt es auch ein p mit $G_p \neq 1$.

Insgesamt erhalten wir wieder eine homomorphe Abbildung

$$\eta_p \varphi D\colon\ \bar{\bar{G}} \to G_p\ \neq\ 1$$

mit der gewünschten Faktorgruppe. Damit ist das Lemma vollständig bewiesen.

Wir können den Beweis von Lemma 2 auch im Falle unendlich erzeugter Gruppen durchführen, sofern über die Darstellung D einige zusätzliche Voraussetzungen bekannt sind. Das Lemma lautet dann folgendermaßen

Lemma 3. *Eine Gruppe G besitze eine nichttriviale, endlich-dimensionale Darstellung derart, daß die Matrizen $D(a_\sigma)$ der erzeugenden Elemente $a_\sigma \in G$ die Eigenschaften haben, daß*

a) *nur endlich viele transzendente Zahlen als Elemente vorkommen;*

b) *die algebraischen Zahlen, welche als Elemente auftreten, aus ein und* *demselben Zahlkörper K endlichen Grades sind, und daß die Nenner dieser algebraischen Elemente sämtliche teilerfremd zu einem Primideal $\mathfrak{p} \subset K$ sind.*

Dann hat G einen Normalteiler N mit endlicher Faktorgruppe $F = G/N \neq 1$.

Beweis. Man substituiere für die transzendenten Zahlen ganzalgebraische Zahlen β so, daß die entstehende Faktorgruppe $\bar{G}$ wieder $\neq 1$ wird. (Nun kann man sich wieder auf den Fall $\mathrm{Det}(a) = 1$, $a \in G$, beschränken, wie man mit Hilfe des durch die Normfunktion gegebenen Homomorphismus einsieht!) Mittels $\mathfrak{p}$, das nach Voraussetzung existiert, bilde man weiter die Homomorphismen

$$\eta_n\colon\ \mathrm{SL}(k, \Gamma[\ldots]) \to \mathrm{SL}(k, R)\,,$$

wobei $R \equiv \Gamma[\ldots] \bmod \mathfrak{p}^n$ ist (endlicher Restklassenring). Diese liefern also für G lauter endliche Faktorgruppen. Es gilt dabei der entsprechende Hilfssatz

Hilfssatz 2. *Falls $\bar{a}_\mu \neq 1$ erzeugendes Element von $\bar{G}$, so gibt es ein genügend großes, natürliches n mit $\eta_n(\bar{a}_\mu) \neq 1$.*

Wäre nämlich $\eta_n(\bar{a}_\mu) = 1$ für alle natürlichen n, so hieße das gerade $\bar{a}_\mu - 1 = 0 \bmod \mathfrak{p}^n$ für alle n und daher $\bar{a}_\mu - 1 = 0$. Widerspruch!

Damit ist der Beweis von Lemma 3 vollendet.

Eine Gruppe nennt man darstellbar, falls sie eine nichttriviale Darstellung durch (endlich-dimensionale) Matrizen gestattet. Eine treu darstellbare Gruppe heißt entsprechend Matrizengruppe. Es gilt dann für beliebige Gruppen der Hilfssatz

Hilfssatz 3. *Eine Gruppe G mit treu darstellbarem Normalteiler N von endlichem Index ist selbst Matrizengruppe.*

Zusammen mit Lemma 2 hat man daher folgendes

Kriterium. *Eine endlich-erzeugbare Gruppe ist genau dann Matrizengruppe, wenn sie einen treu darstellbaren Normalteiler mit endlichem Index besitzt.*

Beweis des Hilfssatzes. Sei $D\colon n \to D(n)$ die gegebene treue Darstellung von N. Wir definieren

$$D_i(n) = D(a_i^{-1} n a_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, r\,,$$

wobei $a_1, a_2, \ldots, a_r$ ein Repräsentantensystem von G/N ist. Mit $\bar{g}$ bezeichnen wir die Restklasse von $g \in G$; eine Permutationsdarstellung von $F = \{\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_r\}$ ist gegeben durch die Permutationen

$$P_g = \begin{pmatrix} \bar{a}_1 \ldots & \bar{a}_r \\ \overline{ga}_1 \ldots & \overline{ga}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & r \\ i_1 & \ldots & i_r \end{pmatrix},$$

wofür wir kurz $P_g(k) = i_k$, $k = 1, 2, \ldots, r$, schreiben. Nun gilt wegen $\overline{ga_i} = \bar{g}\bar{a}_i$ aber

$$ga_i = n_g^{(i)} a_{P_g(i)} \quad \text{mit} \quad n_g^{(i)} \in N ,$$

und daher können wir die Darstellung T von G durch

$$T_g = \bigoplus_{i=1}^{r} D_{P_g(i)}(n_g^{(i)})$$

für alle $g \in G$ definieren. Da P treu auf F und D treu auf N, so folgt offenbar, dass T treu auf G ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Beispiele zu Hilfssatz 3 sind die freien Produkte von endlich vielen Gruppen endlicher Ordnung.

LITERATUR

1. R. Camm, *Simple free products*, J. London Math. Soc. 28 (1953), 66–76.
2. W. Fluch, *Maximal-fastperiodizität von Gruppen* I, Math. Scand. 16 (1965), 148–158.
3. W. Fluch, *Über die Nichtlinearität einer gewissen Gruppe*, Acta Arith. 10 (1964), 329–332.
4. G. Higman, *A finitely generated infinitely simple group*, J. London Math. Soc. 26 (1951), 61–64.

UNIVERSITÄT GÖTTINGEN, DEUTSCHLAND